Loi Binomiale

Table des matières

1 dénombrement et coefficients binomiaux **2**
- 1.1 activité . . . 2
- 1.2 a retenir . . . 3
- 1.3 exercices . . . 4
- 1.4 corrigés exercices . . . 5

2 loi binomiale **6**
- 2.1 activité . . . 7
- 2.2 à retenir . . . 8
- 2.3 exercices bac 2011 à 2017 . . . 12
- 2.4 corrigés exercices bac 2011 à 2017 . . . 38
- 2.5 exercices . . . 42
- 2.6 corrigés exercices . . . 45
- 2.7 évaluation . . . 54
- 2.8 corrigé évaluation . . . 56
- 2.9 évaluation . . . 58
- 2.10 corrigé évaluation . . . 61
- 2.11 travaux pratiques . . . 63
  - 2.11.1 tp1 : calculatrice et tableur . . . 63
  - 2.11.2 tp2 : programme calculatrice . . . 66

3 échantillonnage **68**
- 3.1 activité . . . 68
  - 3.1.1 activité 1 : Comment déterminer si une pièce de monnaie est bien équilibrée ? 68
  - 3.1.2 corrigé activité 1 : Comment déterminer si une pièce de monnaie est bien équilibrée ? . . . 69
- 3.2 à retenir . . . 71
- 3.3 exercices . . . 72
- 3.4 corrigés exercices . . . 75

4 tp 1 : tableur et intervalle de fluctuation binomial **82**

5 tp2 : programme calculatrice et intervalle de fluctuations binomial à 95% **85**

6 tp : Loi Binomiale : Comparaison de résultats "expérimentaux" et de résultats théoriques **87**

7 tp 4 : Loi Binomiale et Calculatrice Scientifique **89**

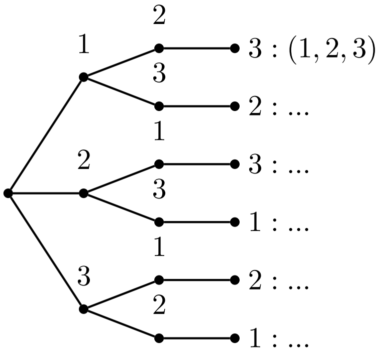
1 dénombrement et coefficients binomiaux

1.1 activité

1. **Nombre de permutations de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) : $\boxed{n!}$ *(factoriel n)***

   Combien y a t-il de façons : $\left\{\begin{array}{l}\text{de ranger } n \text{ objets dans } n \text{ cases ? (un par case)} \\ \text{de ranger cote à cote } n \text{ objets ? (en ligne)} \\ \text{de "permuter" } n \text{ objets ?}\end{array}\right.$

   (a) **donner le nombre et toutes les façons de permuter 3 objets en s'aidant de l'arbre de dénombrement suivant *(donner un calcul)***

   il y a

   (b) **de même, nombre de permutations de 4 éléments = ...**

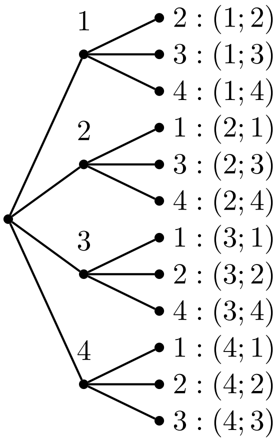
   (c) **nombre de permutations de 5 éléments = ...**

   (d) **nombre de permutations de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) = ...**

2. **Nombre d'arrangements de k éléments parmi n ($k \leq n$) : $\boxed{A_n^k}$**

   Combien y a t-il de façons : $\left\{\begin{array}{l}\text{de ranger } k \text{ objets dans } n \text{ cases ? (un par case et } k \leq n) \\ \text{de choisir et ranger } k \text{ objets parmi } n \text{ ?}\end{array}\right.$

   (a) **utiliser l'arbre de dénombrement ci dessous pour trouver le nombre de façons de choisir et ranger 2 objets parmi 4 objets**

   il y a ...

   (b) **nombre de façons de choisir et ranger 3 objets parmi 10 objets : $A_{10}^3 = ...$**

   (c) **nombre de façons de choisir et ranger 4 objets parmi 20 objets : $A_{20}^4 = ...$**

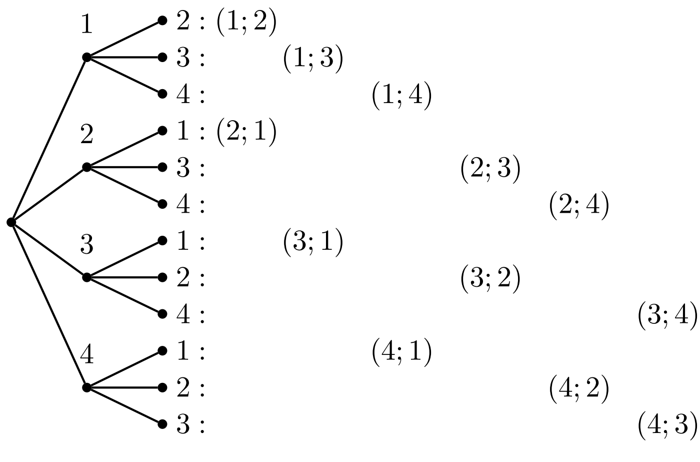
   (d) **donner une formule pour ($p \leq n$) : $A_n^k = ...$**

   (e) **vérifier que** $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

3. **Nombre de combinaisons de k éléments parmi n ($k \leq n$) : $C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$**

   Combien y a t-il de façons de choisir sans ranger k objets parmi n ? *(groupes de k objets)*

   (a) **notons C_{10}^2 le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4**
   « Pour trouver le nombre de combinaisons C_4^2 , il suffit de connaître le nombre d'arrangement de 2 éléments parmi 4 et de diviser par le nombre de façons de ranger les deux éléments soit 2! »
   on en déduit que $C_{10}^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{12}{2} = 6$

(b) Donner une relation entre C_{20}^4, A_{20}^4 et $4!$ puis donner la valeur de C_{20}^4

(c) on note C_n^k ou encore $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ le nombre de combinaisons de p éléments parmi n,

exprimer $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ en fonction de A_n^k et $k!$

en déduire l'expression de $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ en fonction de $n!$, $(n-k)!$ et $k!$

(d) calculer C_{10}^3 à la main et vérifier à la calculatrice

1.2 a retenir

propriété 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels avec $k < n$

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n éléments est noté $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

avec $\boxed{C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ où $\boxed{n! = n \times (n-1) \times ... \times 1}$ *(factoriel n)* et $\boxed{0! = 1}$

exemples :

en particulier on a : $\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$ et $\boxed{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

le nombre de groupes *(non ordonnés)* de 3 personnes parmi 30 est :

$C_{30}^3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

remarques :

i. on remarque le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
...							

ii. on remarque qu'il semble que : $\boxed{C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}}$

iii. on remarque qu'il semble que : $\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n}$

iv. on admettra que : quels que soient les réels a et b et l'entier naturel n, on a :

$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}}$ (formule du binôme)

1.3 exercices

exercice 1 :

1. **combien y a t-il de groupes possibles de deux personnes parmi 16 ?**
2. **combien y a t-il de groupes de 3 chevaux parmi 15 ?**
3. **combien de groupes de 6 billes parmi 49 ?**
4. **combien de mots de 5 lettres avec :**
   (a) **zéro S et "le reste" de E**
   (b) **un S et le reste de E**
   (c) **2 S et le reste de E**
   (d) **3 S et le reste de E**
   (e) **4 S et le reste de E**
   (f) **5 S et "le reste" de E**
5. **on lance 5 fois une pièce de monnaie avec pile $=$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 3 succès parmi les 10 lancers ?
6. **on lance 7 fois un dé avec $6 =$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 4 succès parmi les 7 lancers ?

1.4 corrigés exercices

<u>corrigé exercice 1 :</u>

1. **combien y a t-il de groupes possibles de deux personnes parmi 16 ?**
2. **combien y a t-il de groupes de 3 chevaux parmi 15 ?**
3. **combien de groupes de 6 billes parmi 49 ?**
4. **combien de mots de 5 lettres avec :**
   (a) **zéro S et "le reste" de E**
   (b) **un S et le reste de E**
   (c) **2 S et le reste de E**
   (d) **3 S et le reste de E**
   (e) **4 S et le reste de E**
   (f) **5 S et "le reste" de E**
5. **on lance 5 fois une pièce de monnaie avec pile $=$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 3 succès parmi les 10 lancers ?
6. **on lance 7 fois un dé avec $6 =$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 4 succès parmi les 7 lancers ?

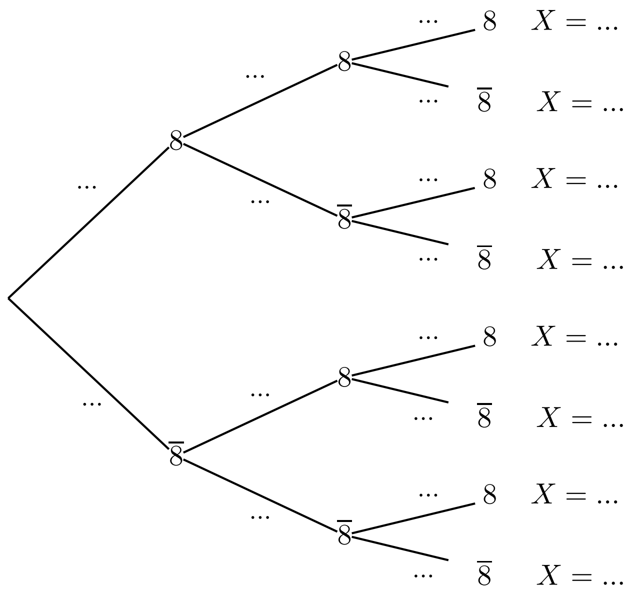
2 loi binomiale

2.1 activité

A. **Exemple**

Pour un dé bien équilibré à 8 faces, on s'intéresse aux événements :
Succès : « on obtient un 8 » et à son contraire Echec : « on n'obtient pas un 8 »
On lance le dé 3 fois de suite et de manières indépendantes
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a obtenu 8 parmi les 3 lancers
On cherche la loi de probabilité de X (qui sera une loi dite "binomiale" de paramètres à préciser)

1. **Pour un quelconque des 3 lancers, donner $p = p(8)$ et $q = p(\overline{8})$**
2. **Compléter l'arbre pondéré ci dessous et indiquer les valeurs de X en bout de branche ainsi que les probabilités associées**



3. **Donner les valeurs possibles pour X**
4. **Préciser combien de façons il y a d'obtenir deux 8 parmi trois lancers noté C_3^2 ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$** ***"coefficient binomial 2 parmi 3"*** **et détailler le calcul de $p(X = 2)$**
5. **Donner la loi de probabilité de X (sous la forme d'un tableau)**
6. **On dit que X suit une loi ... de paramètre $p = ...$ et $n = ...$**

B. **Généralisation**

dans le cas où :

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } p \\ \text{échec : de probabilité : } q = 1 - p \end{cases} \end{cases}$$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres

$$(n, p) \text{ avec : } \begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} \\ \text{ou } \boxed{p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}} \end{cases}$$

C. **Application**

On joue 4 fois à "pile ou face" avec une pièce équilibrée et de manières indépendantes
Soit X le nombre de fois où l'on fait "pile". Donner la loi de probabilité de X

2.2 à retenir

<u>définition 1</u> *(épreuve de Bernoulli)*

> **Une expérience aléatoire**
> **pour laquelle on ne considère $\boxed{\text{que deux issues contraires}}$ succès S et échec $\overline{S}$**
> **est appelée $\boxed{\text{"épreuve de Bernoulli"}}$**

exemple :
On choisit une carte au hasard dans un jeu usuel de 32 cartes :

S succès : "c'est une Reine"

$\overline{S}$ échec : "ce n'est pas une Reine"

définit une épreuve de Bernoulli

<u>définition 2</u> *(loi de Bernoulli)*

> **La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de probabilité associée**
> **à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p ($p \in [0;1]$)**
> **et la probabilité d'échec est $q = 1 - p$**

exemple :

Pour l'épreuve de Bernoulli (32 cartes) :

$\frac{4}{32}$ **S succès : "c'est une Reine"**

$\frac{28}{32}$ **$\overline{S}$ échec : "ce n'est pas une Reine"**

on a la "loi de Bernoulli" suivante :

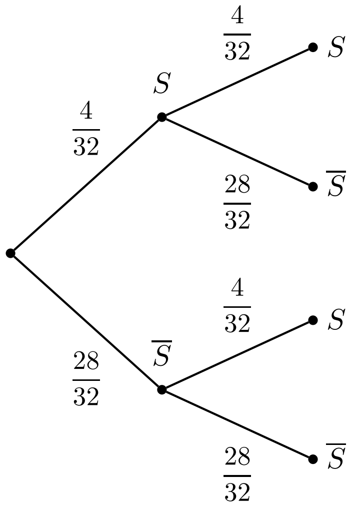
résultat	S	$\overline{S}$	Total
probabilité	$\frac{4}{32}$	$\frac{28}{32}$	1

<u>définition 3</u> (Schéma de Bernoulli)

> **Un "schéma de Bernoulli" est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli**
> **dans des conditions d'indépendance des épreuves**
> ***(elles sont indépendantes les unes des autres)***

exemple :
On choisit une carte, puis on la remet, ceci, deux fois de suite (32 cartes) et on s'intéresse au fait que la carte soit une Reine ou non.

On illustre le "schéma de Bernoulli" par l'arbre suivant :



propriété 2 *(loi Binomiale)*

Dans le cas d'un "schéma de Bernoulli" où

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire (} n \in \mathbb{N}^*) \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } p \\ \text{échec : de probabilité : } q = 1 - p \end{cases} \end{cases}$$

alors,

la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec :

$$\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ \\ \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } n \ \boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} \text{ ou } \boxed{p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}} \end{cases}$$

de plus,

la valeur moyenne (espérance) de X est $\boxed{E(X) = np}$ et l'écart type est $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$

exemple :

soit X le nombre de fois que l'on a obtenu une Reine pour 4 tirages indépendants avec remise dans un jeu de 32 cartes.

Les 3 conditions ci dessus sont vérifiées :

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 4 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } \dfrac{4}{32} \\ \text{échec : de proba : } q = 1 - \dfrac{4}{32} = \dfrac{28}{32} \end{cases} \end{cases}$$

donc,

la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 4, p = \dfrac{4}{32})$ avec :

$$\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \\ \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } 4 \ \boxed{p(X = k) = \begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix} (\dfrac{4}{32})^k (\dfrac{28}{32})^{4-k}} \end{cases}$$

et par exemple :

$$p(X = 3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times (\frac{4}{32})^3 (1 - \frac{4}{32})^{4-3}$$

$$p(X = 3) = 4 \times (\frac{4}{32})^3 \times \frac{28}{32} \simeq \boxed{0,0068}$$

la valeur moyenne de X est $E(X) = np = 4 \times \dfrac{4}{32} = \boxed{0,5}$

pour une série de 4 lancers on obtient en moyenne "$0,5$ fois la Reine"

l'écart type est : $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times \dfrac{4}{32} \times \dfrac{28}{32}} = \boxed{0,4375}$

remarques :

i. avec la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}$

et en prenant $a = p$ **et** $b = n - p$

on obtient : $(p + (1-p))^n = 1^n = \boxed{\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1}$

ii. pour démontrer que $E(X) = np$

cela revient à montrer que : $\sum_{k=0}^{k=n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np$

cela revient à montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p$ **comme suit :**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}\times p$$

$$=p\sum_{K=0}^{K=n} C_{n-1}^{K}p^{K}(1-p)^{(n-1)-(K)}$$

$$=p(p+(1-p))^{n-1}$$

$$=p$$

conclusion : $\boxed{E(X)=\sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=np}$

2.3 exercices bac 2011 à 2017

(Métropole 2011)

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

(Antilles 2011)

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

   c. Déterminer l'espérance de X.

(Polynésie 2011)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1^{er} niveau, 75 vont au 2^e niveau et 100 vont au 3^e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^e niveau, les autres vont au 1^{er} niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

— N_1 : « La personne va au premier niveau. »
— N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
— N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
— E : « La personne emprunte l'escalier. »

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^e niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^e niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^e niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2^e niveau » soit supérieure ou égale à $0,99$.

(Calédonie 2011)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

a. Quelle est la loi suivie par Y ?

b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures

c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

(Pondichéry 2012)

. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

— il a été contrôlé 5 fois exactement ;
— il n'a pas été contrôlé ;
— il a été contrôlé au moins une fois.

(Amérique du Nord 2012)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

(Liban 2012)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

$$P(B)\text{, probabilité de l'évènement } B\text{, vaut } \frac{1}{7}.$$

On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement $(N = 3)$.

(Antilles 2012)

Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

(Asie 2011)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

   Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

   a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

   c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

(Métropole 2012)

Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

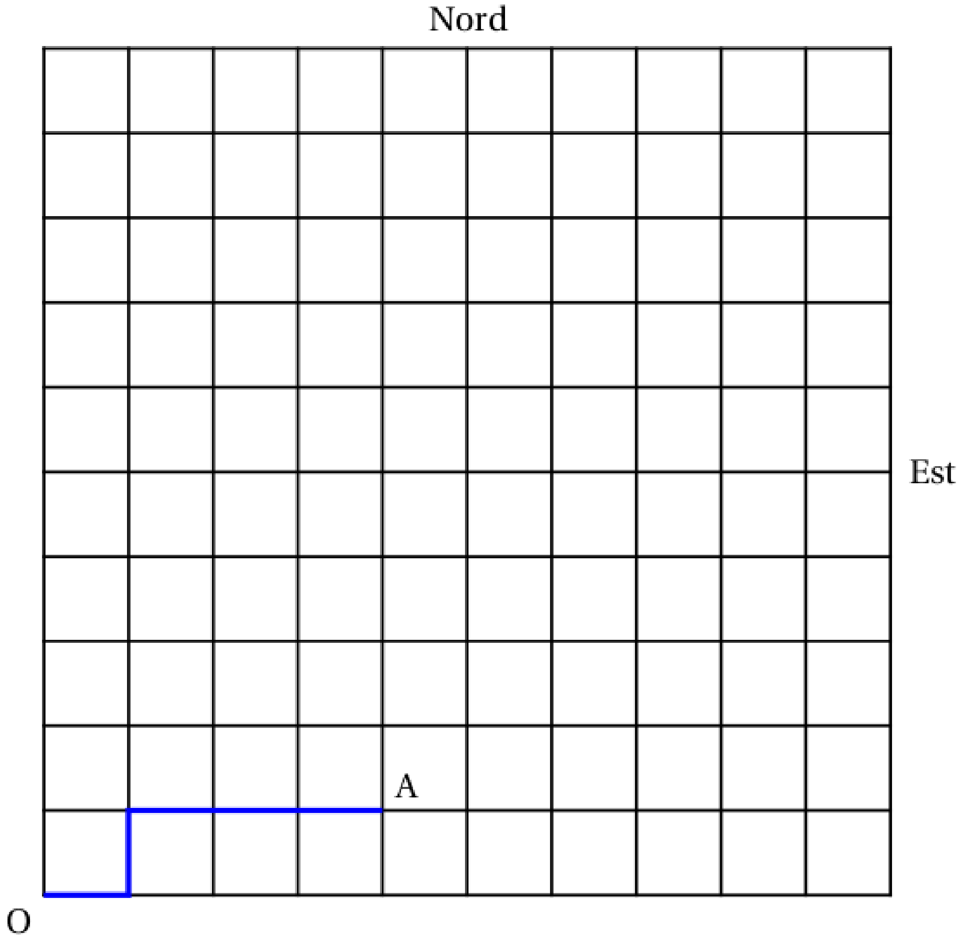
a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

(Antilles 2012)

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les p,tés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées $(0;0)$, le point A a pour coordonnées $(4;1)$.
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\,;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple :
Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :
ils sont de longueur 5 ;
un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.
On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

(Métropole 2012)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

a. Donner l'expression de p en fonction de n.

b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

c. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 ?

(Calédonie 2012)

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

(Pondichéry 2013)

Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probab lité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette périod d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de sant de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés ma lades une semaine donnée.

Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

(Asie 2013)

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On s
que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette s
par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 b
nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on p
les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticid
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune
pesticides.

. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette j
dinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que
choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stoc

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'éc
tillon choisi.

C : « l'arbre choisi est un conifère »

la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètr

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exacter
5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins
arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

(Calédonie 2013)

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il e
donné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et e
conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer
avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le no
billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exa
deux billes hors norme ?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au
bille hors norme ?

(Amérique du Sud 2013)

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportio
çais présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type ané
de 10 %.

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce
de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 p
prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes d
tillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer $P(X = 35)$.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au m
   sentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

(Amérique du Nord 2013)

Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,06$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

(Métropole 2014)

Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a. Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

(Calédonie 2014)

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

   Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

(Calédonie 2014)

Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0,003$.

On prélève au hasard $15\,000$ puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de $15\,000$ puces revient à effectuer un tirage avec remise de $15\,000$ puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.*

(Pondichéry 2015)

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières anné
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3
plémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de**
montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de
(on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu
nombre de clients).
   a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jo
   extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi d
   bilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jo
   extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

(Antilles 2015)

20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur ju
Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supe
fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendue
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus »
lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est s
ment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assim
tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera l
mètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet éch
de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au mil

(Etranger 2016)

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

   a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

   b. Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

   $0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

2.4 corrigés exercices bac 2011 à 2017

Corrigé Polynésie 2011

3.a. soit X le nombre de fois que l'on a obtenu une personne allant au deuxième niveau
Les 3 conditions sont vérifiées :

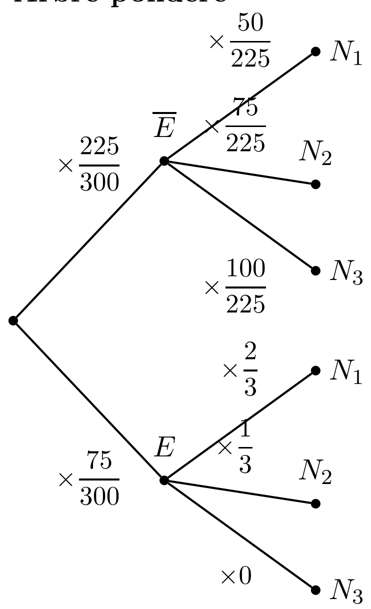
- on répète 20 fois une même expérience aléatoire
- les répétitions sont indépendantes
- deux issues contraires pour chaque expérience : $\begin{cases} \text{succès : de probabilité } p = p(N_2) \\ \text{échec : de proba : } q = 1 - p \end{cases}$

donc,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 20, p = ?)$ avec :

- les valeurs possibles de X sont $\{0, 1, 2, ..., 20\}$
- pour k allant de 0 à 20 $\boxed{p(X = k) = \begin{pmatrix} 20 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{20-k}}$

il reste à déterminer $p = ?$

Arbre pondéré



On a $p(N_2) = p(\overline{E} \cap N_2) + p(E \cap N_2)$

donc $p(N_2) = \dfrac{225}{300} \times \dfrac{75}{225} + \dfrac{75}{300} \times \dfrac{1}{3}$

donc $p(N_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

donc $p = \dfrac{1}{3}$

donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{3}$

3.b. $p(X = 5) = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{3}^5 \times (\dfrac{2}{3})^{15} \simeq 0,146$

avec la calculatrice : 2ND -> DISTR -> binompdf(20, 1/3, 5) donne $\simeq 0,146$

Autres questions :

3.b.2. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 5 personnes qui aillent au deuxième niveau

$p(X \leq 5) = p(X = 0) + p(X = 1) + ... + p(X = 5)$

avec la calculatrice : 2ND -> DISTR -> binomcdf(20, 1/3, 5) donne $p(X \leq 5) \simeq 0,297$

3.b.3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 5 personnes qui aillent au deuxième niveau

$p(X \geq 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + ... + p(X = 20)$

$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4)$

avec la calculatrice : 2ND -> DISTR -> binomcdf(20, 1/3, 4) donne $p(X \leq 4) \simeq 0,152$

$p(X \geq 5) \simeq 1 - 0,152 \simeq 0,848$

3.b.4. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 5 et 10 personnes qui aillent au deuxième niveau

$p(5 \leq X \leq 10) = p(X = 5) + p(X = 6) + ... + p(X = 10)$

$p(5 \leq X \leq 10) = p(X \leq 10) - p(X \leq 4)$

avec la calculatrice : 2ND -> DISTR -> binomcdf(20, 1/3, 15) donne $p(X \leq 10) \simeq 0,962$

avec la calculatrice : 2ND -> DISTR -> binomcdf(20, 1/3, 4) donne $p(X \leq 4) \simeq 0,152$

$p(5 \leq X \leq 10) \simeq 0,962 - 0,152 \simeq 0,81$

c. $E[X] = np = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \simeq 6,6$ **soit 7 personnes vont au deuxième étage en moyenne**

4. X **suit une loi** $B(n, \dfrac{1}{3})$

on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

on cherche n **pour que** $1 - p(X = 0) \geq 0,99$

$1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{3}^0 \times (\dfrac{2}{3})^n \geq 0,99$

$1 - 1 \times 1 \times (\dfrac{2}{3})^n \geq 0,99$

$1 - (\dfrac{2}{3})^n \geq 0,99$

$0,01 \geq (\dfrac{2}{3})^n$

$ln(0,01) \geq ln((\dfrac{2}{3})^n)$

$ln(0,01) \geq nln(\dfrac{2}{3})$

$\dfrac{ln(0,01)}{ln(\dfrac{2}{3})} \leq n$

$11,35 \leq n)$

soit au moins 12 personnes

Amérique du Nord 2012

1. (a) **soit X le nombre de fois que l'on a obtenu une personne adhérente de la section tennis**
Les 3 conditions sont vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet \textbf{ on répète } 4 \textbf{ fois une même expérience aléatoire}\\ \bullet \textbf{ les répétitions sont indépendantes}\\ \bullet \textbf{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l}\textbf{succès : de probabilité } p=0,3\\ \textbf{échec : de proba : } q=1-0,3=0,7\end{array}\right.\end{array}\right.$$

donc,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n=4, p=0,3)$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{les valeurs possibles de } X \textbf{ sont } \{0,1,2,...,4\}\\ \\ \textbf{pour } k \textbf{ allant de } 0 \textbf{ à } 4 \boxed{p(X=k)=\left(\begin{array}{c}4\\k\end{array}\right)0,3^k\times 0,7^{4-k}}\end{array}\right.$$

on a $p(X=2)=\left(\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right)0,3^2\times 0,7^2\simeq 0,2646$

(b) X **suit une loi** $B(n,0,3)$

on cherche n **pour que** $p(X\geq 1)\geq 0,99$

on cherche n **pour que** $1-p(X=0)\geq 0,99$

$1-\left(\begin{array}{c}n\\0\end{array}\right)\times 0,3^0\times(0,7)^n\geq 0,99$

$1-1\times 1\times(0,7)^n\geq 0,99$

$1-0,7^n\geq 0,99$

$0,01\geq 0,7^n$

$ln(0,01)\geq ln(0,7)^n)$

$ln(0,01)\geq nln(0,7)$

$\dfrac{ln(0,01)}{ln(0,7)}\leq n$

$12,91\leq n)$

soit au moins 13 semaines

1. Corrigé Asie 2011

2.5 exercices

exercice 2 :

On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie non équilibrée 50 fois de suite et de manières indépendantes.
On considère que la probabilité de faire "pile" avec cette pièce est $p(pile) = 80\%$
Soit X le nombre de lancers parmi les 50 lancers où l'on a obtenu le résultat "pile"

1. **justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres**
2. **calculer les probabilités**
   (a) **d'obtenir exactement 39 piles**
   (b) **d'obtenir exactement 41 piles**
   (c) **d'obtenir entre 39 et 41 piles**
   (d) **d'obtenir au plus, 2 piles**
   (e) **d'obtenir au moins, 2 piles**
3. **calculer $E(X)$ et interpréter la valeur obtenue**
4. **calculer $\sigma(X)$**
5. **déterminer le nombre minimal de lancers à faire pour que la probabilité d'obtenir au moins un pile dépasse $99,99\%$**

exercice 3 :

Un élève répond au hasard et avec indépendance à chacune des dix questions d'un Q.C.M.
Pour chaque question, il y a trois propositions dont une seule est "bonne"
Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève (chaque question est sur un point)

1. **justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres**
2. **calculer la probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse**
3. **compléter le tableau suivant à 10^{-3} près**

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
$p(X = k)$	0,017		0,195		0,228		0,057	0,016	0,003	0	0	1

4. **quelle est la probabilité que l'élève ait la moyenne ?**
5. **quelle est la probabilité que l'élève n'ait pas la moyenne ?**
6. **calculer $E(X)$ et interpréter cette valeur**
7. **combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99% ?**

exercice 4 :

On s'intéresse, dans cet exercice, à la masse des pots de confitures produits dans une usine. On considère l'événement : « un pot a une masse inférieure à 490 grammes ». Une étude a permis d'admettre que la probabilité de cet événement est $0,2$.

1. **On prélève au hasard 20 pots dans la production totale.**
   On suppose que le nombre de pots est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pots avec indépendance.
   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 20 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.
   (a) **expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.**
   (b) **calculer la probabilité de l'événement A « parmi les 20 pots, il y a exactement 2 pots de masse inférieure à 490 grammes ».**
   (c) **calculer la probabilité qu'il y ait entre 1 et 3 pots de masses inférieures à 490 grammes.**
   (d) **calculer la probabilité qu'il y ait au moins un pot de masse inférieure à 490 grammes.**
2. **Combien de pots faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot dont la masse est inférieure à 490 grammes soit d'au moins 99% ?**

exercice 5 :

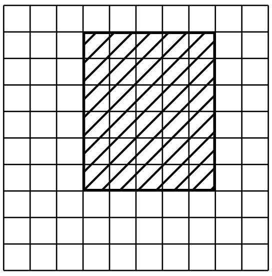
Un garagiste choisit douze pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de douze pneus à un tirage avec remise de douze pneus. On sait que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de douze pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

1. **Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.**
2. **Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4}.**
3. **Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4}.**
4. **est-il vrai que s'il change les 4 pneus d'une voiture, alors, il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un des pneus ait un défaut ? (justifier)**

exercice 6 :

un jeu consiste à lancer une fléchette n fois dans la cible ci dessous



il faut payer 5€ pour jouer
si une personne tire au hasard dans cette cible,
on suppose que chacun des petits carrés a la même probabilité d'être atteint et que la fléchette atteint toujours un carré de la cible, on suppose de plus que les tirs sont indépendants
chaque tir dans un carré hachuré rapporte 1€ (0 sinon)

Soit X le nombre de fois que l'on gagne un euro pour une série de n lancers au hasard

1. **quelles sont les valeurs possibles pour X ?**
2. **quelle est la loi de probabilité de X ? *(justifier)***
3. (a) **quelle est la probabilité de recevoir 5€ pour 5 lancers ?**
   (b) **combien reçoit t-on en moyenne pour 5 lancers ?**
   (c) **quel est le gain moyen *(recette - coût)* pour 5 lancers ?**
4. (a) **combien faut-il de lancers au hasard au minimum pour que le gain moyen soit positif ?**
   (b) **pour une série de 17 lancers au hasard, quelle est la probabilité que le gain soit positif strict ? (à 1% près)**
5. (a) **combien faut-il faire de lancers au hasard pour être sur à 99% de recevoir au moins 1 € ?**
   (b) **quel est alors le gain moyen ?**

exercice 7 :

une personne ayant trop bu fait indépendamment ou bien un pas *(de 50cm)* en avant ou bien un pas *(de 50cm)* en arrière avec une même probabilité

1. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il soit à sont point de départ ?**
2. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il ait avancé de 5 m ?**
3. **ou se trouvent-il en moyenne après 10 pas ?**

exercice 8 :
combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée de manières indépendantes pour être pratiquement certain *(à 99,9%)* de faire au moins une fois pile ?

1. **quelle loi suit la variable aléatoire X égal au nombre de piles parmi les n lancers ?**
2. **déterminer n pour que $p(X \geq 1) \geq 99,9\%$**
3. **conclure**

exercice 9 : *(chevalier de Méré : 50 page 339)*
Lequel des deux événements est le plus probable ? :
"obtenir au moins un six en lançant un dé cubique quatre fois"
"obtenir au moins un double six en lançant deux dés vingt-quatre fois" ?

exercice 10 :

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores.
On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert.
On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps et rouge ou orange un tiers du temps.
On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. **Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.**
2. **Quelle est la probabilité que l' automobiliste ait :**
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?
3. **Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer ?**

exercice 11 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n = 100; p = 0,5)$

1. **Inventer un énoncé dans un contexte**
2. **Déterminer à la calculatrice les probabliités suivante à 0,1% près**
   (a) $p(X = 40)$
   (b) $p(X \leq 40)$
   (c) $p(X \geq 40)$
   (d) $p(X < 60)$
   (e) $p(40 \leq X \leq 60)$
   (f) $p(40 < X < 60)$

2.6 corrigés exercices

corrigé exercice 2 :

1. $\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 50 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } 0,8 \\ \text{échec : } q = 1-0,8 = 0,2 \end{cases} \end{cases}$

   alors,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 50, p = 0,8)$

   avec : $\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0,1,2,...,50\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{50}^{k} \times 0,8^{k} \times 0,2^{50-k}} \end{cases}$

2. **probabilités**

   (a) **d'obtenir exactement 39 piles :**

   $p(X = 39) = C_{50}^{39} \times 0,8^{39} \times 0,2^{11} \simeq \boxed{0,127}$

   (b) **d'obtenir exactement 41 :**

   $p(X = 41) = C_{50}^{41} \times 0,8^{41} \times 0,2^{9} \simeq \boxed{0,136}$

   (c) **d'obtenir entre 39 et 41 piles :**

   $p(39 \leq X \leq 41) = p(X = 39) + p(X = 40) + p(X = 41)$

   $p(39 \leq X \leq 41) = p(X = 39) + p(X = 40) + p(X = 41) \simeq 0,127 + 0,140 + 0,136 \simeq \boxed{0,403}$

   (d) **d'obtenir au plus, 2 piles**

   $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \simeq 0 + 0 + 0 \simeq \boxed{0}$

   (e) **d'obtenir au moins, 2 piles**

   $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 50)$ ***(on passe au contraire)***

   $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$

   $p(X \geq 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$

   $p(X \geq 2) \simeq 1 - (0 + 0)$

   $p(X \geq 2) \simeq \boxed{1}$

3. $E(X) = n \times p = 50 \times 0,8 \ \boxed{40}$

   Sur les 50 lancers, en moyenne, on obtient 40 piles

4. $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

5. **soit** n **le nombre minimal de lancers à faire pour que la probabilité d'obtenir au moins un pile dépasse** $99,99\%$

   on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,9999$

   or

   $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

   $p(X \geq 1) = 1 - C_n^0 \times 0,8^0 \times 0,2^n$

   $p(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times 0,2^n$

   $p(X \geq 1) = 1 - 0,2^n$

   il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

   $1 - 0,2^n \geq 0,9999$

   $1 - 0,9999 \geq 0,2^n$

   $0,0001 \geq 0,2^n$

   $\ln(0,0001) \geq \ln(0,2^n)$

   $\ln(0,0001) \geq n\ln(0,2)$

   $\dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(0,2)} \leq n$

   $n \geq 5,72$

   soit $\boxed{\textbf{au moins } 6 \textbf{ lancers}}$

corrigé exercice 3 :

1. $\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 10 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } \frac{1}{3} \\ \text{échec : } q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 10, p = \frac{1}{3})$

avec : $\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., 10\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{10}^{k} \times (\frac{1}{3})^{k} \times (\frac{2}{3})^{10-k}} \end{cases}$

2. **probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse**

$p(X = 1) = C_{10}^{1} \times (\frac{1}{3})^{1} \times (\frac{2}{3})^{9} \simeq \boxed{0,09}$

3. **compléter le tableau suivant à 10^{-3} près**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**total**
$p(X = k)$	**0,017**	0,087	**0,195**	0,260	**0,228**	0,137	**0,057**	**0,016**	**0,003**	**0**	**0**	**1**

4. **probabilité que l'élève ait la moyenne ?**
$p(X \geq 5) \simeq 0,1337 + 0,057 + 0,016 + 0,003 \simeq \boxed{0,21}$

5. **probabilité que l'élève n'ait pas la moyenne**
$p(X < 5) \simeq 1 - 0,21 \simeq \boxed{0,79}$

6. $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{3} \simeq \boxed{3,33}$
soit $\boxed{3,3 \textbf{ points en moyenne}}$

7. **combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99% ?**
on cherche n pour que $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - (\frac{2}{3})^{n}$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - (\frac{2}{3})^{n} \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq (\frac{2}{3})^{n}$

$0,01 \geq (\frac{2}{3})^{n}$

$ln(0,01) \geq ln((\frac{2}{3})^{n})$

$ln(0,01) \geq n \times ln((\frac{2}{3}))$

$\frac{\ln(0,01)}{\ln(\frac{2}{3})} \leq n$

$n \geq 11,35$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins } 12}$

corrigé exercice 4 :

1.(a) $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } 20 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } 0,2 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,2 = 0,8 \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 20, p = 0,2)$

avec : $\left\{\begin{array}{l} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., 20\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{20}^{k} \times 0,2^{k} \times 0,8^{20-k}} \end{array}\right.$

(b) $p(X = 2) = C_{20}^{2} \times 0,2^{2} \times 0,8^{20-2} \simeq \boxed{0,137}$

(c) $p(1 \leq X \leq 3) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) \simeq 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 \simeq \boxed{0,3999}$

(d) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_{20}^{0} \times 0,2^{0} \times 0,8^{20-0} = 1 - 0,8^{20} \simeq \boxed{0,988}$

2. **on cherche** n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - 0,8^{n}$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,8^{n} \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq 0,8^{n}$

$0,01 \geq 0,8^{n}$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \leq n$

$n \geq 20,63$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins } 21}$

corrigé exercice 5 :

1. $\left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ on répète } 12 \text{ fois une même expérience aléatoire}\\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes}\\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l}\text{succès : de probabilité } 0,065\\ \text{échec : } q = 1 - 0,065 = 0,935\end{array}\right.\end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 12, p = 0,065)$

avec : $\left\{\begin{array}{l}\text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0,1,2,...,12\}\\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{12}^{k} \times 0,065^{k} \times 0,935^{12-k}}\end{array}\right.$

2. $p(X = 0) = C_{12}^{0} \times 0,065^{0} \times 0,935^{12-0} \simeq \boxed{0,4464}$

3. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \simeq 0,4464 + 0,3724 + 0,1424 \simeq \boxed{0,9612}$

4. $\left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ on répète } 4 \text{ fois une même expérience aléatoire}\\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes}\\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l}\text{succès : de probabilité } 0,065\\ \text{échec : } q = 1 - 0,065 = 0,935\end{array}\right.\end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 4, p = 0,065)$

avec : $\left\{\begin{array}{l}\text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0,1,2,3,4\}\\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{4}^{k} \times 0,065^{k} \times 0,935^{4-k}}\end{array}\right.$

$p(X \geq 1) = 1 - C_{4}^{0} \times 0,065^{0} \times 0,935^{4-0} = 1 - 0,935^{4} \simeq \boxed{0,2357}$

ce qui est inférieur à $0,5$ **la réponse est donc** $faux$

corrigé exercice 6 :

1. **valeurs possibles pour X :** $\boxed{X \in \{0, 1, 2, ..., n\}}$

2. $\begin{cases} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } \dfrac{30}{100} = 0,3 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,3 = 0,7 \end{cases} \end{cases}$

   alors,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n, p = 0,3)$

3. (a) **probabilité de recevoir 5€ pour 5 lancers :**

   X **suit une loi** $B(n = 5, p = 0,3)$
   donc
   $p(X = 5) = C_5^5 \times 0,3^5 \times 0,7^0 \simeq \boxed{0,00243}$

   (b) **combien reçoit t-on en moyenne pour 5 lancers ? :**
   $E(X) = np = 5 \times 0,3 = \boxed{1,5 \text{ €}}$

   (c) **quel est le gain moyen *(recette - coût)* pour 5 lancers ?**
   $G = 1,5 - 5 = \boxed{-3,5 \text{ €}}$

4. (a) **combien faut-il de lancers au hasard au minimum pour que le gain moyen soit positif ?**
   on cherche n pour que $G > 0$
   $n \times 0,3 - 5 > 0$
   $\iff n > \dfrac{5}{0,3} (\simeq 16,66)$
   soit au moins $\boxed{\text{17 lancers}}$

   (b) **pour une série de 17 lancers au hasard, quelle est la probabilité que le gain soit positif strict ? (à 1% près)**
   $G > 0 \iff X > 5$

   $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5)$

   $p(X > 5) = 1 - [p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5)]$

   $p(X > 5) \simeq 1 - [0,00233 + 0,0169 + 0,0581 + 0,1245 + 0,1868 + 0,2081]$

   $p(X > 5) \simeq 1 - 0,5967 \simeq \boxed{0,4033}$

5. (a) **combien faut-il faire de lancers au hasard pour être sur à** 99% **de recevoir au moins 1 € ?**

on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_n^0 \times 0,3^0 \times 0,7^n$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,7^n \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq 0,7^n$

$0,01 \geq 0,7^n$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \leq n$

$n \geq 12,9$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins 13 lancers}}$

(b) **quel est alors le gain moyen ?**

$np - 5 \geq 13 \times 0,3 - 5$

$np - 5 \geq -1,1$

le gain est d'au moins $\boxed{-1,1 \text{ €}}$

corrigé exercice 7 :

une personne ayant trop bu fait indépendamment ou bien un pas *(de 50cm)* en avant ou bien un pas *(de 50cm)* en arrière avec une même probabilité

1. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il soit à sont point de départ ?**

   soit X le nombre de pas en avant effectués après 10 pas

   $$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 10 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } 0,5 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,5 = 0,5 \end{cases} \end{cases}$$

   alors,

   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 10, p = 0,5)$

   $p(X = 5) = C_{10}^{5} \times 0,5^5 \times 0,5^5 \simeq \boxed{0,246}$

2. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il ait avancé de 5 m ?**

   $p(X = 10) = C_{10}^{10} \times 0,5^{10} \times 0,5^0 \simeq \boxed{0,001}$

3. **ou se trouvent-il en moyenne après 10 pas ?**

   $E(X) = np = 10 \times 0,5 = 5$

   il fait donc en moyenne 5 pas en avant,

   donc 5 pas en arrière,

   il est donc $\boxed{\text{au point de départ}}$

corrigé exercice 8 :

combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée de manières indépendantes pour être pratiquement certain *(à 99,9%)* de faire au moins une fois pile ?

1. **quelle loi suit la variable aléatoire X égal au nombre de piles parmi les n lancers ?**
2. **déterminer n pour que $p(X \geq 1) \geq 99,9\%$**
3. **conclure**

corrigé exercice 9 : *(chevalier de Méré : 50 page 339)*

Lequel des deux événements est le plus probable ? :
"obtenir au moins un six en lançant un dé cubique quatre fois"
"obtenir au moins un double six en lançant deux dés vingt-quatre fois" ?

corrigé exercice 10 :

2.7 évaluation

nom : ... **évaluation**

1. **on lance 4 fois avec indépendance, une pièce de monnaie non équilibrée avec p(pile) = 0,7 soit X le nombre de fois que l'on obtient pile parmi les 4 lancers**

   (a) **donner l'ensemble des valeurs possibles pour X ? : ...**

   (b) **quelle est la loi de probabilité suivie par X** ***(justifier pourquoi)*** **et préciser ses paramètres ?**

   (c) **rappeler la formule** $p(X = k)$ **où** $X \sim B(n;p)$ **:**

   $p(X = k) = ...$

   (d) **calculer** $p(X = 0)$, $p(X = 1)$, $p(X = 2)$, $p(X = 3)$ **et** $p(X = 4)$ **à 1% près** ***(détailler pour*** $p(X = 2)$***)***

   (e) **quelle est la valeur la plus probable pour X ? : ...**

   (f) **quelle est la probabilité de faire au moins 2 piles avec cette pièce ? :**

   (g) **combien fait-on de piles en moyenne ? :**

   (h) **combien de fois faudrait-il lancer cette pièce pour que la probabilité de faire au moins un pile dépasse** $99,999\%$ **?**

2.8 corrigé évaluation

corrigé évaluation

1. **on lance 4 fois avec indépendance, une pièce de monnaie non équilibrée avec p(pile) $=$ 0,7 soit X le nombre de fois que l'on obtient pile parmi les 4 lancers**

   (a) **Valeurs possibles pour X :** $\boxed{X \in \{0;1;2;3;4\}}$

   (b) **quelle est la loi de probabilité suivie par X *(justifier pourquoi)* et préciser ses paramètres ?**

   $$\boxed{\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 4 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } p = 0,7 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,7 = 0,3 \end{cases} \end{cases}}$$

   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une $\boxed{\text{loi binomiale}}$ **de paramètres** $\boxed{(n = 4, p = 0,7)}$

   (c) **formule $p(X = k)$ où $X \sim B(n;p)$:**

   $\boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$

   (d) **à 1% près grâce à la calculatrice :**

   $\boxed{p(X = 0) \simeq 1\%}$, $\boxed{p(X = 1) \simeq 8\%}$, $\boxed{p(X = 2) \simeq 26\%}$, $\boxed{p(X = 3) \simeq 41\%}$ **et** $\boxed{p(X = 4) \simeq 24\%}$

   Détail d'un calcul : $\boxed{p(X = 2) = C_4^2 \times 0,7^2 \times (1 - 0,7)^{4-2} \simeq 26\%}$

   (e) **la valeur la plus probable pour X est** $\boxed{x = 3 \textbf{ avec } 41\%}$

   (f) **probabilité de faire au moins 2 piles avec cette pièce ? :**

   $\boxed{p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) \simeq 91\%}$

   (g) **combien fait-on de piles en moyenne ? :** $\boxed{E(X) = np = 4 \times 0,7 = 2,8}$
   soit $\boxed{2,8}$ **piles en moyenne**

   (h) **combien de fois faudrait-il lancer cette pièce pour que la probabilité de faire au moins un pile dépasse $99,999\%$?**

   On cherche les valeurs de n telles que : $\boxed{p(X \geq 1) \geq 0,99999}$

   $1 - p(X = 0) \geq 0,99999$

   $1 - C_n^0 \times 0,7^0 \times (1 - 0,7)^n \geq 0,99999$

   $1 - 1 \times 1 \times 0,3^n \geq 0,99999$

   $1 - 0,3^n \geq 0,99999$

n	**9**	**10**
$1 - 0,3^n$	$\simeq 0,99998$	$\simeq 0,999994$
comparaison à $0,99999$	$< 0,99999$	$> 0,99999$

   il faut donc $\boxed{\text{un minimum de 10 lancers}}$

2.9 évaluation

nom, prénom : ... **évaluation**

Exercice 1 : Q.C.M.

(recopier le numéro de la question et la ou les bonnes réponses sur la copie)
(-0,5 si faux ; 0 sans réponse ; 1 si bon)

1. C_{12}^{4} **est égal à :**

950	3	48	495	11880	**non défini**

2. C_{1}^{10} **est égal à :**

10	1	0	11	9	**non défini**

3. **soit** n **un nombre entier ,** C_{n}^{1} **est égal à :**

0	1	n	$n-1$	**on ne peut pas savoir**	**non défini**

4. **si** X **suit une loi binomiale** $B(10;0,8)$ **alors :**

$p(X=8)=C_{8}^{10}\times 0,8^{8}\times 0,8^{10-8}$	$p(X=8)=C_{10}^{8}\times 0,8^{8}\times (1-0,2)^{10-8}$
$p(X=8)=45\times 0,8^{8}\times 0,2^{2}$	$p(X=8)=C_{10}^{8}\times 0,8^{8}\times 0,2^{8-10}$

5. **si** X **suit une loi binomiale** $B(n;p)$ **alors pour tout entier** k **avec** $0\leq k\leq n$ **on a :**

$p(X=k)=C_{k}^{n}p^{k}(1-p)^{k-n}$	$p(X=k)=C_{k}^{n}p^{k}(1-p)^{n-k}$	$p(X=n)=C_{n}^{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$
$p(X=k)=C_{n}^{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$	$p(X=k)=C_{n}^{k}p^{k}(p-1)^{n-k}$	$p(X=0)=(1-p)^{n}$

6. **si** X **suit une loi binomiale** $B(100;0,25)$ **alors :**

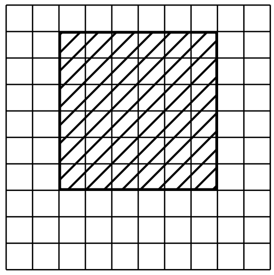
$E(X)=5$	$E(X)=25$	$E(X)=100$	$\sigma(X)=25$	$\sigma(X)=5$	$\sigma(X)=2,5$

Exercice 2 :
dans une entreprise, chaque jour, la probabilité qu'une personne quelconque soit absente est estimée à 10%**.**
un logiciel tire au hasard et avec indépendance 50 **noms dans la liste du personnel et consigne sur une "feuille bilan" le nom ainsi que l'annotation "absent" si la personne est absente.**
Soit X **le nombre de fois que le mot "absent" apparaît sur la feuille bilan à l'issue des** 50 **tirages.**

1. **justifier que** X **suit une loi binomiale et donner ses paramètres**
2. **calculer les probabilités à** 10^{-3} **près en détaillant les calculs**
   (a) $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$ **et** $p(X=3)$ ***(remarque :*** $C_{50}^{0}=1$***)***
   (b) **d'obtenir entre** 1 **et** 3 **fois le mot "absent"**
   (c) **d'obtenir strictement moins de** 3 **fois le mot "absent"**
   (d) $p(X\geq 4)$ **et interpréter la valeur dans le contexte**
3. **calculer** $E(X)$ **et interpréter la valeur obtenue dans le contexte**
4. **combien faudrait-il de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois le môt "absent" dépasse 99,99% ?**

Exercice 3 :

un jeu consiste à lancer une fléchette n fois dans la cible ci dessous

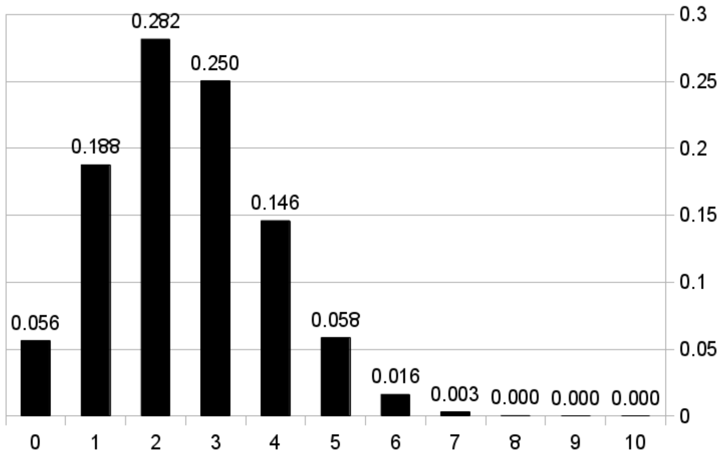


il faut payer 2 € pour jouer
si une personne tire au hasard dans cette cible,
on suppose que chacun des petits carrés a la même probabilité d'être atteint et que la fléchette atteint toujours un carré de la cible, on suppose de plus que les tirs sont indépendants
chaque tir dans un carré hachuré rapporte 1€ (0 sinon)
Soit X le nombre de fois que l'on gagne un euro pour la série de n lancers au hasard

1. on considère une série de $n = 10$ lancers
   (a) préciser au maximum la loi de probabilité de X ? *(ne pas justifier)*
   (b) i. quelle est la probabilité de recevoir exactement 3 € ?
       ii. combien reçoit t-on en moyenne pour les 10 lancers ?
       iii. le jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ? *(justifier)*

Exercice 4 :
Un étudiant E choisit de répondre au hasard à un Q.C.M. d'examen
Le Q.C.M. est constitué de 10 questions avec pour chacune 4 propositions de réponses dont une seule est bonne
Une bonne réponse rapporte un point (0 si la réponse est mauvaise)
Soit X le nombre de points obtenu par le candidat

1. justifier que pour chacune des questions, la probabilité que E ait un point est de 25%
2. quelle est loi de probabilité de X (préciser son nom et ses paramètres ainsi que les valeurs possibles pour X) sans justifier
3. on donne ci dessous l'histogramme correspondant à la loi de probabilité de X



   (a) donner sans calcul la probabilité que E obtienne exactement 5 points (arrondi à 1%)
   (b) déterminer la probabilité que E obtienne au moins 5 points (arrondi à 1%)
   (c) déterminer la probabilité que E obtienne strictement moins de 5 points (à 1%)
   (d) est-il fort probable d'avoir au moins la moyenne au Q.C.M. si on répond au hasard ? (justifier)
   (e) calculer E(X) et en déduire combien on obtient en moyenne en répondant au hasard
   (f) retrouver par le calcul le résultat de la question 3.a.

2.10 corrigé évaluation

corrigé évaluation

Exercice 1 : Q.C.M.

1. **C_{12}^4 est égal à :** $\boxed{495}$
2. **C_1^{10} est égal à :** $\boxed{\text{non défini}}$
3. **soit n un nombre entier , C_n^1 est égal à :** $\boxed{n}$
4. **si X suit une loi binomiale $B(10; 0,8)$ alors :** $\boxed{p(X=8) = 45 \times 0,8^8 \times 0,2^2}$
5. **si X suit une loi binomiale $B(n;p)$ alors pour tout entier k avec $0 \leq k \leq n$ on a :** $\boxed{p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ **et** $\boxed{p(X=0) = (1-p)^n}$
6. **si X suit une loi binomiale $B(100; 0,25)$ alors :** $\boxed{E(X) = 25}$

Exercice 2 :

1.
   - **on répète 50 fois une même expérience aléatoire**
   - **les répétitions sont indépendantes**
   - **deux issues contraires pour chaque expérience :** $\begin{cases} \text{succès : de probabilité } p = 0,1 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,1 = 0,9 \end{cases}$

   alors,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 50, p = 0,1)$

2. **calculer les probabilités à 10^{-3} près**

   (a) $p(X=0) = C_{50}^0 \times 0,1^0 \times 0,9^{50} \simeq \boxed{0,005}$
   $p(X=1) = C_{50}^1 \times 0,1^1 \times 0,9^{49} \simeq \boxed{0,029}$
   $p(X=2) = C_{50}^2 \times 0,1^2 \times 0,9^{48} \simeq \boxed{0,078}$
   $p(X=3) = C_{50}^3 \times 0,1^3 \times 0,9^{47} \simeq \boxed{0,139}$

   (b) $p(1 \leq X \leq 3) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) \simeq 0,0291 + 0,078 + 0,139 \simeq \boxed{0,246}$

   (c) $p(X < 3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \simeq 0,005 + 0,029 + 0.078 \simeq \boxed{0,112}$

   (d) $p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \simeq 1 - (0,005 + 0,029 + 0,078 + 0,139) \simeq \boxed{0,888}$
   la probabilité d'obtenir au moins 4 fois le mot "absent" est d'environs $88,8\%$

3. $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1\ \boxed{5}$
   en moyenne, on obtient 5 fois le mot "absent"

Exercice 3 :

1. (a) X **suit une loi binomiale** $B(n = 10; p = \dfrac{36}{100} = 0,36)$

   (b) i. $p(X=3) = C_{10}^3 \times 0,36^3 \times 0,64^{10-3} \simeq \boxed{0,25}$

   ii. $E(X) = n \times p = 10 \times 0,36 = \boxed{3,6}$

   iii. **le jeu est à l'avantage du joueur car le gain moyen du joueur est** $3,6 - 2 = \boxed{1,6}$

Exercice 4 :

1. $p = \dfrac{1}{4} = 0,25 = \boxed{25\%}$
2. X **suit une loi binomiale** $\boxed{B(n = 10; p = 0,25)}$

   (a) $p(X=5) = 0,058 \simeq \boxed{6\%}$

   (b) $p(X \geq 5) = 1 - (0,056 + 0,188 + 0,282 + 0,25 + 0,146) = 0,078 \simeq \boxed{8\%}$

   (c) $p(X < 5) = 0,056 + 0,188 + 0,282 + 0,25 + 0,146 = 0,922 \simeq \boxed{92\%}$

   (d) **non, cela se produit avec une probabilité de** $\simeq \boxed{8\%}$

   (e) $E(X) = np = 10 \times 0,25 = \boxed{2,5 \text{ points en moyenne}}$

   (f) $p(X=5) = C_{10}^5 \times 0,25^5 \times 0,75^{10-5} \simeq \boxed{0,058}$

2.11 travaux pratiques

2.11.1 tp1 : calculatrice et tableur

TP : $\boxed{\text{LOI BINOMIALE}}$

1. **Généralités**

   (a) **Dans quelles situations sommes nous en présence d'une loi binomiale ?**

   Si les $\underbrace{...\quad}_{combien?}$ conditions suivantes sont réunies :

   - **on répète un certain nombre n de fois une même expérience $\underbrace{...\qquad\quad}_{au\ hasard}$**
   - **les n ... aléatoires sont $\underbrace{...\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{ne\ dépendent\ pas\ les\ unes\ des\ autres}$**
   - **pour chaque expérience, $\underbrace{...\quad}_{combien?}$ issues contraires :** $\begin{cases} \textbf{succès : de probabilité } p \\ \textbf{... : de probabilité : } q = 1 - p \end{cases}$

   alors la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès parmi les n expériences suit une $\underbrace{...\qquad\quad}_{voir\ titre}$ de paramètres (n, p) avec :

   - **les valeurs possibles de X sont $\{0, 1, 2, ..., n\}$**
   - **pour k allant de 0 à n** $\boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$

   de plus,
   la valeur moyenne (espérance) de X est $\boxed{E(X) = np}$ et l'écart type est $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$

   le nombre noté C_n^k ou encore $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est appelé "coefficient binomial" et est obtenu à la calculatrice ou avec un ordinateur

   (b) **Exemple**

   soit X le nombre de fois que l'on a obtenu une Reine pour 4 tirages indépendants avec remise dans un jeu de 32 cartes.
   Les ... conditions sont vérifiées :

   - **on répète ... fois une même ...**
   - **les ... sont ...**
   - **... issues ... pour chaque expérience :** $\begin{cases} \textbf{succès : de probabilité : } p = ... \\ \textbf{échec : de proba : } q = ... \end{cases}$

   donc,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = ... \quad , p = ... \quad)$ avec :

   - **les valeurs possibles de X sont $\{0, ...$**
   - **pour k allant de 0 à 4** $\boxed{p(X = k) = C_4^k (\frac{4}{32})^k (\frac{28}{32})^{4-k}}$

   utiliser la calculatrice du site : "calculjavascript.free.fr " pour compléter le tableau suivant suivant à 10^{-3} près : (menu -> probas -> Bino(k,n,p) -> remplacer k, n et p par les valeurs qu'il faut)

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**total**
$p(X = k)$	$\simeq$ **0,586**	$\simeq$	$\simeq$	$\simeq$	$\simeq$	

   retrouver le tableau complet avec :
   (menu -> tb val -> binomiale -> simple -> remplacer n et p par les valeurs qu'il faut)

   la probabilité d'obtenir 0 fois une reine sur les 4 lancers est de ... %
   la probabilité d'obtenir exactement 1 fois une reine sur les 4 lancers est de ... %

   la valeur moyenne de X est $E(X) = np = ... \quad \times ... \quad =$ ...

   pour une série de ... lancers on obtient en moyenne "... fois la Reine"

   l'écart type est : $\sigma = \sqrt{npq} = ...$

2. **Applications**

(a) **Utilisation du tableur pour compléter un tableau de valeurs d'une loi binomiale**

i. **pour l'exemple précédent où l'on tire au hasard 4 cartes et où l'on s'intéresse au nombre X de fois que l'on obtient une reine**

A. **ouvrir une feuille de calcul type tableur (excel) et la sauvegarder dans votre dossier "math" sous le nom "loi_binomiale"**

B. **recopier le tableau ci dessous**

	A	B	C	D	E	F	G
1	valeur de k	0	1	2	3	4	total
2	valeur de p(X=k)						

C. **entrer dans la cellule $B2$ la formule suivante : = LOI.BINOMIALE(B1 ;n ;p ;FAUX) en remplaçant n et p par les valeur qu'il faut puis tirer cette formule vers la droite jusqu'à F2**

D. **entrer la formule qu'il faut dans $G2$ et l'écrire ci contre : ...**

E. **retrouve t-on les valeur obtenues précédemment ? : ...**

F. **obtenir un histogramme des valeurs des probabilités avec affichage des étiquettes des valeurs des probabilités**
(insertion -> graphique-> terminer -> clic droit sur la zone de graphique -> données sources -> séries -> ajouter -> sélectionner les étiquettes des abscisses (0 à 4) -> sélectionner les valeurs (probas)-> ok -> clic droit sur la zone de graphique -> options du graphique -> étiquettes de données -> afficher la valeur)

ii. **soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1/2$**

A. **ouvrir un nouvel onglet dans la feuille de calcul précédente et construire un tableau (semblable au précédent) qui contient les valeurs possibles de X ainsi que les probabilités associées et compléter les valeurs ci dessous à 0,01 près**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	k	0	1	2	3	4							total
2	p(X=k)												

B. **quelle formule avez vous entré en $B2$? : ...**

C. **obtenir un histogramme des valeurs des probabilités avec affichage des étiquettes des valeurs des probabilités**

D. **retrouver le tableau de valeurs avec la calculatrice du site**

E. **quelle est la valeur de X la plus probable ? : $X = ...$**
avec quelle probabilité ? : ...

F. **pour chacun de ses 10 employés un chef d'entreprise tir à pile ou face le fait qu'il ait une prime de fin de mois ce mois ci,**

— **quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 4 employés à avoir une prime ? (à 1% près) : ...**

— **quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 5 employés à avoir une prime ? (à 1% près) : ...**

— **quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 5 employés à avoir une prime ? (à 1% près) : ...**

— **combien d'employés touchent la prime en moyenne ? (calculer $E[X] = np$) : ...**

— **si la prime est de 100 €, combien le patron doit-il débourser en moyenne ? : ...**

2.11.2 tp2 : programme calculatrice

Algorithme et loi binomiale

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$
On veut obtenir la valeur de la probabilité suivante : $p(X = k) = C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}$
quand on entre les valeurs de n, p et k

1. **algorithme et programmes :**
   (a) **compléter l'algorithme suivant**

algorithme

Début
$//$**Variables**
    n, p, k, r
$//$**Entrées**
    demander à l'utilisateur la valeur de ...
    demander à l'utilisateur la valeur de ...
    demander à l'utilisateur la valeur de ...
$//$**Initialisations**
$//$**Traitements**
    affecter à ... la valeur ...
$//$**Sortie**
    afficher ...
Fin

   (b) **recopier un des programmes suivants dans votre calculatrice**

programme pour TI
disp "N" **input N** **disp "P"** **input P** **disp "K"** **input K** $NnCrK * P \wedge K * (1-P) \wedge (N-K) \longrightarrow R$ **disp "p(K)"** **disp R**

programme pour CASIO
"N" : ? → N **"P" : ? → P** **"K" : ? → K** $NCK \times P \wedge K \times (1-P) \wedge (N-K) \longrightarrow R$ **"P(K)"** **R ▲**

2. **utiliser le programme de la calculatrice pour déterminer les réponses aux questions suivantes**
   (a) **X suit une loi binomiale $B(2; 0,5)$**
      i. **calculer $p(X = 0) = ...$**
      ii. **calculer $p(X = 1) = ...$**
      iii. **calculer $p(X = 2) = ...$**
      iv. **calculer $p(X = 3) = ...$**

   (b) **on lance 10 fois de suite un dé équilibré à 6 faces** (on suppose l'indépendance des lancers)
   X est le nombre de fois que l'on a obtenu le score 6
      i. **préciser la loi de probabilité suivie par X ? : ...**
      ii. **calculer la probabilité d'obtenir 10 fois le score 6 : ...**
      iii. **calculer la probabilité d'obtenir 0 fois le score 6 : ...**
      iv. **quel est le "nombre de fois 6" le plus probable ? : ...**
      quelle est sa probabilité ? : ...
      v. **combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir 0 fois le score 6 passe en dessous de 1% ? : ...**

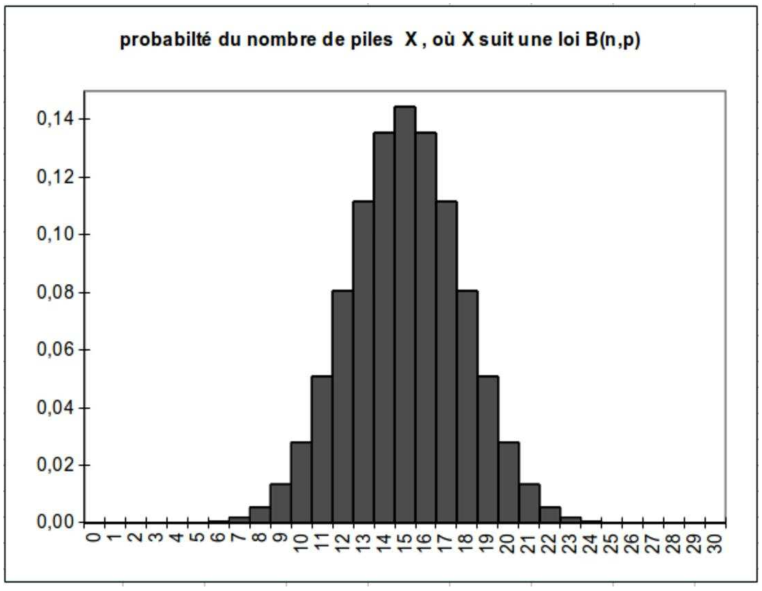
   (c) **combien de fois lancer une pièce de monnaie équilibrée pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile" dépasse $99,9\%$? : ...**

3 échantillonnage

3.1 activité

3.1.1 activité 1 : Comment déterminer si une pièce de monnaie est bien équilibrée ?

1. **on fait l'hypothèse que : "la pièce est bien équilibrée",**
   en déduire la probabilité p de faire pile
2. **si on fait 30 lancers indépendants et que l'on compte le nombre de succès X, que dire de X ?** ***(valeurs, loi)***
3. **un tableur donne le diagramme en bâtons et le tableau de valeurs de $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$**



k	p(x =k)	p(x<=k)
0	9,3E-10	9,3E-010
1	2,8E-08	2,9E-008
2	4,1E-07	4,3E-007
3	3,8E-06	4,2E-006
4	2,6E-05	3,0E-005
5	1,3E-04	0,000162
6	5,5E-04	0,000715
7	1,9E-03	0,002611
8	5,5E-03	0,008062
9	1,3E-02	0,021387
10	2,8E-02	0,049369
11	5,1E-02	0,100244
12	8,1E-02	0,180797
13	1,1E-01	0,292332
14	1,4E-01	0,427768
15	1,4E-01	0,572232
16	1,4E-01	0,707668
17	1,1E-01	0,819203
18	8,1E-02	0,899756
19	5,1E-02	0,950631
20	2,8E-02	0,978613
21	1,3E-02	0,991938
22	5,5E-03	0,997389
23	1,9E-03	0,999285
24	5,5E-04	0,999838
25	1,3E-04	0,99997
26	2,6E-05	0,999996
27	3,8E-06	1
28	4,1E-07	1
29	2,8E-08	1
30	9,3E-10	1

   (a) **sur quelle valeur particulière est centré l'histogramme ?** ***(calculer $E(X)$)***

   (b) **estimer deux intervalles à faibles probabilités pour X et un intervalle à forte probabilité et donner leurs probabilités respectives à 1% près .**

   (c) **déterminer a et b tels que :**
   $$\begin{cases} a \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq a) > 0,025} \\ b \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq b) \geq 0,975} \end{cases}$$

   (d) **en déduire $p(X \in [a; b])$ à 1% et interpréter le résultat**

   (e) **comment appeler un tel intervalle ?**

   (f) **en déduire $p(X \notin [a; b])$ à 1% et interpréter le résultat**

   (g) **soit f la fréquence de succès à l'issue des 30 lancers,**
   à quel intervalle appartiendra f avec une probabilité proche de 95% ?
   comment appeler un tel intervalle ?

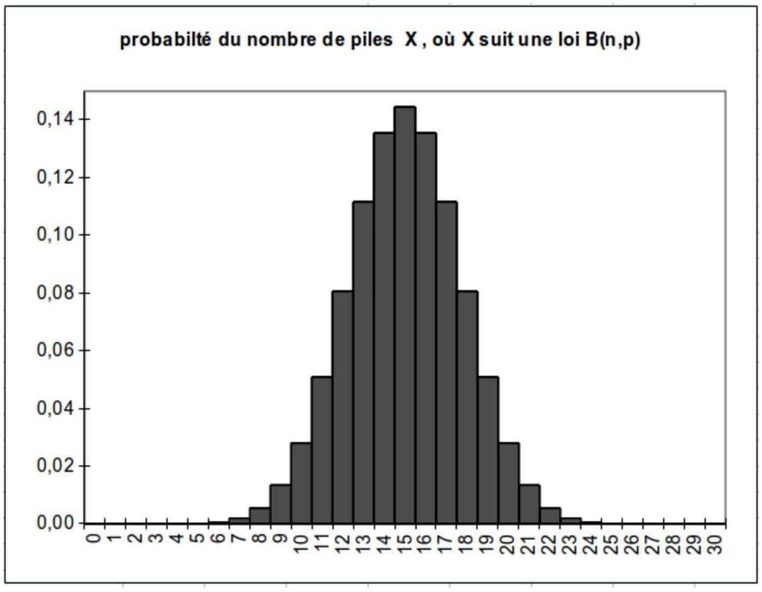
4. **une personne sort une pièce de sa poche et la lance 30 fois et obtient alors 32% de "pile"**

   (a) **que dire de cette pièce ? avec quel risque d'erreur ?**

   (b) **une autre pièce donne 65% de "face"**
   que dire de cette pièce ?

3.1.2 corrigé activité 1 : Comment déterminer si une pièce de monnaie est bien équilibrée ?

1. on fait l'hypothèse que : "la pièce est bien équilibrée",
   on en déduit la probabilité p de faire pile est $\boxed{\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%}$
2. si on fait 30 lancers indépendants et que l'on compte le nombre de succès X, que dire de X ?
   $\boxed{X \in \{0; 1; 2; ...; 30\}}$ et X suit une $\boxed{\text{loi binomiale}}$ de paramètres $\boxed{n = 30 \text{ et } p = 0,5}$
3. un tableur donne le diagramme en bâtons et le tableau de valeurs de $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$



k	p(x =k)	p(x<=k)
0	9,3E-10	9,3E-010
1	2,8E-08	2,9E-008
2	4,1E-07	4,3E-007
3	3,8E-06	4,2E-006
4	2,6E-05	3,0E-005
5	1,3E-04	0,000162
6	5,5E-04	0,000715
7	1,9E-03	0,002611
8	5,5E-03	0,008062
9	1,3E-02	0,021387
10	2,8E-02	0,049369
11	5,1E-02	0,100244
12	8,1E-02	0,180797
13	1,1E-01	0,292332
14	1,4E-01	0,427768
15	1,4E-01	0,572232
16	1,4E-01	0,707668
17	1,1E-01	0,819203
18	8,1E-02	0,899756
19	5,1E-02	0,950631
20	2,8E-02	0,978613
21	1,3E-02	0,991938
22	5,5E-03	0,997389
23	1,9E-03	0,999285
24	5,5E-04	0,999838
25	1,3E-04	0,99997
26	2,6E-05	0,999996
27	3,8E-06	1
28	4,1E-07	1
29	2,8E-08	1
30	9,3E-10	1

(a) sur quelle valeur particulière est centré l'histogramme ?
sur $\boxed{X = 15}$ et $E(X) = np = 30 \times 0,5 = \boxed{15}$

(b) estimer deux intervalles à faibles probabilités pour X et un intervalle à forte probabilité et donner leurs probabilités respectives à 1% près .
$\boxed{p(X \in [0; 5]) = 0,000162}$
$\boxed{p(X \in [25; 30]) = 1 - 0,999838 = 0,000162}$
$\boxed{p(X \in [6; 24]) = 0,999838 - 0,000162 = 0,999676}$

(c) déterminer a et b tels que :
$$\begin{cases} a \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq a) > 0,025} \\ b \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq b) \geq 0,975} \end{cases}$$
$\boxed{a = 10}$ avec $p(X \leq 10) = 0,049$
$\boxed{b = 20}$ avec $p(X \leq 20) = 0,978613$

(d) on en déduit que $p(X \in [a; b]) = p(X \in [10; 20]) = 0,978613 - 0,021387 = 0,957226$ à 1%
ce qui signifie que la probabilité que le nombre de piles soit entre 10 et 20 est d'environs $\boxed{95\%}$

(e) comment appeler un tel intervalle ?
$\boxed{\text{l'intervalle de fluctuations binomial (des effectifs) au seuil de 95\%}}$

(f) on en déduit que $p(X \notin [a; b]) \simeq 5\%$ à 1%
ce qui signifie que la probabilité que le nombre de piles ne soit pas entre 10 et 20 est d'environs $\boxed{5\%}$

(g) soit f la fréquence de succès à l'issue des 30 lancers,
à quel intervalle appartiendra f avec une probabilité proche de 95% ?
$\boxed{f \in [\frac{10}{30} \simeq 33\%; \frac{20}{30} \simeq 67\%]}$ comment appeler un tel intervalle ?

$\boxed{\text{l'intervalle de fluctuations binomial (des fréquences) au seuil de 95\%}}$

4. **une personne sort une pièce de sa poche et la lance 30 fois et obtient alors 32% de "pile"**
   (a) **que dire de cette pièce ? avec quel risque d'erreur ?**
   $32\% \notin [\frac{10}{30} \simeq 33\%; \frac{20}{30} \simeq 67\%]$
   $\boxed{\text{cette pièce peut-être considérée truquée avec un risque d'erreur de 5\%}}$
   (b) **une autre pièce donne 65% de "face"**
   que dire de cette pièce ?
   65% de face donc 35% de pile et $35\% \in [\frac{10}{30} \simeq 33\%; \frac{20}{30} \simeq 67\%]$
   $\boxed{\text{on peut accepter l'hypothèse que la pièce soit équilibrée avec un risque de 5\%}}$

3.2 à retenir

définition 4 *(Intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon une loi binomiale)*

On répète n fois une expérience aléatoire avec indépendance
La probabilité que l'événement A *(succès)* se réalise à l'issue de chaque expérience est p
Soit X le nombre de succès obtenus à l'issue des n expériences
Soit $\boxed{f = \dfrac{X}{n}}$ la proportion succès obtenus à l'issue des n expériences
si $\boxed{n \geq 30\,;\ np \geq 5 \text{ et } n(1-p) \geq 5}$ (ou $\boxed{n \geq 30; \dfrac{1}{6} \leq p \leq \dfrac{5}{6}}$)
alors $\boxed{f \text{ est dans l'intervalle } \boxed{I = [\ \dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\ ]} \text{ avec une probabilité de } 95\%}$

où $\begin{cases} a \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq a) > 0,025} \\ b \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq b) \geq 0,975} \end{cases}$

Remarques :

1. **f n'est pas dans l'intervalle $I = [\ \dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\ ]$ avec une probabilité de 5%**
2. **l'intervalle ci dessus est appelé $\boxed{\text{intervalle de fluctuations à 95\% selon la loi binomiale}}$**
3. **on détermine a et b à l'aide de la calculatrice *(ou d'un logiciel)* par la lecture des probabilités cumulées croissantes.**

Exemple :

1. **100 lancers indépendants d'un dé à 6 faces équilibré *(succès = 6, $n = 100$, $p = \dfrac{1}{6}$)***
$\begin{cases} n \geq 30 \text{ car } 100 \geq 30 \\ np \geq 5 \text{ car } np = 100 \times \dfrac{1}{6} \simeq 17 \\ n(1-p) \geq 5 \text{ car } n(1-p) = 100(1 - \dfrac{1}{6}) \simeq 83 \end{cases}$ **à la calculatrice :** $\begin{cases} a = 10 \\ b = 24 \end{cases}$ **d'où** $I = [\ \dfrac{10}{100}\ ;\ \dfrac{24}{100}\ ]$

définition 5 *(Prise de décision au seuil de 95%)*

On considère une population dans laquelle on on fait l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est p.
Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise *(et indépendance)*, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.

$\begin{cases} \text{Si la fréquence observée } f \text{ appartient à l'intervalle de fluctuation } [\ \dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\ ] \\ \text{alors l'hypothèse selon laquelle la proportion est } p \text{ dans la population est conservée} \\ \\ \text{Sinon on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut } p \text{ avec un risque de 5\%} \end{cases}$

Remarque :

1. **il faut bien sur que l'on ait : $n \geq 30\,;\ np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$**

Exemple :

1. **Hypothèse : "la proportion de personnes qui vont voter pour A est $p = \dfrac{1}{6}$"**
Suite à un sondage aléatoire *(avec indépendance)* sur un échantillon de taille 100 on obtient $f = 25\%$ des personnes sondées qui vont voter pour A
comme ci dessus on obtient l'intervalle : $I = [\ \dfrac{10}{100}\ ;\ \dfrac{24}{100}\ ]$
or : $25\% \notin [\ \dfrac{10}{100}\ ;\ \dfrac{24}{100}\ ]$
on peut donc rejeter l'hypothèse : "la proportion de personnes qui vont voter pour A est $p = \dfrac{1}{6}$" avec un risque de 5%

3.3 exercices

exercice 12 :

Le chef du gouvernement fait l'hypothèse que 60 % des électeurs lui font confiance.

1. si tel est le cas, pour 200 noms choisis au hasard dans la liste électorale, déterminer à 1% près, "l'intervalle de fluctuations binomial à 95%" $[\ \frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\ ]$ et interpréter
2. Enoncer une règle de décision qui permet de rejeter ou de conserver l'hypothèse
3. Sur 200 électeurs effectivement interrogés au hasard, 90 déclarent avoir confiance
   Peut-on considérer, au seuil de 95%, l'hypothèse exacte ? *(justifier)*
4. comparer l'intervalle ci dessus à "l'intervalle de fluctuations à 95%" vu en seconde :
   $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\ ]$
5. comparer l'intervalle ci dessus à "l'intervalle de fluctuations asymptotique à 95%" vu en TS :
   $[\ p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ]$

exercice 13 :

Un médecin veut savoir si, dans sa région, le pourcentage d'habitants atteints d'hypertension artérielle est égal à la valeur de 22 % récemment publiée pour des populations semblables. Pour vérifier cette hypothèse, le médecin constitue un échantillon de $n = 80$ habitants de la région ; il détermine la fréquence f d'hypertendus *(l'échantillon est prélevé au hasard et la population est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).* Pour quelles valeurs de f, la médecin rejettera-t-il cette hypothèse au risque de 5% ?

exercice 14 :

Dans une usine, une machine automatisée fabrique un certain objet
Quand elle est réglée au mieux, cette machine produit 20% d'objets qui ont un petit travail à terminer à la main *(l'objet n'est alors pas conforme)*
On souhaite savoir si cette machine est encore réglée au mieux ou si elle doit être à nouveau réglée, pour cela on contrôle 50 objets prélevés au hasard dans le stock des objets produits par cette machine. Il a ainsi été obtenu 42 objets conformes et 8 non conformes

1. déterminer l'intervalle de fluctuations binomial à 95% pour la fréquences d'objets non conformes
2. faut-il régler la machine ou bien est-elle réglée au mieux *(justifier)*
3. pour une autre machine du même type, le contrôle de 50 objets prélevés au hasard dans le stock des objets produits par la machine a donné 33 objets conformes,
   faut-il régler cette machine ? *(justifier)*

exercice 15 :

Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent un utilisant une mauvaise file.
Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, l'intervalle de fluctuation binomial au seuil de 95 %.
2. D'après l'échantillon, peut-on considérer comme exacte l'affirmation du groupe ?

exercice 16 :

Dans le monde, la proportion de gauchers est 12 %. Soit n le nombre d'élèves dans votre classe.

1. Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation binomial au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers sur un échantillon aléatoire de taille n.
2. Votre classe est-elle « représentative » de la proportion de gauchers dans le monde ?

exercice 17 :

Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises :

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	**57**	**43**	**100**
Entreprise B	**1350**	**1150**	**2500**

Peut-on suspecter l'une des deux de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ?

3.4 corrigés exercices

corrigé exercice 11 :

Le chef du gouvernement fait l'hypothèse que 60 % des électeurs lui font confiance.

1. **si tel est le cas, pour 200 noms choisis au hasard dans la liste électorale, déterminer à 1% près, "l'intervalle de fluctuations binomial à 95%" $[\ \frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\ ]$ et interpréter**

   on a bien : $n > 30$ **et** $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{5}{6}$

   la calculatrice donne : $\boxed{a = 106}$ **et** $\boxed{b = 133}$

   soit l'intervalle $[\frac{106}{200}; \frac{133}{200}] \simeq \boxed{[0,53; 0,665]}$

   il y aura donc :

   $\boxed{\text{entre 53\% et 67\% d'électeurs confiants parmi les 200 avec une probabilité de 95\%}}$

2. **Enoncer une règle de décision qui permet de rejeter ou de conserver l'hypothèse**

   si le pourcentage de personnes confiantes parmi les 200,est compris entre 53% et 67%
   alors on peut accepter l'hypothèse des 60% au risque de 5%
   sinon on rejète l'hypothèse au risque de 5%

3. **Sur 200 électeurs effectivement interrogés au hasard, 90 déclarent avoir confiance**
   Peut-on considérer, au seuil de 95%, l'hypothèse exacte ? *(justifier)*

   $\frac{90}{200} = 0,45$ **et** $\boxed{0,45 \notin [0,53; 0,665]}$

   donc $\boxed{\text{on rejète l'hypothèse des 60\% au risque de 5\%}}$

4. **comparer l'intervalle ci dessus à "l'intervalle de fluctuations à 95%" vu en seconde :**

   $$\boxed{[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\ ]}$$

   $$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,6 - \frac{1}{\sqrt{200}} \simeq 0,53$$

   $$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,6 - \frac{1}{\sqrt{200}} \simeq 0,67$$

   d'où l'intervalle : $\boxed{[0,53; 0,67]}$ **proche du précédent**

5. **comparer l'intervalle ci dessus à "l'intervalle de fluctuations asymptotique à 95%" vu en TS :**

   $$\boxed{[\ p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ]}$$

   $$0,6 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,6(1-0,6)}}{\sqrt{200}} \simeq 0,53$$

   $0,6 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,6(1-0,6)}}{\sqrt{200}} \simeq 0,67$ **d'où l'intervalle :** $\boxed{[0,53; 0,67]}$ **proche du précédent**

corrigé exercice 12 :

Un médecin veut savoir si, dans sa région, le pourcentage d'habitants atteints d'hypertension artérielle est égal à la valeur de 22 % récemment publiée pour des populations semblables. Pour vérifier cette hypothèse, le médecin constitue un échantillon de $n = 80$ habitants de la région ; il détermine la fréquence f d'hypertendus *(l'échantillon est prélevé au hasard et la population est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).* Pour quelles valeurs de f, la médecin rejettera-t-il cette hypothèse au risque de 5% ?

on a bien : $n > 30$ et $\dfrac{1}{6} \leq p \leq \dfrac{5}{6}$
il suffit de déterminer l'intervalle de fluctuations binomial à 95% avec $p = 0,22$ et $n = 80$
la calculatrice donne : $\boxed{a = 9 \text{ et } b = 23}$

soit l'intervalle $[\dfrac{9}{80}; \dfrac{23}{80}] = \boxed{[0,1125; 0,2875]}$

s'il y a moins de 11,25% ou plus de 28,75%, le médecin rejettera l'hypothèse des 22% d'habitants atteints d'hypertension artérielle au risque de 5%

corrigé exercice 13 :

Dans une usine, une machine automatisée fabrique un certain objet
Quand elle est réglée au mieux, cette machine produit 20% d'objets qui ont un petit travail à terminer à la main ***(l'objet n'est alors pas conforme)***
On souhaite savoir si cette machine est encore réglée au mieux ou si elle doit être à nouveau réglée, pour cela on contrôle 50 objets prélevés au hasard dans le stock des objets produits par cette machine. Il a ainsi été obtenu 42 objets conformes et 8 non conformes

1. **déterminer l'intervalle de fluctuations binomial à 95% pour la fréquences d'objets non conformes**
   on a bien : $n > 30$ **et** $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{5}{6}$
   avec $\boxed{p = 0,2}$ **et** $\boxed{n = 50}$
   la calculatrice donnne pour $\boxed{\textbf{intervalle de fluctuation binomial des effectifs}}$ **:** $\boxed{[5;16]}$
   et pour $\boxed{\textbf{intervalle de fluctuation binomial des fréquences}}$ **:** $[\frac{5}{50};\frac{16}{50}]$ **soit** $\boxed{[0,1;0,32]}$
2. **faut-il régler la machine ou bien est-elle réglée au mieux** ***(justifier)***
   sur les 50 on obtient 8 **non conformes or** $\boxed{8 \in [5;16]}$
   donc on peut considérer que $\boxed{\textbf{la machine est bien réglée}}$ **au rique de 5%**
3. **pour une autre machine du même type, le contrôle de 50 objets prélevés au hasard dans le stock des objets produits par la machine a donné 33 objets conformes, faut-il régler cette machine ? /textit(justifier)**
   33 conformes dont $50 - 33 = 17$ **non conformes**
   or $\boxed{17 \notin [5;16]}$
   donc on peut considérer que $\boxed{\textbf{la machine n'est pas bien réglée}}$ **au rique de 5%**

corrigé exercice 14 :

Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent un utilisant une mauvaise file.
Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. **Déterminer, l'intervalle de fluctuation binomial au seuil de 95 %.**
   on a bien : $n > 30$ **et** $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{5}{6}$
   avec $\boxed{p = 0,4}$ **et** $\boxed{n = 500}$
   (utiliser un tableau de valeurs pour la b loi binomiale cumulée)
   la calculatrice donne pour $\boxed{\textbf{intervalle de fluctuation binomial des effectifs}}$ **:** $\boxed{[179; 218]}$
   et pour $\boxed{\textbf{intervalle de fluctuation binomial des fréquences}}$ **:** $[\frac{179}{500}; \frac{218}{500}]$ **soit** $\boxed{[0,358; 0,436]}$
2. **D'après l'échantillon, peut-on considérer comme exacte l'affirmation du groupe ?**
   $\boxed{40\% \in [0,358; 0,436]}$ **dont l'affirmation** $\boxed{\textbf{peut-être considérée exacte au risque de 5\%}}$

corrigé exercice 15 :

Dans le monde, la proportion de gauchers est 12 %. Soit n le nombre d'élèves dans votre classe.

1. **Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation binomial au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers sur un échantillon aléatoire de taille n.**
   on n'a pas : $n > 30$ et $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{5}{6}$
   donc la propriété ne peut être appliquée.
2. **Votre classe est-elle « représentative » de la proportion de gauchers dans le monde ?**
   on ne peut pas savoir par cette méthode

corrigé exercice 16 :

Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises :

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	57	43	100
Entreprise B	1350	1150	2500

Peut-on suspecter l'une des deux de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ?

pour la première entreprise A :

avec $p = 0,5$ **et** $n = 100$

$n > 30$ **et** $\dfrac{1}{6} \leq p \leq \dfrac{5}{6}$

la calculatrice donne pour $\boxed{\text{intervalle de fluctuation binomial des effectifs}}$ **:** $\boxed{I = [40; 60]}$

et $43 \in I$ **donc l'entreprise A respecte la parité au risque de** 5%

pour l'entreprise B :

avec $p = 0,5$ **et** $n = 2500$

$n > 30$ **et** $\dfrac{1}{6} \leq p \leq \dfrac{5}{6}$

la calculatrice ne donne pas, mais le tableur donne

pour $\boxed{\text{intervalle de fluctuation binomial des effectifs}}$ **:** $\boxed{[1201; 1299]}$

et $1150 \notin I$ **donc l'entreprise B ne respecte pas la parité au risque de** 5%

4 tp 1 : tableur et intervalle de fluctuation binomial

TP : $\boxed{\text{Instituts de sondages et intervalle de fluctuations}}$

1. **ouvrir et enregistrer dans votre dossier Mathématiques le fichier "tp (tableur)" de la ligne "Echantillonnage" de la page d'accueil de "1s" du site "site.math.free.fr"**
2. **Autour de la loi binomiale $B(100; 0, 5)$**
   (a) **diagramme en bâtons de la loi $B(100; 0, 5)$**
      i. **entrer 100 dans la cellule $B1$ et $0, 5$ dans $B2$**
      ii. **entrer 0 dans la cellule $A5$ et dans la cellule $A6$ la formule $\boxed{= A5 + 1}$ puis étirer la cellule $A6$ jusqu'à $A105$**
      iii. **entrer dans la cellule $B5$ la formule $\boxed{= LOI.BINOMIALE(A5; \$B\$1; \$B\$2; 0)}$**

      qui donne les valeurs de : ... pour ... allant de ... à...

      où X suit une loi de paramètres $n = ...$ et $p = ...$

      $A5$ correspond à : ...

      \$B\$1 correspond à : ...

      \$B\$2 correspond à : ...

      le 0 en fin de formule est pour dire que l'on ne cumule pas les valeurs des probabilités
      iv. **étirer la cellule précédente jusqu'à la cellule $B105$**
      v. **obtenir le diagramme en bâtons des valeurs de $p(X = k)$ comme suit**

         -> clic droit sur la zone de graphique -> données source -> série -> ajouter
         -> étiquettes des abscisses -> sélectionner la plage $A5 : A105$ -> valider
         -> valeurs -> sélectionner la plage de données $B5 : B105$ -> valider
         -> ok
      vi. **autour de quelle valeur semble être centré le diagramme ? : autour de $X = ...$**
      vii. **que représente cette valeur pour la loi $B(100; 0, 5)$? *(comparer cette valeur à $E(X)$)* : ...**
      viii. **grâce au tableau de valeurs, donner la probabilité à $0, 1\%$ près d'obtenir 50 piles si on lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée avec indépendance : $p(X = 50) \simeq ...$**
      ix. **a t-on de grandes chances d'obtenir entre 0 et 28 piles ? ...**
      x. **grâce au diagramme, estimer les intervalles des nombres de piles les "moins probables" $X \in ...$ ou $X \in ...$**
      xi. **grâce au diagramme, estimer l'intervalle de pile "le plus probable" : $X \in ...$**
   (b) **courbe des probabilités cumulées de la loi $B(100; 0, 5)$**
      i. **entrer dans la cellule $C5$ la formule $\boxed{= LOI.BINOMIALE(A5; \$B\$1; \$B\$2; 1)}$**
      le 1 est pour dire qu'on ... les valeurs des probabilités
      ii. **étirer la cellule précédente jusqu'à la cellule $C105$**
      iii. **obtenir la courbe des valeurs de $p(X <= k)$ comme suit**

         -> clic droit sur la zone de graphique -> données source -> série -> ajouter
         -> valeurs de x -> sélectionner la plage $A5 : A105$ -> valider
         -> valeurs de y -> sélectionner la plage de données $C5 : C105$ -> valider
         -> ok

         A. **grâce au tableau de valeurs, déterminer la plus petite valeur de a telle que $p(X \leq a) > 2, 5\%$: $a = ...$**
         B. **grâce au tableau de valeurs, déterminer la plus petite valeur de b telle que $p(X \leq b) > 97, 5\%$: $b = ...$**

C. $p(a \leq X \leq b)$ **est très proche de quelle valeur ? : ...**

D. on peut ainsi dire que si on lance 100 **fois la pièce précédente,**

on a ... % de chance de faire entre ... piles et ... piles

l'intervalle $[...\ ;...\ ]$ **s'appelle l'intervalle de ... au risque**

de $...$ **%**

3. on lance 50 **fois une pièce** P **dont on ne sait pas si elle est bien équilibrée**

(a) dans le cas où la pièce est bien équilibrée

i. quelle valeur de quelle cellule faut-il changer pour obtenir le diagramme correspondant ? : ...

ii. obtenez ce diagramme et déterminer l'intervalle de fluctuations au risque de 5% **:**

valeur de a **: ...**

valeur de b **: ...**

intervalle : ...

iii. ce qui signifie que si on lance 50 fois une pièce équilibré avec indépendance, on a

...

(b) sachant qu'avec la pièce P**, on a obtenu** 35 **piles sur 50**
peut-on dire que cette pièce est bien équilibrée ? : ...
quelle risque a t-on de se tromper en disant qu'elle est bien équilibrée ? : ...
quelle probabilité a t-on de dire vrai en disant qu'elle n'est pas bien équilibrée ? : ...

4. on choisit 500 **noms de personnes au hasard et avec indépendance dans une population dont on ne connaît pas le pourcentage** p **de femmes.**
Soit X **le nombre de femmes obtenu**

(a) préciser au maximum la loi suivie par X **? ;...**

(b) obtenez les tableaux de valeurs de $p(X = k)$ **et** $p(X \leq k)$ **ainsi que le diagramme en bâtons et la courbe des probabilités cumulées dans le cas où** $p = 0,6$

(c) déterminer l'intervalle de fluctuations au risque de 5% **:**

valeur de a **: ...**

valeur de b **: ...**

intervalle : ...

(d) un sondage a obtenu 286 **femmes sur** 500 **personnes**

i. calculer la proportion de femmes obtenue : ...

ii. est-il raisonnable de supposer que le population entière contient 60% **de femmes ?** ***(justifier pourquoi et préciser le risque de se tromper)***
...

5 tp2 : programme calculatrice et intervalle de fluctuations binomial à 95%

Algorithme et intervalle de fluctuations binomial

Pour la répétition de $n \geq 30$ expériences identiques et indépendantes, avec pour chacune d'elle deux issues contraires : $\begin{cases} \text{"succès" de probabilité } p \in [\frac{1}{6};\frac{5}{6}] \simeq [0,2;0,8] \\ \text{"échec" de probabilité } q = 1-p \end{cases}$

soit X le nombre de succès à l'issue des n expériences, X suit une loi binomiale de paramètres n et p et $p(X=k) = C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$

On cherche à obtenir à la calculatrice les valeurs a et b de l'intervalle $I = [\ \frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\ ]$

où $\begin{cases} a \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq a) > 0,025} \\ b \text{ est le plus petit entier tel que } \boxed{p(X \leq b) \geq 0,975} \end{cases}$ **quand on entre les valeurs n et p**

1. **entrer le programme précédent dans votre calculatrice**

algorithme
Début
//**Variables**
s, x, n, p, a, b, z, t
//**Entrées**
demander à l'utilisateur la valeur de n
demander à l'utilisateur la valeur de p
//**Initialisations**
affecter à s **la valeur** 0
affecter à k **la valeur** 0
affecter à a **la valeur** 0
affecter à b **la valeur** 0
affecter à z **la valeur** 0
affecter à t **la valeur** 0
//**Traitements**
Tans_que $s < 0,975$
affecter à x **la valeur** $C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}$
affecter à s **la valeur** $s + x$
affecter à k **la valeur** $k + 1$
Si $s \leq 0,025$
Alors
affecter à a **la valeur** k
affecter à z **la valeur** s
FIN_Si
Fin Tans_que
affecter à b **la valeur** $k - 1$
affecter à t **la valeur** s
//**Sortie**
afficher a
afficher z
afficher b
afficher t
Fin

programme pour TI
Prompt N
Prompt P
$0 \longrightarrow S$
$0 \longrightarrow K$
$0 \longrightarrow A$
$0 \longrightarrow B$
$0 \longrightarrow Z$
$0 \longrightarrow T$
While $S < 0.975$
$NnCrK * P \wedge K * (1-P) \wedge (N-K) \longrightarrow X$
$S + X \longrightarrow S$
$K + 1 \longrightarrow K$
If S ≤ 0.025
Then
$K \longrightarrow A$
$S \longrightarrow Z$
End_If
End_While
$K - 1 \longrightarrow B$
$S \longrightarrow T$
disp A
disp Z
disp B
disp T

programme pour CASIO
"N" : ? → N
"P" : ? → P
...(comme pour le TI ci dessus)
A ▲
Z ▲
B ▲
T ▲

2. **utiliser le programme de la calculatrice pour répondre aux questions suivantes**
   (a) **on lance 100 fois de suite un dé équilibré à 6 faces avec indépendance, X est le nombre de fois que l'on a obtenu le score 6, donner l'intervalle I et interpréter**
   (b) **on lance 50 fois de suite une pièce équilibrés avec indépendance, X est le nombre de fois que l'on a obtenu "pile", donner l'intervalle I et interpréter le résultat**
   (c) **on choisit 200 personnes au hasard avec indépendance dans une population contenant 60% de femmes , X est le nombre de fois que la personne choisie est un homme, donner l'intervalle I et interpréter le résultat**

6 tp : Loi Binomiale : Comparaison de résultats "expérimentaux" et de résultats théoriques

1. Cadre expérimental de base :
   On se place dans la situation suivante,
   (a) On considère une *expérience aléatoire (lancer d'une pièce, d'un dé, choix d'une carte dans un jeu de 32 cartes, choix d'une personne au hasard,...)*
   (b) On décide qu'un événement que l'on choisit sera appelé *"Succès" (pile, 6, As, ...)*
   (c) On connaît la *probabilité* p de l'événement "Succès" *($p = 0,5$; $p = \frac{1}{6}$; $p = \frac{4}{32}$; ...)*
   (d) On *répète* cette expérience aléatoire un certain nombre ($n > 1$) de fois avec indépendance *($n = 10$ par exemple)*
   (e) On s'intéresse au *nombre X de fois que l'on a obtenu "Succès"* parmi les n expériences.
   $X = 0$: "aucun succès" ; ... ; $X = 10$: "que des succès"
   (f) On cherche à obtenir le *tableau de "loi de probabilité"* de X

nombre de succès : k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
probabilité : $p(X = k)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	100%

   Est-il plus probable de n'avoir aucun succès, un succès, deux succès,..., que des succès ?
   (g) On cherche à obtenir le *nombre moyen* de succès *(espèrance de X)* noté $E(X)$
   (h) On cherche à obtenir *l'écart type* $\sigma(X)$ du nombre de succès.

2. Expérimentations
   (a) Expérience 1 : *(Pile ou Face)*
   On joue 10 fois de suite à "pile ou face", "succès" = "pile", p(succès) = p(pile) = 0,5
   On utilise un tableur pour réaliser 1000 séries de 10 lancers afin d'obtenir le tableau statistiques ci dessous

nombre de succès k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
nombre de fois k succès	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	1000
fréquence de k succès (%)	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	100%

   ceci afin de comparer les résultats obtenus avec des résultats calculés par une formule mathématique *(*)* $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ et $0! = 1$ *(factoriel 0 égal 1) (hors programme)*
   i. Intuitivement, si on lance une pièce 10 fois :
   Quel est le nombre de succès le plus probable ? : $k = ...$
   Quelle est la probabilité d'avoir ce nombre de succès ? : $p(X = ... \quad) = ...$
   Quel est le nombre de succès le moins probable ? : $k = ...$
   Quelle est la probabilité d'avoir ce nombre de succès ? : $p(X = ... \quad) = ...$
   ii. Utilisation du Tableur
   A. Obtenir un tableau comme ci dessous
   où il y a les résultats de 1000 séries de 10 lancers ainsi que les nombres de piles par séries en bout de ligne *(document tableur)*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Lancer 7	Lancer 8	Lancer 9	Lancer 10	nb pile : X
2	Série de 10 lancers 1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	8
3	Série de 10 lancers 2	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	6
4	Série de 10 lancers 3	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	4
5	Série de 10 lancers 4	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	4
6	Série de 10 lancers 5	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
7	Série de 10 lancers 6	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	5
8	Série de 10 lancers 7	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
9	Série de 10 lancers 8	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	3
10	Série de 10 lancers 9	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	4
11	Série de 10 lancers 10	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	7

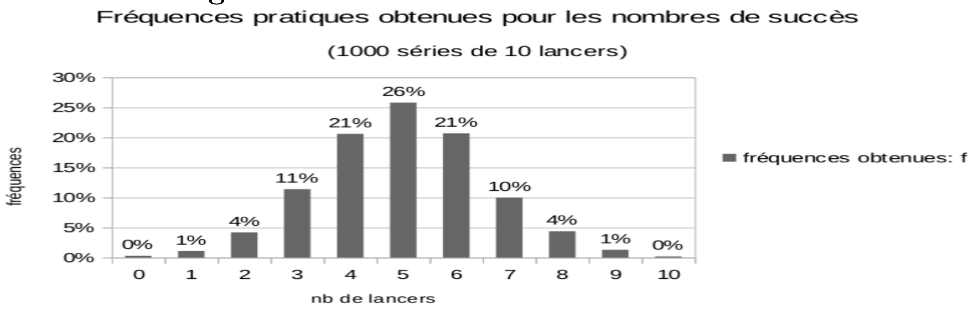
   Formules utilisées :
   en B2 : =ALEA.ENTRE.BORNES(0 ;1) *(donne un nombre aléatoire, 0 ou 1) (on dira que "1" est "pile") (Ctrl + Maj + F9 pour recalculer)*
   en L2 : =NB.SI(B2 :K2 ;1) *(pour compter le nombre de 1 dans la ligne)*

B. Obtenir un tableau comme ci dessous pour le bilan

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	X = nb pile	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
	effectifs obtenus	1	12	46	125	189	247	203	117	50	10	0	1000
	fréquences obtenues: f	0%	1%	5%	13%	19%	25%	20%	12%	5%	1%	0%	100%

En O3 : =NB.SI($L2 :$L1001 ;O2) *(compte le nombre de 0 dans la colonne L)*
En O4 : = ... *(fréquence de 0 dans la colonne L)*

C. Obtenir un diagramme en bâtons comme ci dessous



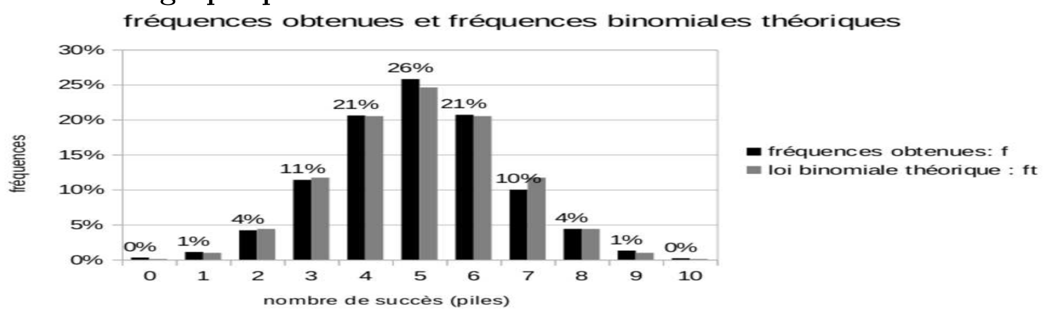
Actualisez la page plusieurs fois en observant ce qui se passe *(Ctrl + Maj + F9)*
Quel semble être le nombre de succès le plus probable ? : $X = ...$
Qelle semble être la probabilité de cet événement le plus probable ? $p(X = ... \quad) \simeq ...$
Quels semblent êtres les nombres de succès les moins probables ? : $X = ...$
Qelle semble être la probabilité de ces événements les moins probables ? : $\simeq ...$

D. Obtenir la suite comme ci dessous

1													
2	X = nb pile	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
3	effectifs obtenus	1	13	49	105	201	264	193	125	44	5	0	1000
4	fréquences obtenues: f	0%	1%	5%	11%	20%	26%	19%	13%	4%	1%	0%	100%
5	loi binomiale théorique : ft	0%	1%	4%	12%	21%	25%	21%	12%	4%	1%	0%	100%
6	différence : f – ft	0%	0%	1%	-1%	0%	2%	-1%	1%	0%	0%	0%	
7													
8	moyenne nombre de piles : m	4.98											
9	nombre de lancers : n	10											
10	probabilité de « pile » : p	0.5											
11	n * p	5											
12	différence : m – n*p	-0.02											
13	Écart type du nombre de « pile » : s	1.57											
14	√(n*p*(1-p))	1.581											
15	différence : s – √(n*p*(1-p))	-0.01											

En O5 : =LOI.BINOMIALE(O2 ;10 ;0,5 ;0) *(fréq théorique par la formule (*))*
En O8 : =MOYENNE(L2 :L1001) *(nombre moyen de succès sur 1000 séries)* En O13 : =ECARTYPE(L2 :L1001) *(écart type des nombres de succès sur 1000 séries)*

E. Obtenir un graphique comme ci dessous



A. Y a t-il une "grande différence" entre les fréquences trouvées par la pratique et celles données par la formule Théorique (Mathématique) du Tableur ? : ...
B. Y a t-il une grande différence entre le nombre moyen de succès trouvé par la pratique et le nombre $n \times p$? : ...
C. Y a t-il une grande différence entre l'écart type des nombres de succès trouvé par la pratique et le nombre $\sqrt{np(1-p)}$? : ...
D. Si on lance 10 fois une pièce, quelle est la probabilité théorique d'obtenir $X = 7$ fois "pile" ? *(à 1% près)* : ...

(b) Expérience 2
-> Copier coller cette feuille dans un nouvel onglet et modifier les formules afin d'obtenir tous les tableaux et grahiques pour 1000 séries de 10 lancers d'un dé à 6 faces équilibré ou "Succès" est "6" et la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$

7 tp 4 : Loi Binomiale et Calculatrice Scientifique

Dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$

1. $\boxed{\textbf{Comment obtenir la valeur de la probabilité } p(X=k)}$ **où** $0 \leq k \leq n$

Formule Algébrique	Calculatrice TI	Calculatrice Casio
$p(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$	$\boxed{\textbf{2nd}}$ $\boxed{\textbf{DISTR}}$ $\boxed{\textbf{binompdf(}}$ **binompdf(n,p,k)**	$\boxed{\textbf{MENU}}$ $\boxed{\textbf{STAT}}$ $\boxed{\textbf{DIST}}$ $\boxed{\textbf{BINM}}$ $\boxed{\textbf{Bpd}}$ **Binomial P.D** **Data : Variable** **x : k** **Numtrial : n** **P : p** **Execute**
avec $n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X=50)$	$n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X=50)$	$n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X=50)$
$p(X=50) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} 0,5^{50}(1-0,5)^{100-50}$ $p(X=50) \simeq 0.0796$	$\boxed{\textbf{2nd}}$ $\boxed{\textbf{DISTR}}$ $\boxed{\textbf{binompdf(}}$ **binompdf(100,0.5,50)** $p(X=50) \simeq 0.0796$	$\boxed{\textbf{MENU}}$ $\boxed{\textbf{STAT}}$ $\boxed{\textbf{DIST}}$ $\boxed{\textbf{BINM}}$ $\boxed{\textbf{Bpd}}$ **Binomial P.D** **Data : Variable** **x : 50** **Numtrial :100** **P : 0.5** **Execute** $p(X=50) \simeq 0.0796$

2. $\boxed{\textbf{Comment obtenir la valeur de la probabilité } p(X \leq k)}$ **où** $0 \leq k \leq n$

Formule Algébrique	Calculatrice TI	Calculatrice Casio
$p(X \leq k) = \sum_{i=0}^{i=k} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$	$\boxed{\textbf{2nd}}$ $\boxed{\textbf{DISTR}}$ $\boxed{\textbf{binomcdf(}}$ **binomcdf(n,p,k)**	$\boxed{\textbf{MENU}}$ $\boxed{\textbf{STAT}}$ $\boxed{\textbf{DIST}}$ $\boxed{\textbf{BINM}}$ $\boxed{\textbf{Bcd}}$ **Binomial P.C** **Data : Variable** **x : k** **Numtrial : n** **P : p** **Execute**
avec $n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X \leq 50)$	$n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X \leq 50)$	$n=100; \quad p=0.5; \quad k=50$ **calcul de** $p(X \leq 50)$
$p(X \leq 50) = p(X=0) + ... + p(X=50)$ **trop long !**	$\boxed{\textbf{2nd}}$ $\boxed{\textbf{DISTR}}$ $\boxed{\textbf{binomcdf(}}$ **binomcdf(100,0.5,50)** $p(X \leq 50) \simeq 0.54$	$\boxed{\textbf{MENU}}$ $\boxed{\textbf{STAT}}$ $\boxed{\textbf{DIST}}$ $\boxed{\textbf{BINM}}$ $\boxed{\textbf{Bcd}}$ **Binomial P.C** **Data : Variable** **x : 50** **Numtrial :100** **P : 0.5** **Execute** $p(X \leq 50) \simeq 0.54$