Fonction dérivée

Table des matières

1 fonction dérivée **2**

1.1 activité . . . 2

1.2 corrigé activité . . . 3

1.3 à retenir . . . 5

1.3.1 nombre dérivé de f en $x = x_0$ . . . 5

1.3.2 équation de la droite tangente à la courbe de f en $x = x_0$ . . . 5

1.3.3 lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f . . . 7

1.3.4 dérivées usuelles et opérations sur les fonctions . . . 9

1.4 exercices . . . 10

1.5 corrigés exercices . . . 17

1.6 devoir maison . . . 18

1.6.1 corrigé devoir maison 1 . . . 18

1.6.2 corrigé devoir maison 2 . . . 20

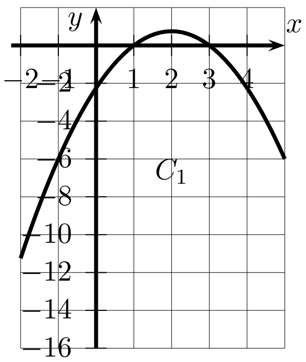
1.6.3 corrigé devoir maison 3 . . . 21

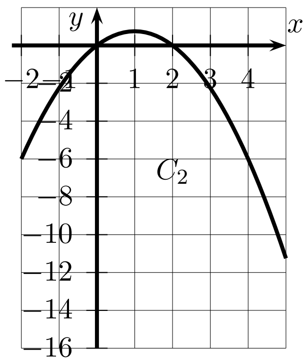
1 fonction dérivée

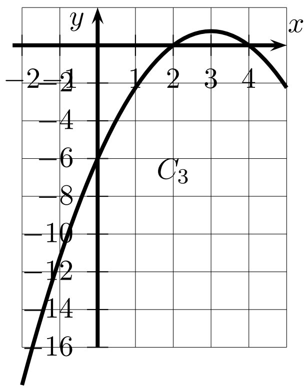
1.1 activité

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 \; ; \; 5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2 \; ; \; 0]$ et $[2 \; ; \; 5]$ et croissante sur l'intervalle $[0 \; ; \; 2]$.
On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2 \; ; \; 5]$.
La courbe (Γ) représentative de la fonction f est donnée en annexe dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points A$(-2 \; ; \; 9)$, B$(0 \; ; \; 4)$, C$(1 \; ; 4{,}5)$, D$(2 \; ; 5)$ et E$(4 \; ; \; 0)$.
En chacun des points B et D, la tangente la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3 \; ; 6)$.
Les droites (CF) et (EF) sont tangentes à la courbe (Γ) respectivement aux points C et E.

1. A l'aide des informations précédentes et de l'annexe 1, préciser :
   a. les valeurs de $f(0), f(1), f(2), f(4)$.
   b. l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2 \; ; \; 5]$.
   c. le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2 \; ; \; 5]$.
   d. $f'(0), f'(1), f'(2), f'(4)$ et les équations des tangentes à (Γ) respectivement aux points C et E.
   e. l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[-2 \; ; \; 5]$.
   f. le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2 \; ; \; 5]$.
   g. le tableau de variation complet de f sur $[-2 \; ; \; 5]$.
   h. Laquelle des courbes C_1, C_2 ou C_3 suivantes peut-être la courbe de la fonction f' ?

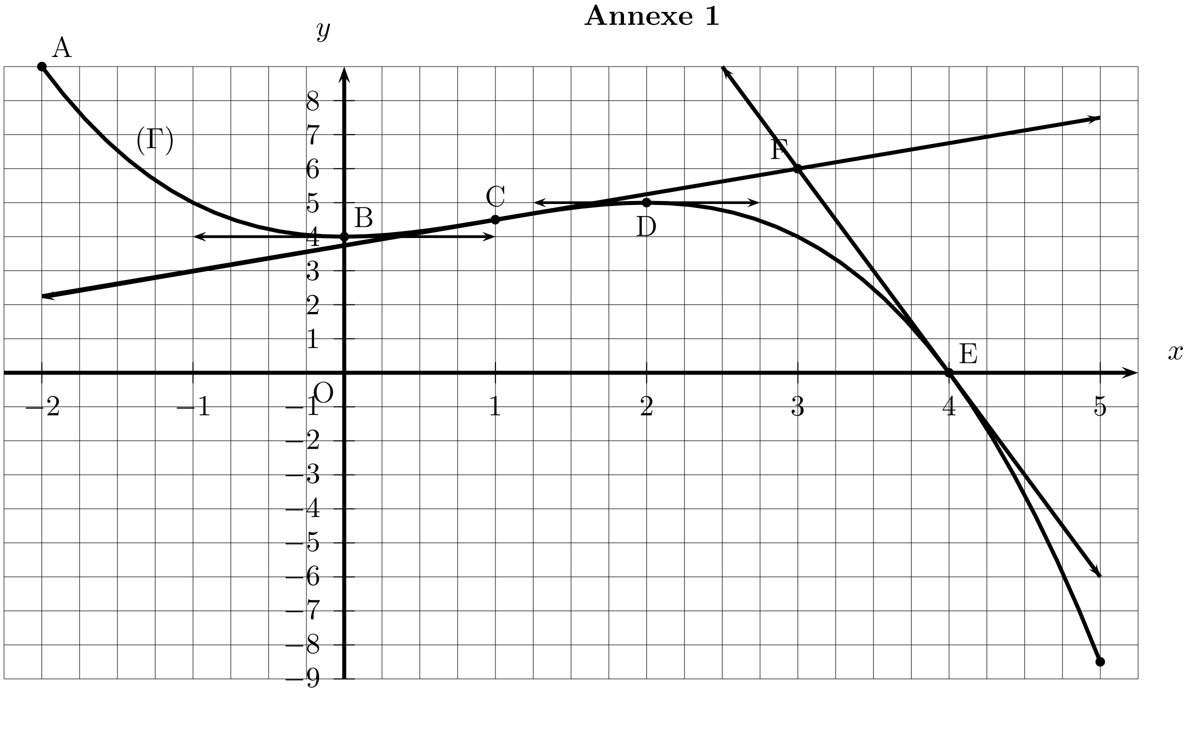






2. On considère maintenant que $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 4$
   a. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2 \; ; \; 5]$.
   b. Y a t-il cohérence entre les résultats graphiques et algébriques ?

Annexe 1



1.2 corrigé activité

1. A l'aide des informations précédentes et de l'annexe 1, on a :
   a. $f(0) = 4, \quad f(1) = 4,5 \quad ; \quad f(2) = 5 \quad et \quad f(4) = 0.$
   b. l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\ ;\ 5]$ est $\mathrm{S} = \{4\}$.
   c. Pour le signe de $f(x)$: $f(x) > 0$ pour $x \in [-2\ ;\ 4[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in [4\ ;\ 5[$
   d. $f'(0) = 0$ car la droite tangente à la courbe est horizontale en $x = 0$

   $f'(1)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe en x = 1.
   $f'(1)$ = coefficient directeur "a" de la droite (CF), $a = \dfrac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \dfrac{6 - 4,5}{3 - 1} = 0,75.$

   $f'(2) = 0$ car la droite tangente à la courbe est horizontale en $x = 2$.

   $f'(4)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe en x = 4.
   $f'(4)$ = coefficient directeur "a" de la droite (EF), $a = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{6 - 0}{3 - 4} = -6.$

   Equations de la tangente à (Γ) en C : C'est l'équation de la droite (CF),
   la calculatrice donne $y = 0,75x + 3,75$

   Equations de la tangente à (Γ) en E : C'est l'équation de la droite (EF),
   la calculatrice donne $y = -6x + 24$

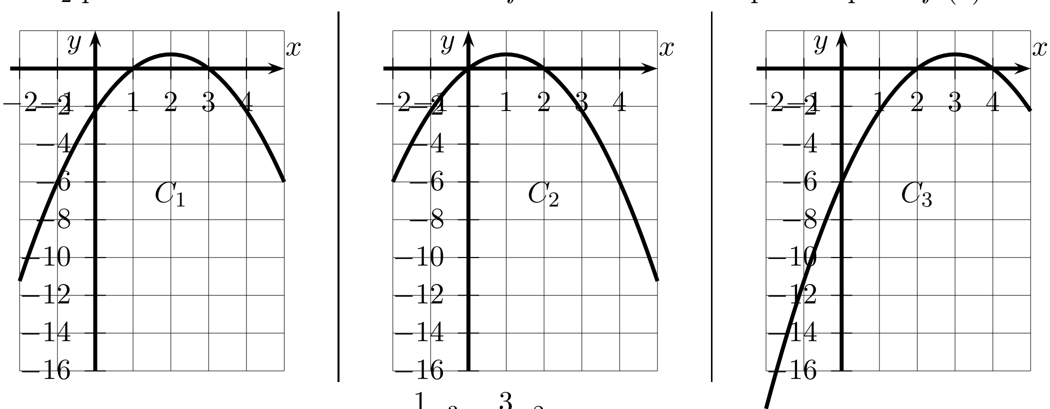
   e. l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[-2\ ;\ 5]$ est S ={0 ;2}
   f. le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

   g. le tableau de variation complet de f sur $[-2\ ;\ 5]$.

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	9	↘	4	↗	5	↘	-8,5

   h. Seule C_2 peut-être la courbe de la fonction f' car c'est la seule pour laquelle $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$

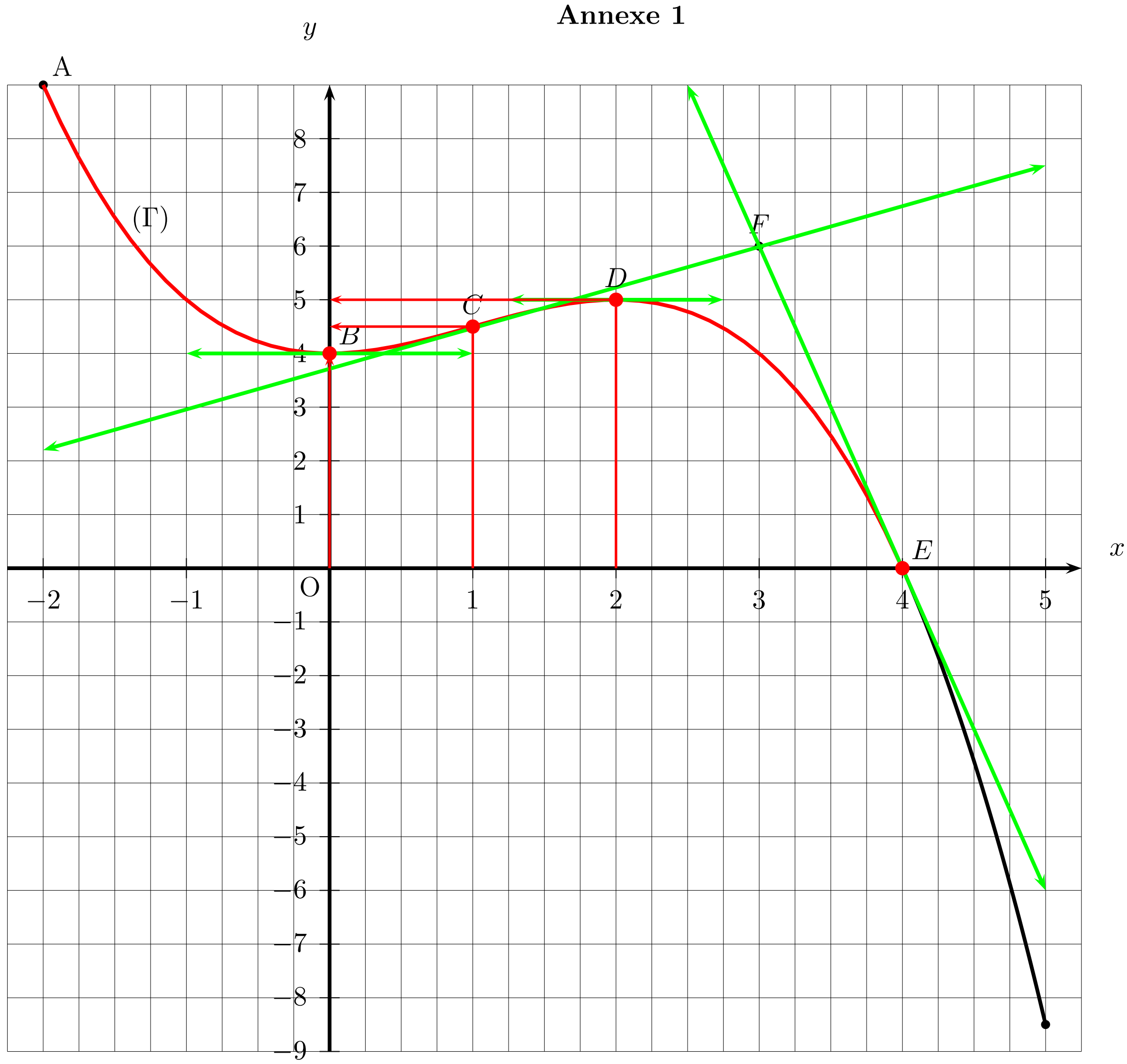


2. On considère maintenant que $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 4$
   a. • $f'(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{6}{4}x = -0,75x^2 + 1,5x$
   • Annulation de f' : $-0,75x^2 + 1,5x = 0 \Longleftrightarrow x(-0,75x + 1,5) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{-1,5}{-0,75} = 2$
   • variations de f et signe de $f'(x) = -0,75x^2 + 1,5x$: on utilise la règle du signe du trinôme

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	9	↘	4	↗	5	↘	-8,5

b. On constate qu'il y a cohérence entre les résultats graphiques et algébriques.

Annexe 1



1.3 à retenir

1.3.1 nombre dérivé de f en $x = x_0$

définition 1 : *(nombre dérivé)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$ un nombre

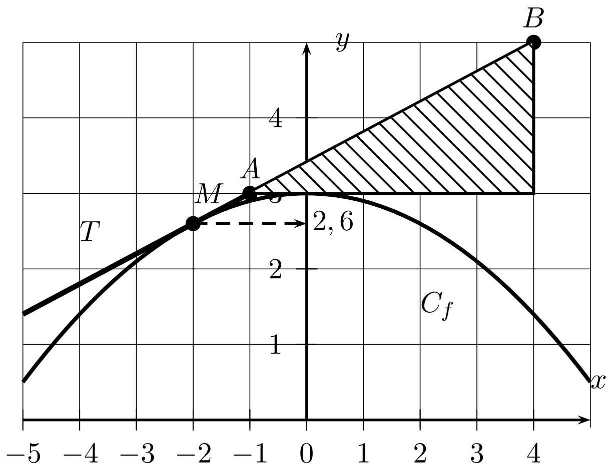
Si la courbe de f admet une droite tangente (AB) non "verticale" au point d'abscisse $x = x_0$
Alors

$$\left\{\begin{array}{l} \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } x_0 \text{ noté } \boxed{f'(x_0)} \\ \\ \text{est } \boxed{\text{le coefficient directeur de la droite } (AB) \text{ tangente à la courbe de } f \text{ en } x_0} \end{array}\right. , \boxed{f'(x_0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Remarques et exemple : *(admis si non démontré)*

i. si C_f admet une droite non verticale tangente au point d'abscisse $x = x_0$ on dit que f est *"dérivable en x_0"*
ii. on peut, par abus de langage, dire que $f'(x_0)$ est le *"coefficient directeur de la courbe en x_0"*
iii. Le coefficient directeur est nul $\Longleftrightarrow$ la tangente est parallèle à l'axe (ox)
iv. ci contre : avec $A(-1;3)$ et $B(4;5)$

$$f'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{4-(-1)} = 0,4$$



1.3.2 équation de la droite tangente à la courbe de f en $x = x_0$

propriété 1 : *(équation de la tangente)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$ un nombre

Si la fonction f est dérivable en x_0
alors la courbe C_f de f admet une droite tangente T d'équation $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

(admis)

Exemple : pour la droite (AB) ci dessus, tangente à C_f en $x_0 = -2$

l'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $\left\{\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ \\ f(x_0) = f(-2) = 2,6 \\ \\ f'(x_0) = f'(-2) = 0,4 \end{array}\right.$

soit : $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$

donc : $y = 0,4(x + 2) + 2,6$

donc : $y = 0,4x + 0,8 + 2,6$

conclusion $\quad y = 0,4x + 3,4$

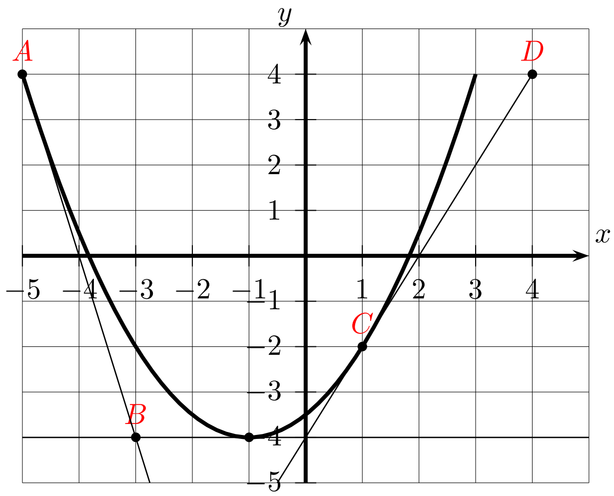
Autres exemples

Pour la fonction f représentée ci contre on détermine graphiquement que

$$f'(-5) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-4}{-3-(-5)} = -4$$

$f'(-1) = 0$ (tangente horizontale)

$$f'(1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-(-2)}{4-1} = 2$$



Pour le graphique ci dessus, on détermine graphiquement que :

L'équation de la tangente à la courbe en $x = -5$ est :
$y = f'(-5)(x-(-5)) + f(-5) \iff y = -4(x+5)+4 \iff y = -4x-16$

L'équation de la tangente à la courbe en $x = -1$ est :
$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) \iff y = 0(x+1)+(-4) \iff y = -4$

L'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$ est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 2(x-1)+(-2) \iff y = 2x-4$

1.3.3 lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f

définition 2 : *(fonction dérivable et fonction dérivée)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

(1) f est dérivable sur $I \Longleftrightarrow$ quel que soit $x_0 \in I$, f admet un nombre dérivé en x_0

(2) la fonction dérivée de f est notée f', elle associe à tout $x \in I$ le nombre $f'(x)$

propriété 2 : *(signe de f' et sens de variation de f)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f'
le sens de variation de f est en lien direct avec le signe de la dérivée f'

$$\begin{cases} \boxed{\text{f est strictement croissante}} \text{ sur } I \Longleftrightarrow f'(x) > 0 \text{ quel que soit } x \in I \quad \boxed{f' \textit{ strictement positive}} \\ \boxed{\text{f est strictement décroissante}} \text{ sur } I \Longleftrightarrow f'(x) < 0 \text{ quel que soit } x \in I \quad \boxed{f' \textit{ strictement négative}} \\ \boxed{\text{f est constante}} \text{ sur } I \Longleftrightarrow f'(x) = 0 \text{ quel que soit } x \in I \quad \boxed{f' \textit{ nulle}} \end{cases}$$

(admis)

Remarque :
- Ceci permet de trouver graphiquement le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
- Ceci permet d'étudier les variations d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée.

Exemples

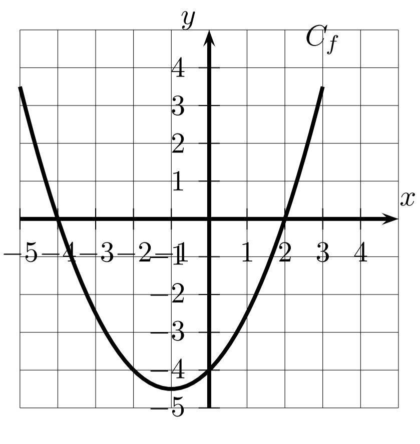
Pour la fonction f représentée ci contre on détermine graphiquement que :

x	-5 3
$f'(x)$	
$f(x)$	

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow$

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow$



Soit g une fonction telle que $g' = f$ où f est la fonction ci dessus.
Donner le tableau de signes de g' ainsi que le tableau de variations de g

x	-5 3
$g'(x) = f(x)$	
$g(x)$	

corrigé exemple :

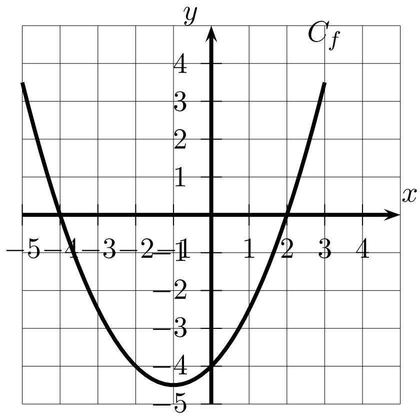
Pour la fonction f représentée ci contre
on détermine graphiquement que :

x	-5	-1	$+3$
$f'(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\simeq 3,5$ $\searrow$	$\simeq -4,5$	$\nearrow$ $\simeq 3,5$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{1\}$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]-1; 3]$

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in [-5; -1[$



Soit g une fonction telle que $g' = f$ où f est la fonction ci dessus.
Donner le tableau de signes de g' ainsi que le tableau de variations de g

x	-5		-4		2		3
$g'(x) = f(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$g(x)$	?	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?

? par manque de données sur g

1.3.4 dérivées usuelles et opérations sur les fonctions

propriété 3 : *(dérivées usuelles)*

$f(x)$	$f'(x)$	validité sur
$a \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax\ (a \in \mathbb{R})$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^3}$	$\dfrac{-3}{x^4}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
lnx	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

propriété 4 : *(dérivées et opérations sur les fonctions)*

u et v sont deux fonctions de dérivées respectives u' et v'

$f(x)$	$f'(x)$	validité sur
$au\ (a \in \mathbb{R})$	au'	où u est définie
$u + v$	$u' + v'$	où u et v sont définies
$u - v$	$u' - v'$	où u et v sont définies
$u^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$	où u est définie
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$	où u est définie et $u \neq 0$
$\dfrac{1}{u^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	où u est définie et $u \neq 0$
uv	$u'v + uv'$	où u et v sont définies
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	où u et v sont définies et $v \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	où u est définie et $u \geq 0$
e^u	$u'e^u$	$\mathbb{R}$
lnu	$\dfrac{u'}{u}$	où u est définie et $u > 0$

(admis)

Remarque :

on peut calculer la dérivée f' d'une fonction f pour en étudier le signe et déduire les variations de f.

Exemples :

(a) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 10x + 12 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - 4\sqrt{x}$

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 10x + 12 + \dfrac{1}{x} - 3 \times \dfrac{1}{x^2} - 4\sqrt{x}$

$f'(x) = 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 10 + 0 + \dfrac{-1}{x^2} - 3 \times \dfrac{-2}{x^3} - 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 12x^2 + 10x - 10 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

On reconnaît que f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

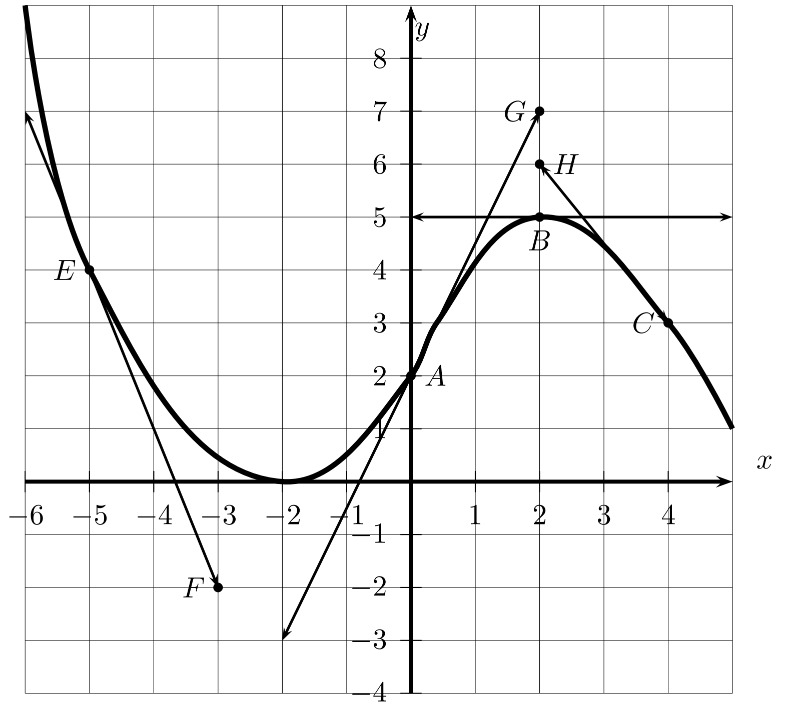
avec : $\begin{cases} u = x^2 - 3x + 6 \Longrightarrow u' = 2x - 3 \\ v = x - 1 \Longrightarrow v' = 1 \end{cases}$

donc $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 6) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

1.4 exercices

exercice 1 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.
Les tangentes à la courbe en E, A, B et C sont aussi représentées



(a) Lire
  i. $f(4)$ et $f'(4)$
  ii. $f(2)$ et $f'(2)$
  iii. $f(0)$ et $f'(0)$
  iv. $f(-5)$ et $f'(-5)$
  v. $f(-2)$ et $f'(-2)$

(b) en déduire les équations des tangentes à la courbe

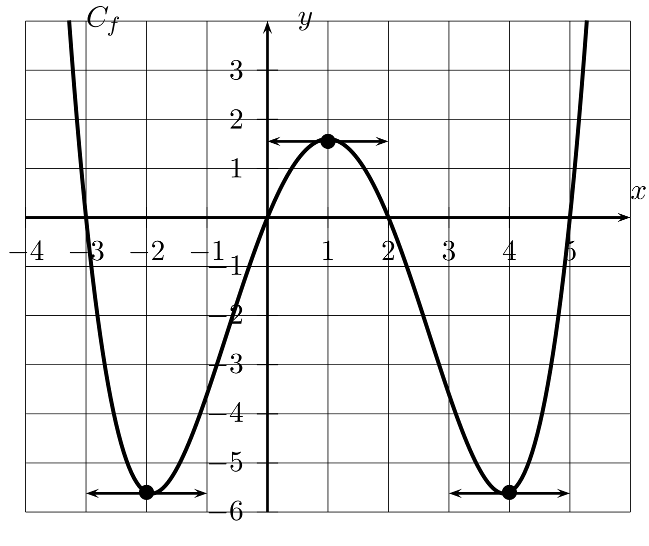
(c) donner l'ensemble des solutions de
  i. $f(x) = 0$
  ii. $f'(x) = 0$

(d) donner le tableau de signes de $f(x)$

(e) donner le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f

exercice 2 :

soit la fonction f dont on dispose de la courbe C_f pour $x \in [-3,25\ ;\ 5,25]$



(a) estimer à 0,1 près : $f(-2), f(1)$ et $f(4)$

(b) estimer : $f'(-2)$, $f'(1)$ et $f'(4)$

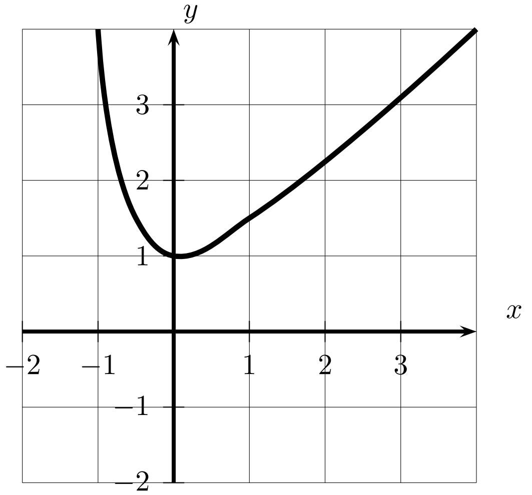
(c) donner les signes de :
$f(-1)$, $f'(-1)$, $f(1,5)$, $f'(1,5)$, $f(3)$, $f'(3)$

(d) donner l'ensemble des solutions de :
  i. $f(x) = 0$
  ii. $f'(x) = 0$
  iii. $f(x) > 0$
  iv. $f'(x) > 0$
  v. $f(x) < 0$
  vi. $f'(x) < 0$

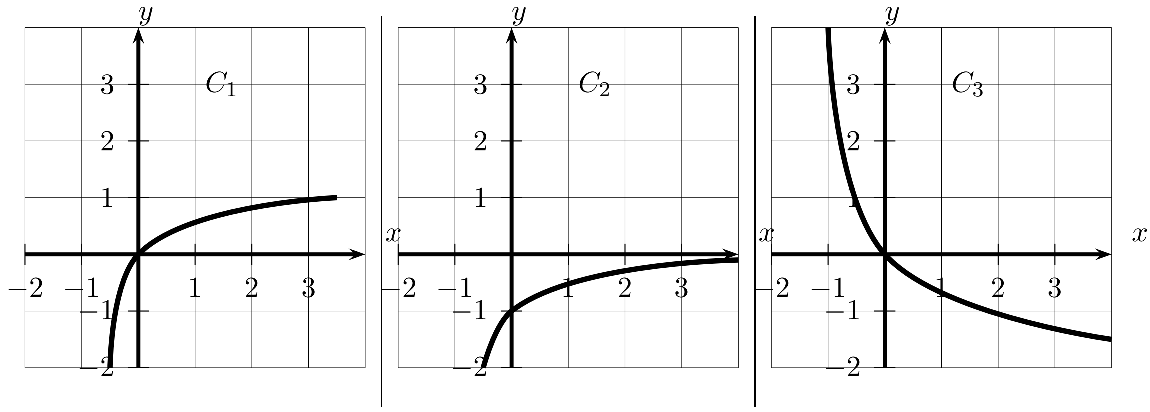
(e) donner le tableau de variations complet de f *(avec le signe de $f'(x)$)*

exercice 3 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.

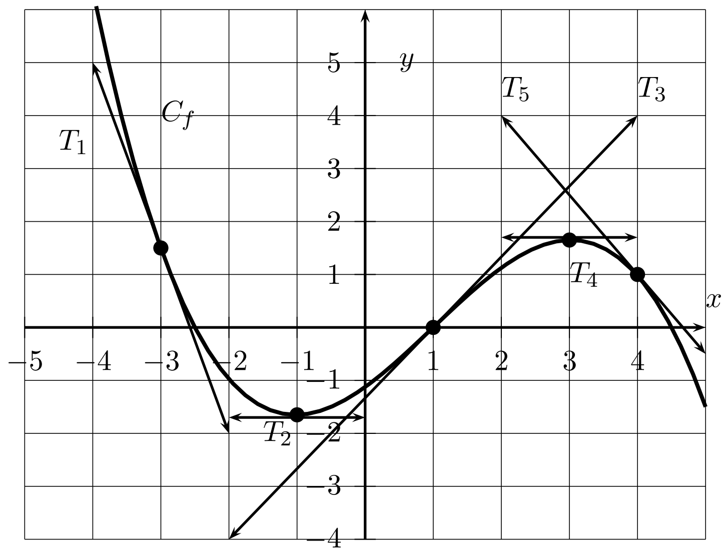


Laquelle des courbes ci dessous est la courbe de f' où f' est la dérivée de la fonction f ? (justifier)



exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $[-4;\ 5]$ dont on dispose de la courbe ci dessous



(a) déterminer chacune des valeurs suivantes *(exacte ou à 0,1 près)*
   i. $f(-3),\ f(-1),\ f(1),\ f(3),\ f(4)$
   ii. $f'(-3),\ f'(-1),\ f'(1),\ f'(3),\ f'(4)$

(b) estimer le signe de :
   i. $f(-3,5),\ f'(-3,5)$
   ii. $f(-2),\ f'(-2)$
   iii. $f(0),\ f'(0)$
   iv. $f(2),\ f'(2)$

(c) donner le tableau de signes de $f(x)$

(d) donner le tableau de signes de $f'(x)$

(e) donner le tableau de variation de f *(signe de $f'(x)$ compris)*

(f) déterminer les équations des droites tangentes $T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$ et T_5

exercice 5 :

(a) calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

i. $f(x) = 5x - 10$
ii. $f(x) = 5 - 4x$
iii. $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$
iv. $f(x) = -5x^2 + 10x - 12$
v. $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x - 7$
vi. $f(x) = -10x^3 + 12x^2 - 7x + 8$
vii. $f(x) = 5x - 10 + \dfrac{1}{x}$
viii. $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{2}{x}$
ix. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$
x. $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{10}{x^4}$

(b) calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

i. $f(x) = (5x - 10)^2$
ii. $f(x) = (5 - 4x)^3$
iii. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 12}$
iv. $f(x) = \dfrac{1}{-5x^2 + 10x - 12}$
v. $f(x) = \dfrac{1}{(3x + 4)^2}$
vi. $f(x) = x\sqrt{x}$
vii. $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$
viii. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$
ix. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 4}$
x. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 5}$
xi. $f(x) = \dfrac{10x + 5}{5x - 3}$
xii. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$

exercice 6 : **Exemples d'études de fonctions du second degré**

(a) pour chacun des cas ci dessous
- calculer $f'(x)$
- étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$
- en déduire le tableau de variations de f

i. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$
ii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$

(b) un artiste réalise et vend de petites créations sur le marché et remarque qu'en moyenne :
- s'il vend ses créations 90 € alors il en vend 10 par mois
- chaque baisse de prix de 1 € augmente le nombre de ventes mensuelles de 5 ventes
- chaque création lui coûte 40 €
- la location mensuelle de l'emplacement de ventes est de 600 €

i. calculer le bénéfice mensuel réalisé par l'artiste
A. s'il ne baisse pas son prix de vente
B. s'il baisse son prix de 4 €
C. s'il baisse son prix de 44 €

ii. montrer que s'il baisse le prix de vente de x € alors le bénéfice mensuel est donné par :
A. $B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600$
B. $B(x) = -5x^2 + 240x - 100$

iii. étudier les variations de B sur $[-2; 90]$

iv. en déduire le prix de vent "idéal" (pour l'artiste) ainsi que le bénéfice maximal

exercice 7 : **Exemples d'études de fonctions du troisième degré**

(a) pour chacun des cas ci dessous
- vérifier que $f'(x)$ est bien égal à ce qui est proposé
- étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$
- en déduire le tableau de variations de f sur $[-10;10]$

i. f est définie par : $\begin{cases} f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x \\ f'(x) = -2(2x-4)(3x+12) \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

ii. f est définie par : $\begin{cases} f(x) = -8x^3 + 60x^2 - 150x + 125 \\ f'(x) = -6(2x-5)^2 \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

iii. f est définie par : $\begin{cases} f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \\ f'(x) = 9(x-1)^2 + 1 \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

exercice 8 : Le coût total de production, en euros, de x centaines de kg de produit est donné par :

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 100 \text{ pour } x \in [0\ ;\ 10].$$

La recette des ventes est donnée par : recette = prix de vente unitaire×nombre de ventes = R(x)= $p_u \times x$
Le bénéfice est donné par : Bénéfice = recette - coût total = $B(x) = R(x) - C(x)$
La centaine de kg de produit est vendu 50 euros.

(a) Etude du bénéfice.

i. Montrer que le bénéfice est donné par $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 100$.

ii. Montrer que $B'(x) = (-3x+18)(x+2)$ et en déduire les variations de B sur $[0\ ;\ 10]$.

iii. En déduire la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal et donner à un euro près ce bénéfice maximal

iv. Retrouver la courbe du coût et celle de la recette parmi celles données ci dessous et retrouver graphiquement le bénéfice maximal par deux méthodes. (expliquer)

(b) Intervalle de rentabilité.

i. Déduire du graphique ci dessous le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$ sur $[0\ ;\ 10]$.

ii. Déterminer chacune d'elle à 10^{-2} près grâce à la calculatrice.

iii. En déduire le signe de $B(x)$ sur $[0\ ;\ 10]$.

iv. En déduire les valeurs de la production qui donnent un bénéfice positif strict.

v. Retrouver l'intervalle de rentabilité graphiquement par deux méthodes.

(c) Prix minimal de vente.

Pour un prix de vente de a euros la centaine de kilos, la recette est donnée par $R(x) = ax$
Déterminer graphiquement la valeur minimale de a pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice.

exercice 9 : **étude de fonction rationnelle**

ce mois ci, une centrale de distribution fournit de manière exclusive 120 magasins d' un département qui compte 150 points de ventes au total.

on suppose que dans ce département, en moyenne et chaque mois, il se crée 4 nouveaux points de ventes et que la centrale de distribution arrive à convaincre un de ces 4 nouveaux points de ventes d'être son fournisseur exclusif.

i. calculer selon les données ci dessus la proportion des points de ventes que « détient » la centrale ce mois ci ainsi que dans 30 ans.

ii. montrer que la proportion des points de ventes détenus par la centrale dans x mois est donnée par $p(x) = \dfrac{x+120}{4x+150}$ pour $x \geq 0$

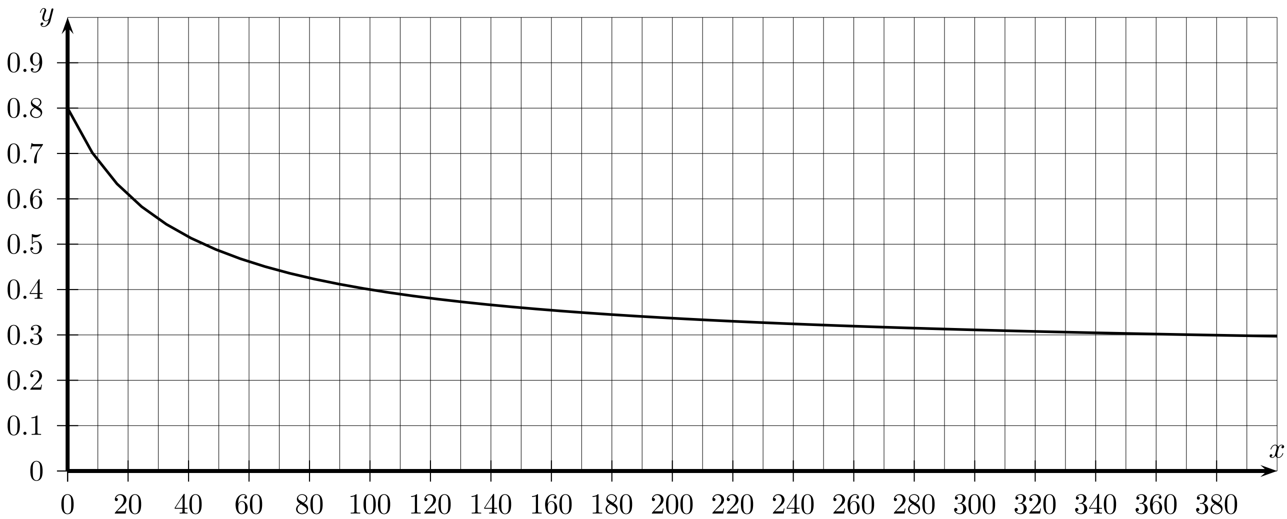
iii. étudier les variations de p sur $x \in [0;360]$

iv. la centrale de distribution gagne t-elle ou perd-elle des points de ventes mensuellement ? (justifier)

v. dans combien de mois la centrale n'aurait-elle plus que 40% (puis 25%) des points de ventes ?

vi. que semble t-il pour le pourcentage quand x devient très grand ($x = 10000$ par exemple) ? donner une interprétation graphique.

Annexe : (courbe de p)



exercice 10 : **étude de fonction rationnelle**

il y a actuellement 10000 personnes dans un stade dont 4000 femmes et 6000 hommes
on suppose qu'il part chaque minute 100 femmes et 100 hommes (sans aucune arrivée)

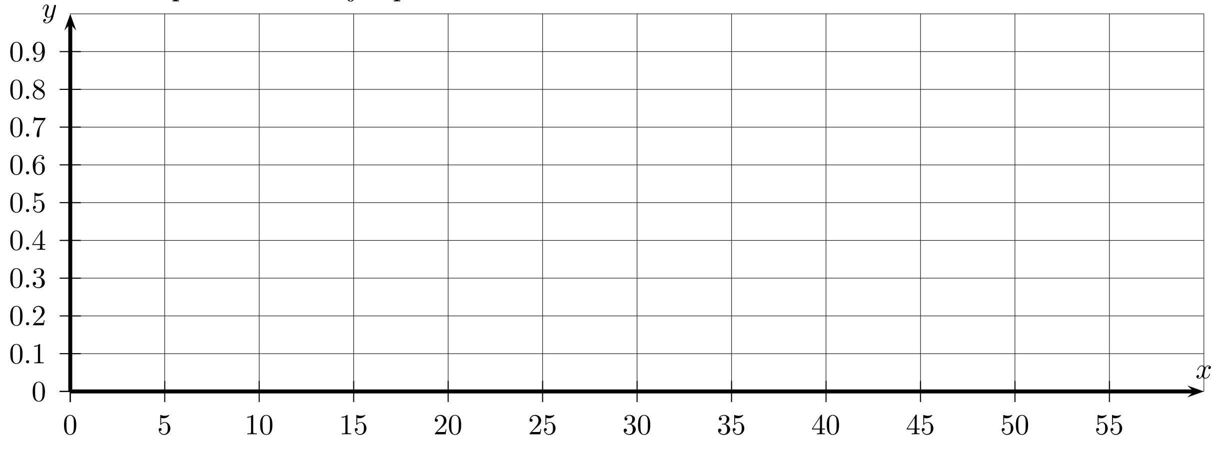
i. calculer la proportion d'hommes actuellement ainsi que dans une une demi-heure.

ii. montrer que la proportion d'hommes dans x mn est donnée par $h(x) = \dfrac{-x+60}{-2x+100}$ pour $0 \leq x \leq 40$

iii. étudier les variations de h sur $[0;40]$

iv. commentez la "variation des hommes" dans le stade sur les premières 40 minutes de sortie du stade

v. tracer la courbe de h, pour la sortie des hommes du stade sur les premières 40 minutes de sortie et compléter celle ci jusqu'au moment où le stade est vide



exercice 11 : **étude de fonction rationnelle**

(a) soit C la fonction définie par $C(x) = 6x^2 - 240x + 5400$ sur $[10; 90]$

soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ sur $[10; 90]$

i. montrer que pour la fonction f, on peut aussi écrire : $f(x) = 6x - 240 + \dfrac{5400}{x}$

ii. calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{6(x-30)(x+30)}{x^2}$

iii. en déduire les variations de f sur $[10; 90]$

iv. en déduire les extremums de f sur $[10; 90]$

(b) Dans une entreprise

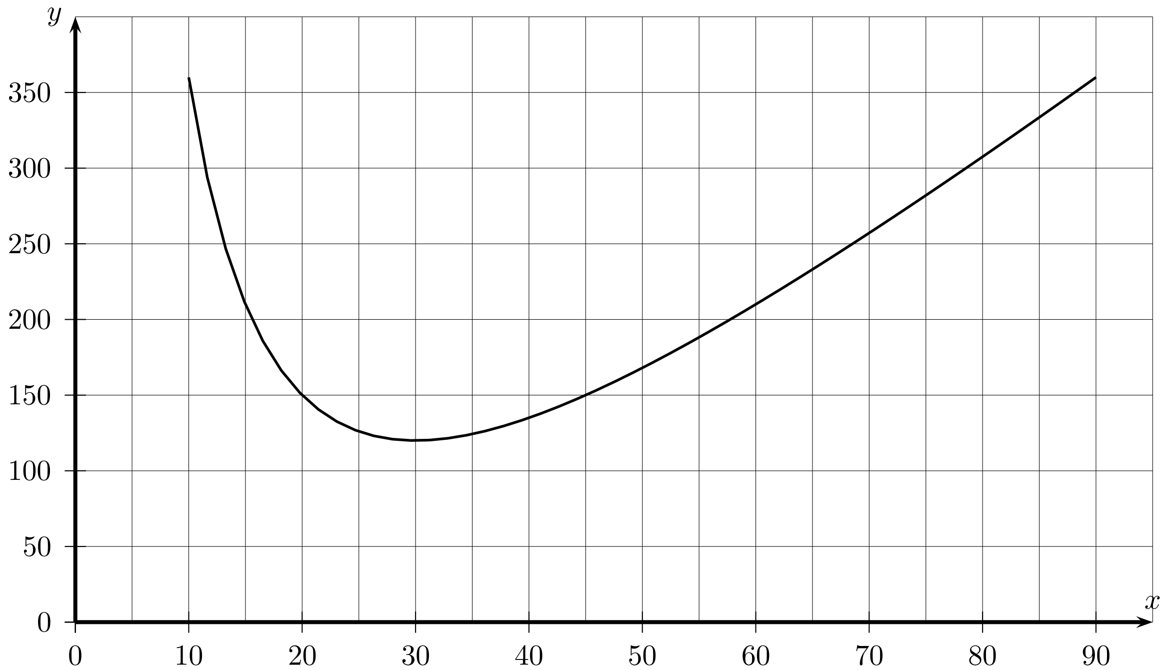
le coût total de production de q objets est donné en euros par $C(q) = 6q^2 - 240q + 5400$ pour $q \in [10; 90]$

le coût moyen unitaire pour la fabrique de q objets est noté $C_m(q)$

i. montrer que $C_m(q) = f(q)$ où f est la fonction de la partie précédente

ii. déduire de l'étude de f la valeur de la production pour laquelle le coût moyen unitaire est minimum ainsi que la valeur du coût unitaire associée

iii. retrouver ce résultat graphiquement ci dessous grâce à la courbe de f



(c) le prix de vente unitaire est de 150 € par objets

i. tracer dans le repère précédent la droite d'équation $y = 150$

ii. en déduire les valeurs de la production pour lesquelles le coût moyen de production par objet est strictement inférieur à 150 euros et en déduire l'intervalle de rentabilité.

iii. sous quel prix de vente unitaire ne faut-il pas descendre sous peine de ne pas pouvoir réaliser un bénéfice (positif) ?

iv. montrer que le bénéfice des ventes de x objets est donné par $B(x) = -6x^2 + 390x - 5400$ sur $[10; 90]$

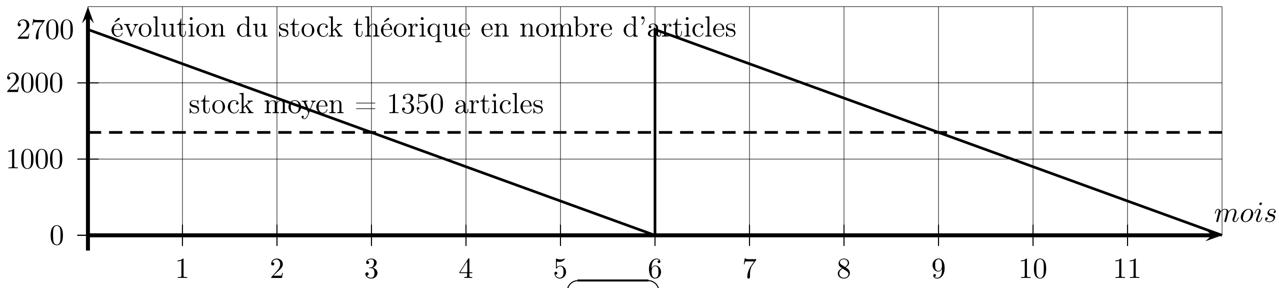
v. étudier les variations de B sur $[10; 90]$ et en déduire la production qui assure un bénéfice maximal

vi. est-ce la même production qui minimise le coût unitaire et qui maximise le bénéfice ? laquelle des deux options est préférable pour l'entreprise ?

vii. peut-on retrouver "simplement" le bénéfice maximal grâce au graphique ci dessus ?

exercice 12 : fonction rationnelle et modèle de Wilson - Coût de Passation, Coût de Possession

(a) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à 5400 articles.
Le prix de chaque article est de 10 euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de 120 euros. *(frais de dossier, ...)*
Le coût de possession est de 16% du stock moyen en euros *(coût de stockage proportionnel au stock)*
On suppose les délais de réapprovisionnement nuls et une livraison immédiate.
On cherche le nombre de commandes idéal dans le sens ou il minimise le coût total constitué de la somme du coût de passation et du coût de possession.
Par exemple :
pour 2 commandes de $\dfrac{5400}{2} = 2700$ articles



le coût de passation est de $C_{pas} = 2 \times 120 = \boxed{240 \text{ €}}$

stock moyen en articles : $S_{ma} = \dfrac{\dfrac{5400}{2} + 0}{2} = 1350$ articles , soit en euros : $S_m = 1350 \times 10 = \boxed{13500 \text{ €}}$

le coût de possession est donné par : $C_{pos} = 16\% \ de \ S_m = \dfrac{16}{100} \times 13500 = \boxed{2160 \text{ €}}$

le coût total pour 2 commandes est donc $C_T = C_{pos} + C_{pas} = 240 + 2160 = \boxed{2400 \text{ €}}$

i. montrer que pour 3 commandes annuelles le coût total est de $C_T(3) = 1800$ €

ii. montrer que pour $x \geq 1$ commandes annuelles le coût total est donné par $C_T(x) = 120x + \dfrac{4320}{x}$

iii. montrer que $C'_T(x) = \dfrac{120(x-6)(x+6)}{x^2}$

iv. en déduire les variations de C_T sur $[0; 100]$

v. en déduire le nombre x_0 de commandes à choisir pour un coût total minimum

vi. comparer les coûts de passation et de possession dans le cas de x_0 commandes

(b) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à C articles.
Le prix de chaque article est de p euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de P euros. *(frais de dossier, ...)*
Le coût de possession est de t% du stock moyen en euros *(coût de stockage proportionnel au stock)*
Soit x le nombre de commandes dans l'année pour assurer la consommation prévisionnelle.

i. montrer que le coût total est donné par $C_T(x) = Px + \dfrac{tCp}{200x}$

ii. montrer que $C'_T(x) = \dfrac{P(x - \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})(x + \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})}{x^2}$

iii. étudier le signe de $C'_T(x)$ et en déduire les variations de C_T
en déduire le nombre de commandes x_0 à choisir pour un coût total minimum

(c) à l'aide de la deuxième partie, retrouver le résultat trouvé à la première partie pour x_0 en prenant les bonnes valeurs de t, C, P et p

1.5 corrigés exercices

1.6 devoir maison

1.6.1 corrigé devoir maison 1

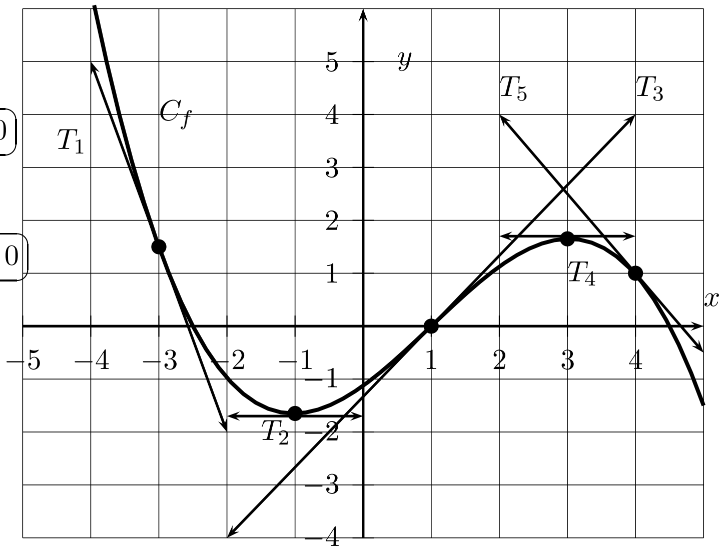
corrigé devoir maison

exercice 1 :

$\boxed{\text{Seule } C_1 \text{ peut-être la courbe de } f'}$
En effet :
D'après la courbe de f, $f'(x)$ s'annule pour $x = 0$ (C_f a une tangente horizontale en $x = 0$) donc $f'(0) = 0$ donc C_2 ne convient pas.
De plus, d'après la courbe de f, f décroît sur $]-1; 0]$ donc $f'(x) < 0$ sur $]-1; 0]$ donc C_3 ne convient pas.

exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $[-4;\ 5]$ dont on dispose de la courbe ci dessous



(a) déterminer chacune des valeurs suivantes
(exacte ou à 0,1 près)
   i. $\boxed{f(-3) \simeq 1,5}$, $\boxed{f(-1) \simeq -1,6}$, $\boxed{f(1) = 0}$
   $\boxed{f(3) \simeq 1,8}$, $\boxed{f(4) = 1}$
   ii. $\boxed{f'(-3) = \dfrac{-2-5}{-2-(-4)} = -3,5}$, $\boxed{f'(-1) = 0}$
   $\boxed{f'(1) = \dfrac{4-0}{4-1} = \dfrac{4}{3}}$, $\boxed{f'(3) = 0}$
   $\boxed{f'(4) = \dfrac{1-4}{4-2} = -1,5}$

(b) estimer le signe de :
   i. $\boxed{f(-3,5) > 0}$, $\boxed{f'(-3,5) < 0}$
   ii. $\boxed{f(-2) < 0}$, $\boxed{f'(-2) < 0}$
   iii. $\boxed{f(0) < 0}$, $\boxed{f'(0) > 0}$
   iv. $\boxed{f(2) > 0}$, $\boxed{f'(2) > 0}$

(c) tableau de signes de $f(x)$

valeur de x	-4		$\simeq -2,5$		1		$\simeq 4,5$		5
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

(d) tableau de signes de $f'(x)$ ci dessous

(e) tableau de variation de f

(f) tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f

valeur de x	-4		-1		3		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	$\simeq 6$	$\searrow$	$-1,6$	$\nearrow$	$\simeq 1,6$	$\searrow$	$\simeq -1,5$

(g) équations des droites tangentes
$T_1 : y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) = -3,5(x + 3) + 1,5$ donc $\boxed{y = -3,5x - 9}$
$T_2 : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = 0(x + 1) - 1,6$ donc $\boxed{y = -1,6}$
$T_3 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \dfrac{4}{3}(x - 1) + 0$ donc $\boxed{y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}}$
$T_4 : y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 0(x - 4) + 1,8$ donc $\boxed{y = 1,8}$
$T_5 : y = f'(4)(x - 4) + f(4) = -1,5(x - 4) + 1$ donc $\boxed{y = -1,5x + 7}$

exercice 3 : (101 p 63)

(a) $C_1 = 40 \times 220 = \boxed{8800 \text{ €}}$
$C_2 = 34 \times (-10 \times 34 + 620) = \boxed{9520\text{€}}$

(b) i. $\boxed{p(x) = (40 - x)}$
$n(x) = -10(40 - x) + 620 = -400 + 10x + 620 = \boxed{10x + 220}$

ii. $C(x) = (40 - x)(10x + 220) = 400x + 8800 - 10x^2 - 220x = \boxed{-10x^2 + 180x + 8800}$

(c) i. $\boxed{C'(x) = -20x + 180}$

ii. $C'(x) = -20x + 180$
Annulation de $C'(x)$: $-20x + 180 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-180}{-20} = 9$
variations de f et signe de $C'(x) = -20x + 180$: on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$ (signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	0		9		11
$C'(x)$		$+$	0	- $(a = -20)$	
$C(x)$	8800	$\nearrow$	9610	$\searrow$	9570

$C(0) = 8800$

(d) le prix idéal pour le vendeur est de $40 - 9 = \boxed{31 \text{ €}}$
pour une recette maximale de $\boxed{9610\text{euro}}$

exercice 4 : (104 p 64)

(a) $C(12) = 2 \times 12^3 - 54 \times 12^2 + 470 \times 12 + 80 = \boxed{1400}$
$R(12) = 12 \times 200 = \boxed{2400}$
$B(12) = R(12) - C(12) = 2400 - 1400 = \boxed{1000}$

(b) i. $\boxed{R(x) = 200x}$

ii. $B(x) = 200x - (2x^3 - 54x^2 + 270x + 80) = \boxed{-2x^3 + 54x^2 - 470x - 80}$

(c) i. $\boxed{f'(x) = -6x^2 + 108x - 270}$

$-6(x - 3)(x - 15) = -6(x^2 - 15x - 3x + 45) = -6(x^2 - 18x + 45) = -6x^2 + 108x - 270 = f'(x)$

ii.

x	0		3		15		21
-6		-	|	-	|	-	
$x - 3$		-	0	$+$	|	$+$	
$x - 15$		-	|	-	0	$+$	
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$f(x)$	-80	$\searrow$	-458	$\nearrow$	1270	$\searrow$	-458

annulations

$x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$

$x - 15 = 0 \Longleftrightarrow x = 15$

iii. le bénéfice est maximal pour une production de $\boxed{15 \text{ objets}}$
le bénéfice maximal est de $\boxed{1270\text{€}}$

1.6.2 corrigé devoir maison 2

corrigé devoir maison

exercice 1 : (105 page 65)

(a) Etude d'une fonction

i. $f(x) = x + \dfrac{900}{x}$

$\boxed{f'(x) = 1 - \dfrac{900}{x^2}}$

d'autre part :

$$\frac{(x-30)(x+30)}{x^2} = \frac{x^2-900}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{900}{x^2} = 1 - \frac{900}{x^2} = f'(x)$$

donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}}$$

ii. $\dfrac{(x-30)(x+30)}{x^2}$ est du signe $x-30$ sur $[10;90]$ car $x^2 > 0$ et $x+30 > 0$ sur $[10;90]$

d'où le tableau :

x	10		30		90
$x-30$		-	0	+	
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	100	$\searrow$	60	$\nearrow$	100

annulation

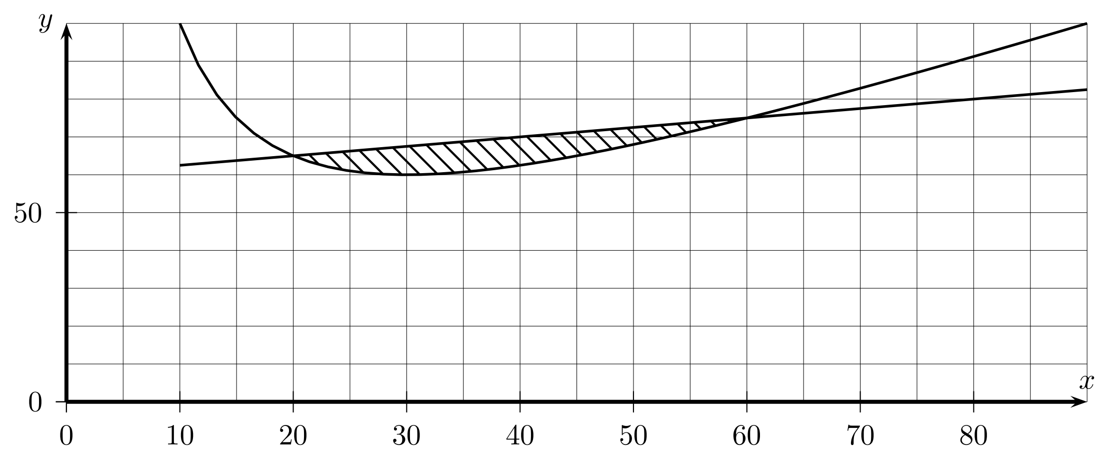
$x - 30 = 0 \Longleftrightarrow x = 30$

$f(10) = 10 + \dfrac{900}{10} = 100$

iii. A.

x	10	20	30	40	5	60	70	80	90
$f(x)$	100	65	60	62,5	68	75	82,9	91,3	100

B. courbe



iv. A. $g(20) = 0,25 \times 20 + 60 = 65$ donc $A(20;65) \in D$

$g(60) = 0,25 \times 60 + 60 = 75$ donc $B(60;75 \in D$

B. D construite ci dessus

(b) application économique

i. le coût minimal vaut $\boxed{60 \text{ €}}$ pour une production de $\boxed{30 \text{ objets}}$

ii. $\boxed{\text{intervalle de rentabilité} =]20;60[}$

1.6.3 corrigé devoir maison 3

<u>exercice 1 :</u> (124 page 81)

A. 1. (a) $\boxed{f'(x) = -0,8x + 4}$

(b)

x	0		5		10
$f'(x)$		$+$	0	- $(a = -0,8)$	
$f(x)$	-8	$\nearrow$	2	$\searrow$	-8

(c) $f'(x) = -0,8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4}{-0,8} = 5$

$f(0) = -0,4 \times 0^2 + 4 \times 0 - 8 = -8$

(d) le maximum vaut 2 pour $x = 5$

2. $\boxed{= -0,4 * A2 \wedge 2 + 4 * A2 - 8}$

B. 1. recette $= R(3) = 5,5 \times 3 = \boxed{16,5}$ mililers d'euros

bénéfice $= R(3) - C(3) = 16,5 - (0,4 \times 3^2 + 1,5 \times 3 + 8) = \boxed{0,4}$

2. $B(q) = R(q) - C(q) = 5,5q - (0,4q^2 + 1,5q + 8) = \boxed{-0,4q^2 + 4q - 8}$

3. (a) $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow -0,4q^2 + 4q - 8 \geq 0$

on utilise la règle du signe d'un trinôme

$\begin{cases} a = -0,4 \\ b = 4 \\ c = -8 \end{cases} \qquad \Delta = 3,2 \qquad x_1 \simeq 2,76$ et $x_2 \simeq 7,24$

il faut donc produire $\boxed{\text{entre 3 et 7 chaudières}}$

(b) il faut une production de $\boxed{\text{5 chaudières}}$ pour un bénéfice maximal

(c) $\boxed{\text{Bénéfice maximal = 2 milliers d'euros}}$

<u>exercice 2 :</u> (125 page 81)

A. 1.

x	0	1	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	126	165	186	198	210	270	426	726

2.

x	0		12
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	126	$\nearrow$	726

3. (a) $f(x) = 500 \Leftrightarrow x \simeq 10,5$ donc $\boxed{\alpha \simeq 10,5}$

(b)

x	10,5	10,6	10,7
$f(x)$	$\simeq 486$	$\simeq 499$	$\simeq 512$

(c) $\boxed{10,6 < \alpha < 10,7}$

B. 1. $\boxed{\text{charges fixes = 126 €}}$

2. le coût total est de 500 € pour une $\boxed{\text{production comprise entre 10,6 et 10,7 kg}}$

exercice 3 : (exercice 6 b) polycopié)

1. calculer le bénéfice mensuel réalisé par l'artiste
   (a) s'il ne baisse pas son prix de vente :
   $B(0) = 90 \times 10 - 40 \times 10 - 600 = 900 - 400 - 600 = \boxed{-100}$
   (b) s'il baisse son prix de 4 € :
   $B(4) = (90-4) \times (10 + 5 \times 4) - 40(10 + 5 \times 4) - 600 = 86 \times 30 - 40 \times 30 - 600 = \boxed{780}$
   (c) s'il baisse son prix de 44 € :
   $B(44) = (90-44) \times (10 + 5 \times 44) - 40(10 + 5 \times 44) - 600 = 46 \times 230 - 40 \times 230 - 600 = \boxed{780}$
2. montrer que s'il baisse le prix de vente de x € alors le bénéfice mensuel est donné par :
   (a) $B(x) = (90-x)(10+5x) - 40(10+5x) - 600$
   bénéfice = recette - coût total
   bénéfice = prix de vente × nombre de ventes - coût unitaire × nombre de ventes - coût fixe
   $\boxed{B(x) = (90-x)(10+5x) - 40(10+5x) - 600}$

   (b) $B(x) = -5x^2 + 240x - 100$
   $B(x) = (90-x)(10+5x) - 40(10+5x) - 600$ (on développe)
   $B(x) = 900 + 450x - 10x - 5x^2 - 400 - 200x - 600$
   $\boxed{B(x) = -5x^2 + 240x - 100}$
3. étudier les variations de B sur $[-2; 90]$

   • $\boxed{B'(x) = -10x + 240}$
   • Annulation de $f'(x)$: $-10x + 240 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-240}{-10} = \boxed{24}$
   • variations de B et signe de $B'(x) = -10x + 240$
   on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$
   (signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	-2		24		20
$B'(x) = -10x + 240$		+	0	- (a =-10)	
$B(x) = -5x^2 + 240x - 100$	-600	$\nearrow$	2780	$\searrow$	-19000

$B(24) = -5 \times 24^2 + 240 \times 24 - 100 = 2780$

4. en déduire le prix de vente "idéal" (pour l'artiste) ainsi que le bénéfice maximal
   $\boxed{\text{bénéfice maximal} = 2780 \text{ euros}}$
   prix idéal $= 90 - 24 = \boxed{66 \text{ euros}}$