Loi Binomiale

Table des matières

1 dénombrement et coefficients binomiaux **2**
- **1.1 activité** 2
- **1.2 a retenir** 3
- **1.3 exercices** 4
- **1.4 corrigés exercices** 5

2 loi binomiale **6**
- **2.1 activité** 7
- **2.2 corrigé activité** 8
- **2.3 à retenir** 10
- **2.4 exercices** 14
- **2.5 corrigés exercices** 16
- **2.6 évaluation** 24
- **2.7 devoir maison** 24
  - **2.7.1 corrigé devoir maison 1** 24

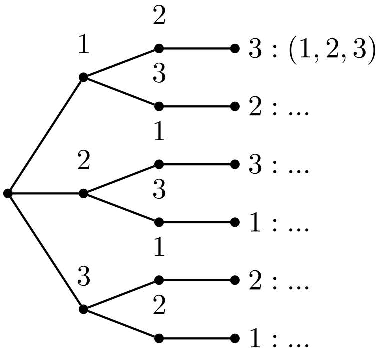
1 dénombrement et coefficients binomiaux

1.1 activité

1. **Nombre de permutations de n éléments $(n \in \mathbb{N}^*)$: $\boxed{n!}$ *(factoriel n)***

   Combien y a t-il de façons : $\left\{\begin{array}{l}\text{de ranger } n \text{ objets dans } n \text{ cases ? (un par case)} \\ \text{de ranger cote à cote } n \text{ objets ? (en ligne)} \\ \text{de "permuter" } n \text{ objets ?}\end{array}\right.$

   (a) **donner le nombre et toutes les façons de permuter 3 objets en s'aidant de l'arbre de dénombrement suivant *(donner un calcul)***

   il y a

   (b) **de même, nombre de permutations de 4 éléments = ...**

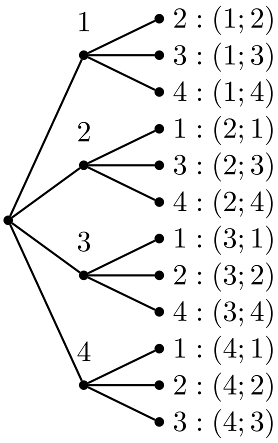
   (c) **nombre de permutations de 5 éléments = ...**

   (d) **nombre de permutations de n éléments $(n \in \mathbb{N}^*)$ = ...**

2. **Nombre d'arrangements de p éléments parmi n $(p \leq n)$: $\boxed{A_n^p}$**

   Combien y a t-il de façons : $\left\{\begin{array}{l}\text{de ranger } p \text{ objets dans } n \text{ cases ? (un par case et } p \leq n) \\ \text{de choisir et ranger } p \text{ objets parmi } n \text{ ?}\end{array}\right.$

   (a) **utiliser l'arbre de dénombrement ci dessous pour trouver le nombre de façons de choisir et ranger 2 objets parmi 4 objets**

   il y a ...

   (b) **nombre de façons de choisir et ranger 3 objets parmi 10 objets : $A_{10}^3 = ...$**

   (c) **nombre de façons de choisir et ranger 4 objets parmi 20 objets : $A_{20}^4 = ...$**

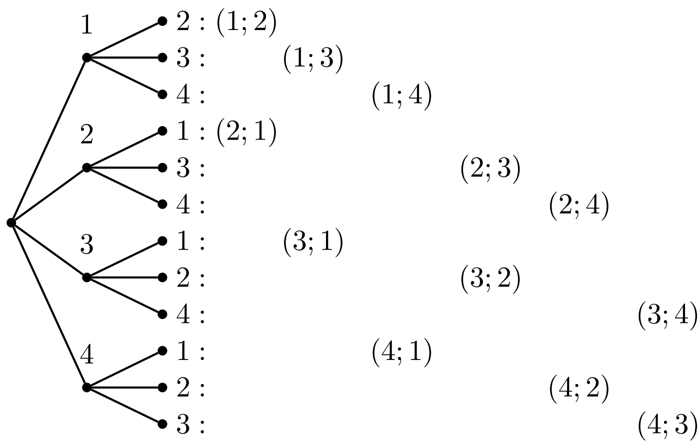
   (d) **donner une formule pour $(p \leq n)$: $A_n^p = ...$**

   (e) **vérifier que** $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

3. **Nombre de combinaisons de p éléments parmi n $(p \leq n)$: $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$**

   Combien y a t-il de façons de choisir sans ranger p objets parmi n ? ***(groupes de p objets)***

   (a) **notons C_{10}^2 le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4**
   « Pour trouver le nombre de combinaisons C_4^2 , il suffit de connaître le nombre d'arrangement de 2 éléments parmi 4 et de diviser par le nombre de façons de ranger les deux éléments soit 2! »
   on en déduit que $C_{10}^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{12}{2} = 6$

(b) **Donner une relation entre C_{20}^4, A_{20}^4 et $4!$ puis donner la valeur de C_{20}^4**

(c) **on note C_n^p ou encore $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le nombre de combinaisons de p éléments parmi n, exprimer $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ en fonction de A_n^p et $p!$**

en déduire l'expression de $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ en fonction de $n!$, $(n-p)!$ et $p!$

(d) **calculer C_{10}^3 à la main et vérifier à la calculatrice**

1.2 a retenir

propriété 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels avec $p < n$
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est noté $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$
avec $\boxed{C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$ **où** $\boxed{n! = n \times (n-1) \times ... \times 1}$ ***(factoriel n)*** **et** $\boxed{0! = 1}$

exemples :

en particulier on a : $\boxed{C_n^0 = C_n^{n-1} = 1}$ **et** $\boxed{C_n^n = 1}$
le nombre de groupes *(non ordonnés)* de 3 personnes parmi 30 est :
$C_{30}^3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

remarques :

i. **on remarque le triangle de Pascal**

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
...							

ii. **on remarque qu'il semble que :** $\boxed{C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}}$

iii. **on remarque qu'il semble que :** $\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n}$

iv. **on admettra que : quels que soient les réels a et b et l'entier naturel n, on a :**
$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}}$ **(formule du binôme)**

1.3 exercices

<u>exercice 1 :</u>

1. **combien y a t-il de groupes possibles de deux personnes parmi 16 ?**
2. **combien y a t-il de groupes de 3 chevaux parmi 15 ?**
3. **combien de groupes de 6 billes parmi 49 ?**
4. **combien de mots de 5 lettres avec :**
   (a) **zéro S et "le reste" de E**
   (b) **un S et le reste de E**
   (c) **2 S et le reste de E**
   (d) **3 S et le reste de E**
   (e) **4 S et le reste de E**
   (f) **5 S et "le reste" de E**
5. **on lance 5 fois une pièce de monnaie avec pile $=$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 3 succès parmi les 10 lancers ?
6. **on lance 7 fois un dé avec $6 =$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 4 succès parmi les 7 lancers ?

1.4 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

1. **combien y a t-il de groupes possibles de deux personnes parmi 16 ?**
2. **combien y a t-il de groupes de 3 chevaux parmi 15 ?**
3. **combien de groupes de 6 billes parmi 49 ?**
4. **combien de mots de 5 lettres avec :**
   (a) **zéro S et "le reste" de E**
   (b) **un S et le reste de E**
   (c) **2 S et le reste de E**
   (d) **3 S et le reste de E**
   (e) **4 S et le reste de E**
   (f) **5 S et "le reste" de E**
5. **on lance 5 fois une pièce de monnaie avec pile $=$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 3 succès parmi les 10 lancers ?
6. **on lance 7 fois un dé avec $6 =$ "succès"**
   combien y a t-il de façons d'obtenir exactement 4 succès parmi les 7 lancers ?

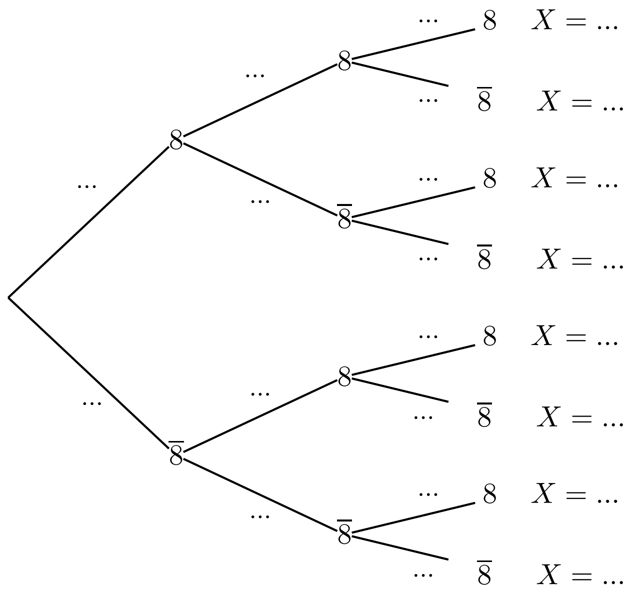
2 loi binomiale

2.1 activité

<u>*A.* **Exemple**</u>

Pour un dé bien équilibré à 8 faces, on s'intéresse aux événements :
Succès : « on obtient un 8 » et à son contraire Echec : « on n'obtient pas un 8 »
On lance le dé 3 fois de suite et de manières indépendantes
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a obtenu 8 parmi les 3 lancers
On cherche la loi de probabilité de X (qui sera une loi dite "binomiale" de paramètres à préciser)

1. **Pour un quelconque des 3 lancers, donner $p = p(8)$ et $q = p(\overline{8})$**
2. **Compléter l'arbre pondéré ci dessous et indiquer les valeurs de X en bout de branche ainsi que les probabilités associées**



3. **Donner les valeurs possibles pour X**
4. **Préciser combien de façons il y a d'obtenir deux 8 parmi 3 lancers noté C_3^2 ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et détailler le calcul de $p(X = 2)$**
5. **Donner la loi de probabilité de X (sous la forme d'un tableau)**
6. **On dit que X suit une loi ... de paramètre $p = ...$ et $n = ...$**

<u>*B.* **Généralisation**</u>

dans le cas où :

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } p \\ \text{échec : de probabilité : } q = 1 - p \end{cases} \end{cases}$$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres

$$(n, p) \text{ avec : } \begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}} \end{cases}$$

<u>*C.* **Application**</u>

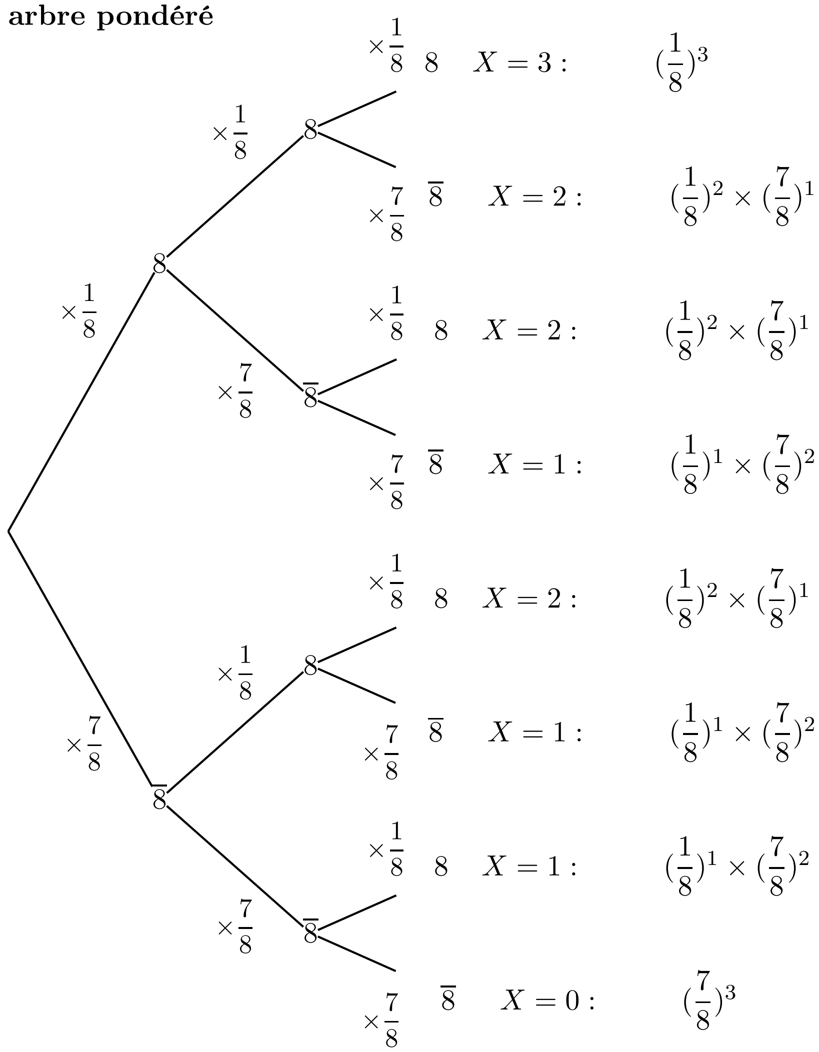
On joue 4 fois à "pile ou face" avec une pièce équilibrée et de manières indépendantes
Soit X le nombre de fois où l'on fait "pile". Donner la loi de probabilité de X

2.2 corrigé activité

<u>*A.* **Exemple**</u>

1. $p = p(8) = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ **et** $q = p(\overline{8}) = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{8} = \boxed{\dfrac{7}{8}}$

2. arbre pondéré



3. valeurs possibles pour X : $\boxed{X \in \{0, 1, 2, 3\}}$

4. il y a 3 façons d'obtenir deux 8 parmi 3 lancers, ce nombre est noté C_3^2 ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc :

$\boxed{C_3^2 = 3}$

$p(X = 2) = 3 \times (\dfrac{1}{8})^2 \times (\dfrac{7}{8})^3 = \boxed{\dfrac{21}{512}}$

5. loi de probabilité de X

k	0	1	2	3	**total**
$p(X = k)$	$(\frac{7}{8})^3 = \frac{343}{512}$ $\simeq 0,67$	$3 \times (\frac{1}{8}) \times (\frac{7}{8})^2 = \frac{147}{512}$ $\simeq 0,29$	$3 \times (\frac{1}{8})^2 \times (\frac{7}{8}) = \frac{21}{512}$ $\simeq 0,04$	$(\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{512}$ $\simeq 0$	$\frac{512}{512} = 1$ 1

6. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $\boxed{p = \dfrac{1}{8}}$ **et** $\boxed{n = 3}$

B. Généralisation

dans le cas où :

$\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } p \\ \text{échec : de probabilité : } q = 1-p \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,

la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres
(n,p) **avec :** $\left\{\begin{array}{l} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0,1,2,...,n\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} \end{array}\right.$

C. Application

On joue 4 fois à "pile ou face" avec une pièce équilibrée et de manières indépendantes
Soit X le nombre de fois où l'on fait "pile".
loi de probabilité de X

valeurs possibles pour X : $\boxed{X \in \{0,1,2,3,4\}}$

$$p(X=0) = C_4^0 \times (\frac{1}{2})^0 \times (1-\frac{1}{2})^{4-0} = 1 \times 1 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(X=1) = C_4^1 \times (\frac{1}{2})^1 \times (1-\frac{1}{2})^{4-1} = 4 \times (\frac{1}{2})^1 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{4}{16}$$

$$p(X=0) = C_4^2 \times (\frac{1}{2})^2 \times (1-\frac{1}{2})^{4-2} = 6 \times (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{6}{16}$$

$$p(X=0) = C_4^3 \times (\frac{1}{2})^3 \times (1-\frac{1}{2})^{4-3} = 4 \times (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^1 = \frac{4}{16}$$

$$p(X=0) = C_4^4 \times (\frac{1}{2})^4 \times (1-\frac{1}{2})^{4-4} = 1 \times (\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$$

k	0	1	2	3	4	**total**
$p(X=k)$	$\frac{1}{16}$ $0,0625$	$\frac{4}{16}$ $0,25$	$\frac{6}{16}$ $0,375$	$\frac{4}{16}$ $0,25$	$\frac{1}{16}$ $0,0625$	$\frac{16}{16} = 1$ 1

2.3 à retenir

<u>définition 1</u> *(épreuve de Bernoulli)*

> **Une expérience aléatoire**
> **pour laquelle on ne considère** $\boxed{\textbf{que deux issues contraires}}$ **succès** S **et échec** $\overline{S}$
> **est appelée** $\boxed{\textbf{"épreuve de Bernoulli"}}$

exemple :
On choisit une carte au hasard dans un jeu usuel de 32 **cartes :**

S **succès : "c'est une Reine"**

$\overline{S}$ **échec : "ce n'est pas une Reine"**

définit une épreuve de Bernoulli

<u>définition 2</u> *(loi de Bernoulli)*

> **La loi de Bernoulli de paramètre** p **est la loi de probabilité associée**
> **à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à** p ($p \in [0;1]$)
> **et la probabilité d'échec est** $q = 1 - p$

exemple :

Pour l'épreuve de Bernoulli (32 **cartes) :**

$\frac{4}{32}$ — S **succès : "c'est une Reine"**

$\frac{28}{32}$ — $\overline{S}$ **échec : "ce n'est pas une Reine"**

on a la "loi de Bernoulli" suivante :

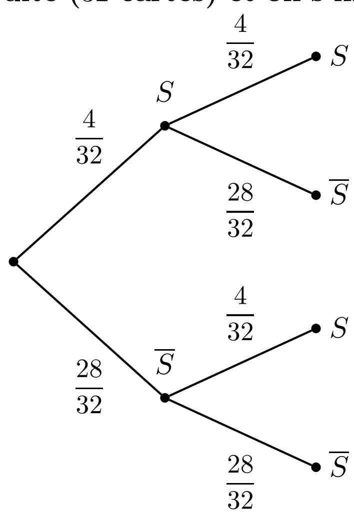
résultat	S	$\overline{S}$	Total
probabilité	$\frac{4}{32}$	$\frac{28}{32}$	1

<u>définition 3</u> **(Schéma de Bernoulli)**

> **Un "schéma de Bernoulli" est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli**
> **dans des conditions d'indépendance des épreuves**
> ***(elles sont indépendantes les unes des autres)***

exemple :
On choisit une carte, puis on la remet, ceci, deux fois de suite (32 **cartes) et on s'intéresse au fait que la carte soit une Reine ou non.**

On illustre le "schéma de Bernoulli" par l'arbre suivant :



<u>propriété 2</u> *(loi Binomiale)*

Dans le cas d'un "schéma de Bernoulli" où

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire } (n \in \mathbb{N}^*) \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } p \\ \text{échec : de probabilité : } q = 1 - p \end{cases} \end{cases}$$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec :

$$\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ \\ \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } n \ \boxed{p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}} \end{cases}$$

de plus,
la valeur moyenne (espérance) de X est $\boxed{E(X) = np}$ et l'écart type est $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$

exemple :
soit X le nombre de fois que l'on a obtenu une Reine pour 4 tirages indépendants avec remise dans un jeu de 32 cartes.
Les 3 conditions ci dessus sont vérifiées :

$$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 4 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } \frac{4}{32} \\ \text{échec : de proba : } q = 1 - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} \end{cases} \end{cases}$$

donc,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 4, p = \frac{4}{32})$ avec :

$$\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \\ \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } 4 \ \boxed{p(X = k) = C_4^k (\frac{4}{32})^k (\frac{28}{32})^{4-k}} \end{cases}$$

et par exemple :

$$p(X = 3) = C_4^3 \times (\frac{4}{32})^3 (1 - \frac{4}{32})^{4-3}$$

$$p(X = 3) = 4 \times (\frac{4}{32})^3 \times \frac{28}{32} \simeq \boxed{0,0068}$$

la valeur moyenne de X est $E(X) = np = 4 \times \frac{4}{32} = \boxed{0,5}$
pour une série de 4 lancers on obtient en moyenne "$0,5$ fois la Reine"

l'écart type est : $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times \frac{4}{32} \times \frac{28}{32}} = \boxed{0,4375}$

remarques :

i. avec la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{n-k}$

et en prenant $a = p$ **et** $b = n - p$

on obtient : $(p + (1-p))^n = 1^n = \boxed{\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1}$

ii. pour démontrer que $E(X) = np$

cela revient à montrer que : $\sum_{k=0}^{k=n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np$

cela revient à montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p$ **comme suit :**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \times p$$

$$= p\sum_{K=0}^{K=n} C_{n-1}^{K} p^{K} (1-p)^{(n-1)-(K)}$$

$$= p(p+(1-p))^{n-1}$$

$$= p$$

conclusion : $\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np}$

2.4 exercices

exercice 2 :

On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie non équilibrée 50 fois de suite et de manières indépendantes.
On considère que la probabilité de faire "pile" avec cette pièce est $p(pile) = 80\%$
Soit X le nombre de lancers parmi les 50 lancers où l'on a obtenu le résultat "pile"

1. **justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres**
2. **calculer les probabilités**
   (a) **d'obtenir exactement 39 piles**
   (b) **d'obtenir exactement 41 piles**
   (c) **d'obtenir entre 39 et 41 piles**
   (d) **d'obtenir au plus, 2 piles**
   (e) **d'obtenir au moins, 2 piles**
3. **calculer $E(X)$ et interpréter la valeur obtenue**
4. **calculer $\sigma(X)$**
5. **déterminer le nombre minimal de lancers à faire pour que la probabilité d'obtenir au moins un pile dépasse $99,99\%$**

exercice 3 :

Un élève répond au hasard et avec indépendance à chacune des dix questions d'un Q.C.M.
Pour chaque question, il y a trois propositions dont une seule est "bonne"
Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève (chaque question est sur un point)

1. **justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres**
2. **calculer la probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse**
3. **compléter le tableau suivant à 10^{-3} près**

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
$p(X = k)$	0,017		0,195		0,228		0,057	0,016	0,003	0	0	1

4. **quelle est la probabilité que l'élève ait la moyenne ?**
5. **quelle est la probabilité que l'élève n'ait pas la moyenne ?**
6. **calculer $E(X)$ et interpréter cette valeur**
7. **combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99% ?**

exercice 4 :

On s'intéresse, dans cet exercice, à la masse des pots de confitures produits dans une usine. On considère l'événement : « un pot a une masse inférieure à 490 grammes ». Une étude a permis d'admettre que la probabilité de cet événement est $0,2$.

1. **On prélève au hasard 20 pots dans la production totale.**
   On suppose que le nombre de pots est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pots avec indépendance.
   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 20 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.
   (a) **expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.**
   (b) **calculer la probabilité de l'événement A « parmi les 20 pots, il y a exactement 2 pots de masse inférieure à 490 grammes ».**
   (c) **calculer la probabilité qu'il y ait entre 1 et 3 pots de masses inférieures à 490 grammes.**
   (d) **calculer la probabilité qu'il y ait au moins un pot de masse inférieure à 490 grammes.**
2. **Combien de pots faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot dont la masse est inférieure à 490 grammes soit d'au moins 99% ?**

exercice 5 :

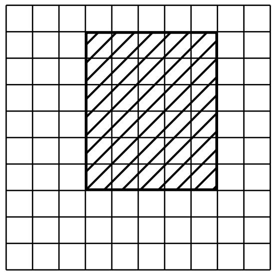
Un garagiste choisit douze pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de douze pneus à un tirage avec remise de douze pneus. On sait que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de douze pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4}.
4. est-il vrai que s'il change les 4 pneus d'une voiture, alors, il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un des pneus ait un défaut ? (justifier)

exercice 6 :

un jeu consiste à lancer une fléchette n fois dans la cible ci dessous



il faut payer 5€ pour jouer
si une personne tire au hasard dans cette cible,
on suppose que chacun des petits carrés a la même probabilité d'être atteint et que la fléchette atteint toujours un carré de la cible, on suppose de plus que les tirs sont indépendants
chaque tir dans un carré hachuré rapporte 1€ (0 sinon)

Soit X le nombre de fois que l'on gagne un euro pour une série de n lancers au hasard

1. quelles sont les valeurs possibles pour X ?
2. quelle est la loi de probabilité de X ? *(justifier)*
3. (a) quelle est la probabilité de recevoir 5€ pour 5 lancers ?
   (b) combien reçoit t-on en moyenne pour 5 lancers ?
   (c) quel est le gain moyen *(recette - coût)* pour 5 lancers ?
4. (a) combien faut-il de lancers au hasard au minimum pour que le gain moyen soit positif ?
   (b) pour une série de 17 lancers au hasard, quelle est la probabilité que le gain soit positif strict ? (à 1% près)
5. (a) combien faut-il faire de lancers au hasard pour être sur à 99% de recevoir au moins 1 € ?
   (b) quel est alors le gain moyen ?

exercice 7 :

une personne ayant trop bu fait indépendamment ou bien un pas *(de 50cm)* en avant ou bien un pas *(de 50cm)* en arrière avec une même probabilité

1. quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il soit à sont point de départ ?
2. quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il ait avancé de 5 m ?
3. ou se trouvent-il en moyenne après 10 pas ?

exercice 8 :

combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée de manières indépendantes pour être pratiquement certain *(à 99,9%)* de faire au moins une fois pile ?

1. quelle loi suit la variable aléatoire X égal au nombre de piles parmi les n lancers ?
2. déterminer n pour que $p(X \geq 1) \geq 99,9\%$
3. conclure

2.5 corrigés exercices

corrigé exercice 2 :

1. $\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 50 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } 0,8 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,8 = 0,2 \end{cases} \end{cases}$

   alors,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 50, p = 0,8)$

   avec : $\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., 50\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{50}^{k} \times 0,8^{k} \times 0,2^{50-k}} \end{cases}$

2. **probabilités**

   (a) **d'obtenir exactement 39 piles :**

   $$p(X = 39) = C_{50}^{39} \times 0,8^{39} \times 0,2^{11} \simeq \boxed{0,127}$$

   (b) **d'obtenir exactement 41 :**

   $$p(X = 41) = C_{50}^{41} \times 0,8^{41} \times 0,2^{9} \simeq \boxed{0,136}$$

   (c) **d'obtenir entre 39 et 41 piles :**

   $$p(39 \leq X \leq 41) = p(X = 39) + p(X = 40) + p(X = 41)$$

   $$p(39 \leq X \leq 41) = p(X = 39) + p(X = 40) + p(X = 41) \simeq 0,127 + 0,140 + 0,136 \simeq \boxed{0,403}$$

   (d) **d'obtenir au plus, 2 piles**

   $$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \simeq 0 + 0 + 0 \simeq \boxed{0}$$

   (e) **d'obtenir au moins, 2 piles**

   $$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 50) \qquad \textit{\textbf{(on passe au contraire)}}$$

   $$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$$

   $$p(X \geq 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$$

   $$p(X \geq 2) \simeq 1 - (0 + 0)$$

   $$p(X \geq 2) \simeq \boxed{1}$$

3. $E(X) = n \times p = 50 \times 0,8 \ \boxed{40}$

   Sur les 50 lancers, en moyenne, on obtient 40 piles

4. $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

5. **soit n le nombre minimal de lancers à faire pour que la probabilité d'obtenir au moins un pile dépasse $99,99\%$**

on cherche n pour que $p(X \geq 1) \geq 0,9999$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_n^0 \times 0,8^0 \times 0,2^n$

$p(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times 0,2^n$

$p(X \geq 1) = 1 - 0,2^n$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,2^n \geq 0,9999$

$1 - 0,9999 \geq 0,2^n$

$0,0001 \geq 0,2^n$

$\ln(0,0001) \geq \ln(0,2^n)$

$\ln(0,0001) \geq n\ln(0,2)$

$\dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(0,2)} \leq n$

$n \geq 5,72$

soit $\boxed{\textbf{au moins 6 lancers}}$

corrigé exercice 3 :

1. $\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 10 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } \frac{1}{3} \\ \text{échec : } q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 10, p = \frac{1}{3})$

avec : $\begin{cases} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., 10\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{10}^{k} \times (\frac{1}{3})^{k} \times (\frac{2}{3})^{10-k}} \end{cases}$

2. probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse

$p(X = 1) = C_{10}^{1} \times (\frac{1}{3})^{1} \times (\frac{2}{3})^{9} \simeq \boxed{0,09}$

3. compléter le tableau suivant à 10^{-3} **près**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**total**
$p(X = k)$	**0,017**	$0,087$	**0,195**	$0,260$	**0,228**	$0,137$	**0,057**	**0,016**	**0,003**	**0**	**0**	**1**

4. probabilité que l'élève ait la moyenne ?
$p(X \geq 5) \simeq 0,1337 + 0,057 + 0,016 + 0,003 \simeq \boxed{0,21}$

5. probabilité que l'élève n'ait pas la moyenne
$p(X < 5) \simeq 1 - 0,21 \simeq \boxed{0,79}$

6. $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{3} \simeq \boxed{3,33}$
soit $\boxed{\text{3 points en moyenne}}$

7. combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99% **?**
on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - (\frac{2}{3})^{n}$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - (\frac{2}{3})^{n} \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq (\frac{2}{3})^{n}$

$0,01 \geq (\frac{2}{3})^{n}$

$\frac{\ln(0,01)}{\ln(\frac{2}{3})} \leq n$

$n \geq 11,35$ **soit** $\boxed{\text{au moins } 12}$

corrigé exercice 4 :

1. (a) $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } 20 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } 0,2 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,2 = 0,8 \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 20, p = 0,2)$

avec : $\left\{\begin{array}{l} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0,1,2,...,20\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X=k) = C_{20}^{k} \times 0,2^{k} \times 0,8^{20-k}} \end{array}\right.$

(b) $p(X=2) = C_{20}^{2} \times 0,2^{2} \times 0,8^{20-2} \simeq \boxed{0,137}$

(c) $p(1 \leq X \leq 3) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) \simeq 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 \simeq \boxed{0,3999}$

(d) $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_{20}^{0} \times 0,2^{0} \times 0,8^{20-0} = 1 - 0,8^{20} \simeq \boxed{0,988}$

2. on cherche n pour que $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$p(X \geq 1) = 1 - 0,8^{n}$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,8^{n} \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq 0,8^{n}$

$0,01 \geq 0,8^{n}$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \leq n$

$n \geq 20,63$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins } 21}$

corrigé exercice 5 :

1. $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } 12 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } 0,065 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,065 = 0,935 \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 12, p = 0,065)$

avec : $\left\{\begin{array}{l} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, ..., 12\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{12}^{k} \times 0,065^{k} \times 0,935^{12-k}} \end{array}\right.$

2. $p(X = 0) = C_{12}^{0} \times 0,065^{0} \times 0,935^{12-0} \simeq \boxed{0,4464}$

3. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \simeq 0,4464 + 0,3724 + 0,1424 \simeq \boxed{0,9612}$

4. $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } 4 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } 0,065 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,065 = 0,935 \end{array}\right. \end{array}\right.$

alors,
la variable aléatoire X **qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres** $(n = 4, p = 0,065)$

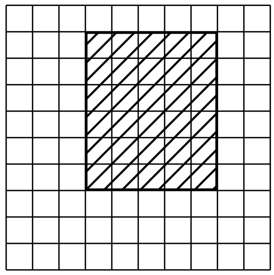
avec : $\left\{\begin{array}{l} \text{les valeurs possibles de } X \text{ sont } \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \text{de probabilités respectives : } \boxed{p(X = k) = C_{4}^{k} \times 0,065^{k} \times 0,935^{4-k}} \end{array}\right.$

$p(X \geq 1) = 1 - C_{4}^{0} \times 0,065^{0} \times 0,935^{4-0} = 1 - 0,935^{4} \simeq \boxed{0,2357}$

ce qui est inférieur à $0,5$ **la réponse est donc** $faux$

corrigé exercice 6 :

un jeu consiste à lancer une fléchette n fois dans la cible ci dessous



il faut payer 5€ pour jouer
si une personne tire au hasard dans cette cible,
on suppose que chacun des petits carrés a la même probabilité d'être atteint et que la fléchette atteint toujours un carré de la cible, on suppose de plus que les tirs sont indépendants
chaque tir dans un carré hachuré rapporte 1€ (0 sinon)

Soit X le nombre de fois que l'on gagne un euro pour une série de n lancers au hasard

1. **valeurs possibles pour X :** $\boxed{X \in \{0, 1, 2, ..., n\}}$

2. $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ on répète } n \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \left\{\begin{array}{l} \text{succès : de probabilité } \dfrac{30}{100} = 0,3 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,3 = 0,7 \end{array}\right. \end{array}\right.$

   alors,
   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n, p = 0,3)$

3. (a) **probabilité de recevoir 5€ pour 5 lancers :**

   X **suit une loi** $B(n = 5, p = 0,3)$
   donc
   $p(X = 5) = C_5^5 \times 0,3^5 \times 0,7^0 \simeq \boxed{0,00243}$

   (b) **combien reçoit t-on en moyenne pour 5 lancers ? :**
   $E(X) = np = 5 \times 0,3 = \boxed{1,5 \text{ €}}$

   (c) **quel est le gain moyen *(recette - coût)* pour 5 lancers ?**
   $G = 1,5 - 5 = \boxed{-3,5 \text{ €}}$

4. (a) **combien faut-il de lancers au hasard au minimum pour que le gain moyen soit positif ?**
   on cherche n pour que $G > 0$
   $n \times 0,3 - 5 > 0$
   $\Longleftrightarrow n > \dfrac{5}{0,3} (\simeq 16,66)$
   soit au moins $\boxed{17 \text{ lancers}}$

   (b) **pour une série de 17 lancers au hasard, quelle est la probabilité que le gain soit positif strict ? (à 1% près)**
   $G > 0 \Longleftrightarrow X > 5$

   $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5)$

   $p(X > 5) = 1 - [p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5)]$

   $p(X > 5) \simeq 1 - [0,00233 + 0,0169 + 0,0581 + 0,1245 + 0,1868 + 0,2081]$

   $p(X > 5) \simeq 1 - 0,5967 \simeq \boxed{0,4033}$

5. (a) **combien faut-il faire de lancers au hasard pour être sur à** 99% **de recevoir au moins 1 € ?**

on cherche n **pour que** $p(X \geq 1) \geq 0,99$

or

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p(X \geq 1) = 1 - C_n^0 \times 0,3^0 \times 0,7^n$

il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$1 - 0,7^n \geq 0,99$

$1 - 0,99 \geq 0,7^n$

$0,01 \geq 0,7^n$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \leq n$

$n \geq 12,9$ **soit** $\boxed{\textbf{au moins } 13 \textbf{ lancers}}$

(b) **quel est alors le gain moyen ?**

$np - 5 \geq 13 \times 0,3 - 5$

$np - 5 \geq -1,1$

le gain est d'au moins $\boxed{-1,1 \text{ €}}$

corrigé exercice 7 :

une personne ayant trop bu fait indépendamment ou bien un pas *(de 50cm)* en avant ou bien un pas *(de 50cm)* en arrière avec une même probabilité

1. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il soit à sont point de départ ?**

   soit X le nombre de pas en avant effectués après 10 pas

   $$\begin{cases} \bullet \text{ on répète } 10 \text{ fois une même expérience aléatoire} \\ \bullet \text{ les répétitions sont indépendantes} \\ \bullet \text{ deux issues contraires pour chaque expérience : } \begin{cases} \text{succès : de probabilité } 0,5 \\ \text{échec : } q = 1 - 0,5 = 0,5 \end{cases} \end{cases}$$

   alors,

   la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $(n = 10, p = 0,5)$

   $p(X = 5) = C_{10}^{5} \times 0,5^5 \times 0,5^5 \simeq \boxed{0,246}$

2. **quelle est la probabilité qu'après 10 pas, il ait avancé de 5 m ?**

   $p(X = 10) = C_{10}^{10} \times 0,5^{10} \times 0,5^0 \simeq \boxed{0,001}$

3. **ou se trouvent-il en moyenne après 10 pas ?**

   $E(X) = np = 10 \times 0,5 = 5$

   il fait donc en moyenne 5 pas en avant,

   donc 5 pas en arrière,

   il est donc $\boxed{\text{au point de départ}}$

2.6 évaluation

2.7 devoir maison

2.7.1 corrigé devoir maison 1

corrigé devoir maison