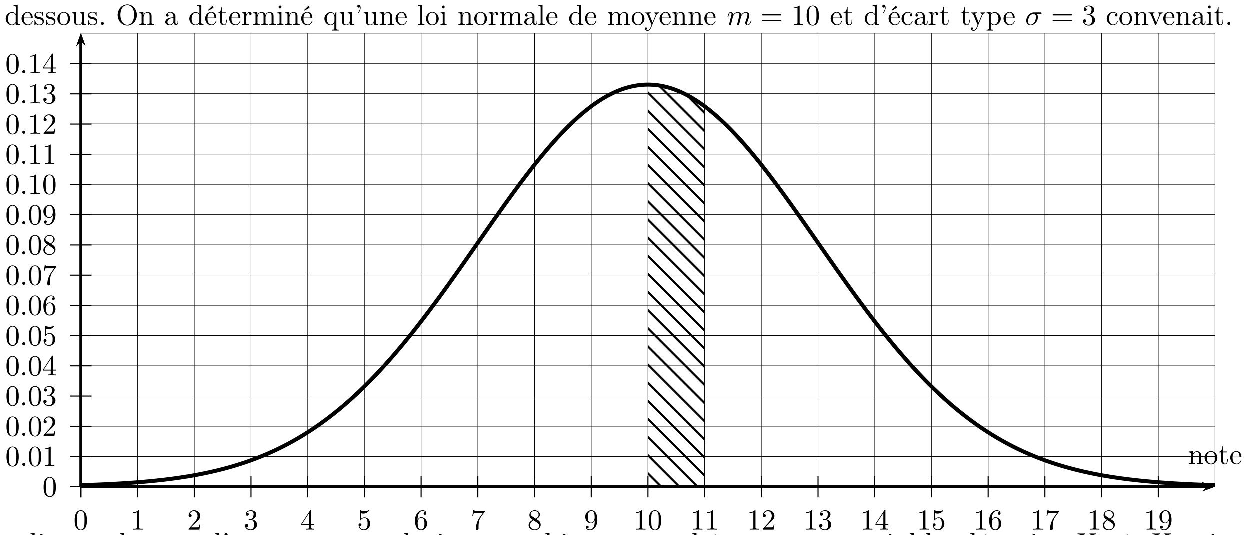
loi normale

Table des matières

1 loi normale

1.1 activité 1

la répartition des notes à un examen est approximée par la courbe en cloche caractéristique d'une loi normale ci dessous. On a déterminé qu'une loi normale de moyenne $m = 10$ et d'écart type $\sigma = 3$ convenait.



On dit que la note l'examen est relativement bien approchée par une variable aléatoire X où X suit une loi normale $N(10\ ;\ 3)$.
les valeurs possibles pour X sont dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$
la probabilité que X soit compris entre 10 et 11 est égale l'aire sous la courbe entre 10 et 11 soit $\simeq 0,13$
on note alors : $p(10 \leq X \leq 11) \simeq 0,13 \simeq 13\%$ *(à vérifier)*

Principe de base :
Quels que soient les nombres a et b, avec $a < b$, la probabilité que X soit compris entre a et b est donnée par **l'aire sous la courbe** entre a et b. soit : $p(a \leq X \leq b) =$ **aire sous la courbe** entre a et b.

Remarques :
- l'aire totale sous la courbe vaut 1
- la courbe admet la droite d'équation $x = 10$ pour axe de symétrie
- $p(a \leq X \leq a) = p(X = a) = 0$ pour tout a, car l'aire d'un segment est nulle *(à vérifier)*
- $p(X < a) = p(X \leq a) - p(X = a) = p(X \leq a) - 0 = p(X \leq a)$ pour tout a

Questions :
Déterminer graphiquement et avec un logiciel, les valeurs des probabilités suivantes à 1% près.

1. $p(X < 10) = ...$
2. $p(X > 10) = ...$
3. $p(X \leq 7) \simeq ...$
4. $p(X \geq 13) \simeq ...$
5. $p(X \leq 4) \simeq ...$
6. $p(X \geq 16) \simeq ...$
7. $p(X \leq 1) \simeq ...$
8. $p(X \geq 19) \simeq ...$
9. $p(0 \leq X \leq 20) \simeq ...$
10. $p(0 \leq X \leq 10) \simeq ...$
11. $p(10 \leq X \leq 20) \simeq ...$
12. $p(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = p(... - ... \leq X \leq ... + ...) = p(... \leq X \leq ...) \simeq ...$
13. $p(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = p(... - ... \leq X \leq ... + ...) = p(... \leq X \leq ...) \simeq ...$
14. $p(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = p(... - ... \leq X \leq ... + ...) = p(... \leq X \leq ...) \simeq ...$
15. la note est d'au moins 12 :

    ...

16. la note est de moins de 12 :

    ...

17. la note est de plus de 8 :

    ...

18. la note est d'au plus 8 :

    ...

Réponses :

on estime graphiquement, grâce au principe de base et la remarque les valeurs des probabilités suivantes et vérifier avec un logiciel ou une calculatrice

1. $p(9 \leq X \leq 10) \simeq \boxed{0,13}$ (le nombre de carreaux est le même que pour $p(10 \leq X \leq 11)$)
2. $p(9 \leq X \leq 11) \simeq 2 \times 0,13 \simeq \boxed{0,26}$ (symétrie)
3. $p(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = p(10 - 3 \leq X \leq 10 + 3) = p(7 \leq X \leq 13) \simeq 2 \times 0,32 \simeq \boxed{0,64}$
4. $p(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = p(10 - 6 \leq X \leq 10 + 6) = p(4 \leq X \leq 16)$

   $p(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \simeq 1 - 2 \times p(X \leq 4) \simeq 1 - 2 \times 0,025 \simeq \boxed{0,95}$ (complément et symétrie)
5. $p(X \leq 10) = p(X \geq 10) = \boxed{0,5}$ (symétrie)
6. $p(X \leq 11) = p(X \leq 10) + p(10 \leq X \leq 11) \simeq 0,5 + 0,13 \simeq \boxed{0,63}$

   $p(X \geq 11) = 1 - p(X \leq 11) \simeq 1 - 0,63 \simeq \boxed{0,37}$ (complément)
7. $p(X \geq 17) \simeq \boxed{0,01}$

   $p(X \leq 17) = 1 - p(X \geq 17) \simeq 1 - 0,01 \simeq \boxed{0,99}$ (complément)
8. $p(X < 10) = p(X \leq 10) = p(X > 10) = p(X \geq 10) = \boxed{0,5}$ (symétrie)

1.2 activité 2

une usine fabrique des rondelles,
une rondelle est conforme si son diamètre appartient l'intervalle $[\ 89,4\ ;\ 90,6\ ]$

1. On suppose que le diamètre X_1 d'une rondelle suit une loi $N(90;0,5)$
   Quelle est la probabilité qu'une rondelle soit conforme à 1% près ?

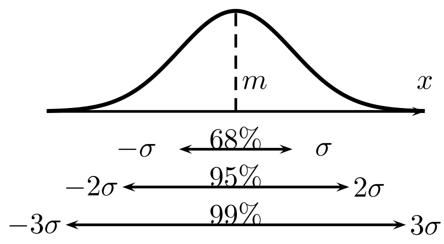
2. On suppose que le diamètre D d'une rondelle suit une loi $N(90;\sigma_1)$
   Quelle est la valeur de σ_1 pour que probabilité qu'une rondelle soit conforme soit d'environs 68 % ?

3. On suppose que le diamètre D d'une rondelle suit une loi $N(90;\sigma_2)$
   Quelle est la valeur de σ_2 pour que probabilité qu'une rondelle soit conforme soit d'environs 95 % ?

4. On suppose que le diamètre D d'une rondelle suit une loi $N(90;\sigma_3)$
   Quelle est la valeur de σ_3 pour que probabilité qu'une rondelle soit conforme soit de 99 % ?

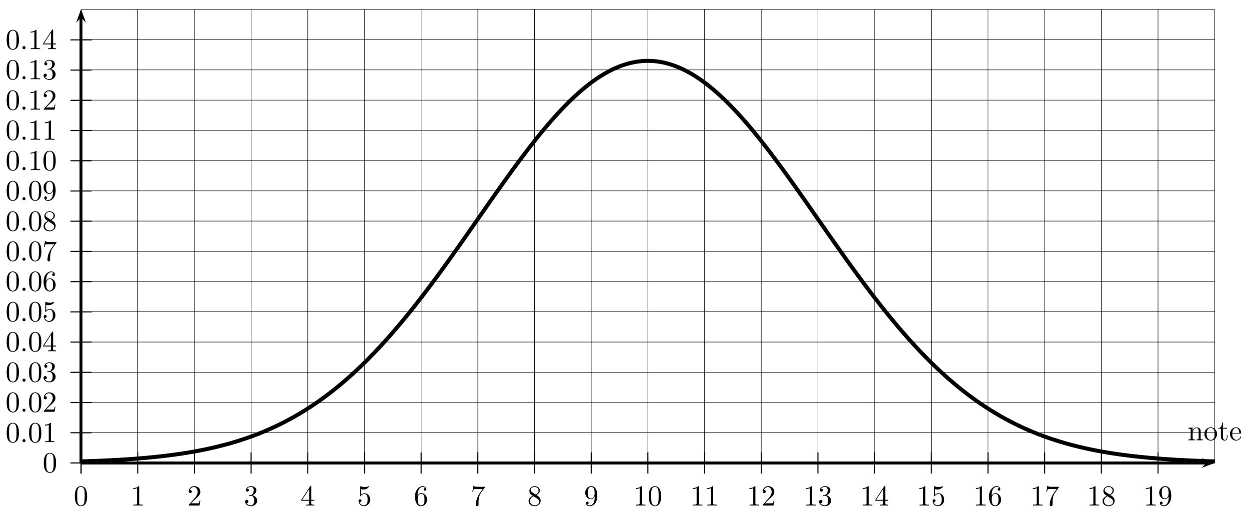
1.3 activité 3 : Utilisation de la Symétrie de la courbe de la loi normale et propriété des 3 écart-types

1. Il faut savoir que :
   si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ ($\sigma > 0$)
   (a) Les valeurs de X sont toutes les valeurs de l'intervalle ...
   (b) La courbe de la fonction de densité de probabilité a pour équation $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$
   Cette courbe admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = m$
   (c) $p(X \leq m) = ...$
   (d) $p(X \geq m) = ...$
   (e) $p(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \simeq ...$
   (f) $p(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \simeq ...$
   (g) $p(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \simeq ...$



2. On peut aussi en déduire que :
   (a) $p(X \leq m - \sigma) \simeq ...$
   (b) $p(X \geq m + \sigma) \simeq ...$
   (c) $p(X \leq m + \sigma) \simeq ...$
   (d) $p(X \geq m - \sigma) \simeq ...$
   (e) $p(X \leq m - 2\sigma) \simeq ...$
   (f) $p(X \geq m + 2\sigma) \simeq ...$
   (g) $p(X \leq m + 2\sigma) \simeq ...$
   (h) $p(X \geq m - 2\sigma) \simeq ...$
   (i) $p(X \leq m - 3\sigma) \simeq ...$
   (j) $p(X \geq m + 3\sigma) \simeq ...$
   (k) $p(X \leq m + 3\sigma) \simeq ...$
   (l) $p(X \geq m - 3\sigma) \simeq ...$

3. On sait que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 10$ et $\sigma = 3$
   Déterminer sans calculatrice ni logiciel les probabilités suivantes ou déterminer les valeurs cherchées



   (a) $p(X \leq ...\quad) = 50\%$
   (b) $p(...\quad \leq X \leq ...\quad) \simeq 95\%$
   (c) $p(X \leq 7) \simeq ...$
   (d) $p(X \leq 13) \simeq ...$
   (e) $p(...\quad \leq X \leq ...\quad) \simeq 68\%$
   (f) $p(X \leq 4) \simeq ...$
   (g) $p(X \geq 16) \simeq ...$
   (h) $p(X \geq 7) \simeq ...$
   (i) $p(X \geq 19) \simeq ...$
   (j) $p(X \leq 16) \simeq ...$
   (k) $p(...\quad \leq X \leq ...\quad) \simeq 99\%$
   (l) $p(X \geq 4) \simeq ...$
   (m) $p(X \leq 1) \simeq ...$
   (n) $p(X \geq ..\quad) = 50\%$
   (o) $p(X \leq 19) \simeq ...$
   (p) $p(X \geq 1) \simeq ...$
   (q) $p(X \geq 13) \simeq ...$

4. On sait que X suit une loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart type σ inconnu.
   Sachant que $p(90 \leq X \leq 110) \simeq 95\%$, déterminer σ.
5. On sait que X suit une loi normale de moyenne $m = 200$ et d'écart type σ inconnu.
   Sachant que $p(X \leq 210) \simeq 84\%$, déterminer σ.
6. On sait que X suit une loi normale de moyenne $m = 300$ et d'écart type σ inconnu.
   Sachant que $p(X \geq 321) \simeq 0,5\%$, déterminer σ.
7. On sait que X suit une loi normale de moyenne m inconnue et d'écart type $\sigma = 5$
   Sachant que $p(95 \leq X \leq 105) \simeq 68\%$, est-il possible de déterminer m ?

1.4 à retenir

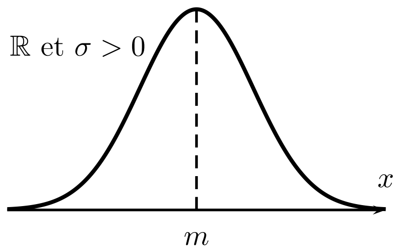
définition 1 :

A une loi normale $N(m;\sigma)$ de moyenne m et d'écart type σ correspond une unique courbe en cloche

représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ où $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

Cette courbe admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = m$,

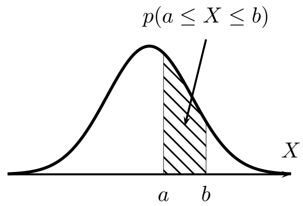
elle admet un maximum en $x = m$

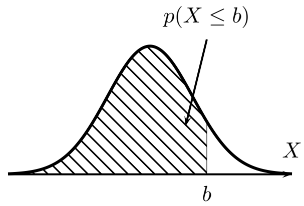


définition 2 :

La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ (on note : $X \sim N(m;\sigma)$) signifie que :
L'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble de tous les nombres réels : $X \in\ ]-\infty\ ;\ +\infty[$
Quels que soient les deux nombres a et b $(a \leq b)$, la probabilité que X soit compris entre a et b est égale à "l'aire sous la courbe" en cloche $N(m;\sigma)$ entre a et b

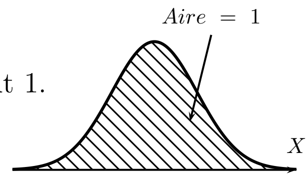
$\boxed{p(a \leq X \leq b) = \text{aire sous la courbe entre } a \text{ et } b}$
et aussi
$\boxed{p(X \leq b) = \text{aire sous la courbe de } -\infty \text{ jusqu'a } b}$





Remarques : *(admises)*

(a) Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, l'aire "totale" sous la courbe vaut 1.
(pour x allant de $-\infty$ à $+\infty$)



(b) Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ on a : $p(a \leq X \leq a) = p(X = a) = 0$
la probabilité d'une "valeur isolée" est nulle

(c) Quels que soient les deux nombres a et b avec $a \leq b$ on a : $p(a \leq X \leq b) = p(a < X < b)$
(pour une loi normale, $<$ et $\leq$ sont "équivalents", ainsi que $>$ et $\geq$)

(d) $p(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *(en terme d'intégrale)*

1.5 exercices

(voir activité)

2 loi normale centrée réduite

2.1 activité

A. utilisation de la table de la loi normale centrée réduite $N(0\ ;1)$ où $m=0$ et $\sigma=1$

une table de la loi $N(0;1)$ est donnée FIG.1 ci après *(précision de* 10^{-4}*)*
elle permet d'approximer des probabilités de la forme $p(X \leq t)$ où $t \in [\ 0\ ;\ 2,99\ ]$
on note usuellement : $\Pi(t) = p(X \leq t)$
par exemple : $\Pi(1,75) = p(X \leq 1,75) \simeq 0,9599$

1. cas de la forme : $\boxed{p(X \leq t) \text{ ou } p(X \geq t)}$ $(t > 0)$

   a. déterminer $p(X \leq 1,5) = \Pi(1,5)$ grâce la table et en déduire $p(X \geq 1,5)$
   (indice : l'aire totale sous la courbe vaut 1)

   b. déterminer $p(X \leq 0,5) = \Pi(0,5)$ et en déduire $p(X > 0,5)$

   c. exprimer $p(X \geq t)$ en fonction de $\Pi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$

   d. déterminer $p(X \geq 1,05)$

2. cas de la forme : $\boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2)}$

   a. déterminer $p(X \leq 2)$ et $p(X \leq 1)$ et en déduire $p(1 \leq X \leq 2)$
   (indice : penser aux aires)

   b. déterminer $p(0,5 \leq X \leq 1,5)$

   c. exprimer $p(t_1 \leq X \leq t_2)$ en fonction de $\Pi(t_1)$ et $\Pi(t_2)$

   d. déterminer $p(0 \leq X \leq 1)$

3. cas de la forme : $\boxed{p(X \leq -t) \text{ ou } p(X \geq -t)}$ $(t > 0)$

   a. comparer graphiquement $p(X \leq -2)$ et $p(X \geq 2)$ et en déduire $p(X \leq -2)$

   b. déterminer $p(X \leq -1,5)$

   c. exprimer $p(X \leq -t)$ en fonction de $\Pi(t)$

   d. déterminer $p(X \geq -0,5)$

   e. déterminer $p(-1,5 \leq X \leq -0,5)$

4. lecture inverse : $\boxed{p(X \leq ?) = a}$

   a. déterminer t tel que $p(X \leq t) = 0,881$

   b. déterminer t tel que $p(X \leq t) = 0,119$

   c. déterminer t tel que $p(-t \leq X \leq t) = 0,881$

B. exemple d'application

1. la température T dans une chambre froide suit une loi $N(0\ ;1)$ où T est en degrés Celsius

   a. déterminer la probabilité que la température soit comprise entre $-1,5$ et $1,5$ degrés

   b. déterminer t tel que $p(-t \leq T \leq t) = 0,99$

corrigé activité

A. utilisation de la table de la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ où $m = 0$ et $\sigma = 1$

1. cas de la forme : $\boxed{p(X \leq t) \text{ ou } p(X \geq t)}$ $(t > 0)$

   a. $p(X \leq 1,5) = \Pi(1,5) \simeq \boxed{0,9332}$

   $p(X \geq 1,5) = 1 - p(X < 1,5) = 1 - \Pi(1,5) \simeq 1 - 0,933 \simeq \boxed{0,0668}$

   b. $p(X \leq 0,5) = \Pi(0,5) \simeq \boxed{0,6915}$

   $p(X > 0,5) = 1 - p(X \leq 0,5) = 1 - \Pi(0,5) \simeq 1 - 0,6915 \simeq \boxed{0,3085}$

   c. $p(X \geq t) = 1 - p(X < t) = 1 - \Pi(t)$

   d. $p(X \geq 1,05) = 1 - p(X < 1,05) = 1 - \Pi(1,05) \simeq 1 - 0,8531 \simeq \boxed{0,1469}$

2. cas de la forme : $\boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2)}$

   a. $p(X \leq 2) = \Pi(2) \simeq 0,9772$

   $p(X \leq 1) = \Pi(1) \simeq 0,8413$

   $p(1 \leq X \leq 2) = \Pi(2) - \Pi(1) \simeq 0,9772 - 0,8413 \simeq \boxed{0,1359}$

   b. $p(0,5 \leq X \leq 1,5) = \Pi(1,5) - \Pi(0,5) \simeq 0,9332 - 0,6915 \simeq \boxed{0,2417}$

   c. $\boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)}$

   d. $p(0 \leq X \leq 1) = \Pi(1) - \Pi(0) \simeq 0,8413 - 0,5 \simeq \boxed{0,3413}$

3. cas de la forme : $\boxed{p(X \leq -t) \text{ ou } p(X \geq -t)}$ $(t > 0)$

   a. $p(X \leq -2) = p(X \geq 2)$ par symétrie de la courbe

   $p(X \leq -2) = 1 - \Pi(2) \simeq 1 - 0,9772 \simeq \boxed{0,0228}$

   b. $p(X \leq -1,5) = p(X \geq 1,5)$

   $p(X \leq -1,5) = 1 - \Pi(1,5) \simeq 1 - 0,9332 \simeq \boxed{0,0668}$

   c. $\boxed{p(X \leq -t) = 1 - \Pi(t)}$

   d. $p(X \geq -0,5) = p(X \leq 0,5)$ par symétrie de la courbe

   $p(X \geq -0,5) = \Pi(0,5) \simeq \boxed{0,06915}$

   e. $p(-1,5 \leq X \leq -0,5) = \Pi(-0,5) - \Pi(-1,5) = 1 - \Pi(0,5) - (1 - \Pi(1,5))$

   $p(-1,5 \leq X \leq -0,5) = 1 - \Pi(0,5) - 1 + \Pi(1,5) = \Pi(1,5) - \Pi(0,5) \simeq \boxed{0,2417}$

4. <u>lecture inverse</u> : $\boxed{p(X \leq ?) = a}$

   a. $p(X \leq t) = 0,881 \Longleftrightarrow \Pi(t) = 0,881$
   or on lit par *lecture inverse* dans la table que :
   $\Pi(1,18) = 0,881$
   donc
   $\Pi(1,18) = \Pi(t)$
   donc
   $\boxed{t = 1,18}$

   b. $p(X \leq t) = 0,119 \Longleftrightarrow \Pi(t) = 0,119$
   or on ne peut pas trouver t directement par *lecture inverse* dans la table car 0,119 $<$0,5 :
   on a alors : (par symétrie) : $1 - \Pi(t) = \Pi(-t) = 1 - 0,119 = 0,881$
   donc
   $\Pi(-t) = 0,881$
   or
   $\Pi(1,18) = 0,881$
   donc
   $\Pi(1,18) = \Pi(-t)$
   donc
   $\boxed{t = -1,18}$

   c. $p(-t \leq X \leq t) = 0,881 \Longleftrightarrow \Pi(t) - \Pi(-t) = 0,881$
   $\Longleftrightarrow \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) = 0,881$
   $\Longleftrightarrow 2\Pi(t) - 1 = 0,881$
   $\Longleftrightarrow \Pi(t) = 0,9405$
   or
   on lit par *lecture inverse* dans la table que :
   $\Pi(1,56) \simeq 0,9405$
   donc
   $\Pi(1,56) \simeq \Pi(t)$
   donc
   $\boxed{t \simeq 1,56}$

B. <u>exemple d'application</u>

1. la température T dans une chambre froide suit une loi $N(0\ ;1)$ où T est en degrés Celsius

   a. probabilité que la température soit comprise entre $-1,5$ et $1,5$ degrés :

   $p(-1,5 \leq X \leq 1,5) = \Pi(1,5) - \Pi(-1,5) = \Pi(1,5) - (1 - \Pi(1,5)) = 2\Pi(1,5) - 1$

   $p(-1,5 \leq X \leq 1,5) \simeq 2 \times 0,9332 - 1 \simeq \boxed{0,8664}$

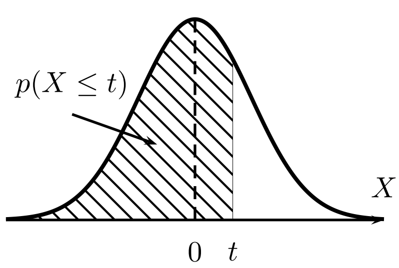
   b. $p(t \leq X \leq -t) = 0,99 \Longleftrightarrow \Pi(t) - \Pi(-t) = 0,99$
   $\Longleftrightarrow \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) = 0,99$
   $\Longleftrightarrow 2\Pi(t) - 1 = 0,99$
   $\Longleftrightarrow \Pi(t) = 0,995$
   or
   on lit par *lecture inverse* dans la table que :
   $\Pi(2,575) = 0,995$ *(on interpole)*
   donc
   $\Pi(2,575) = \Pi(t)$
   donc
   $\boxed{t \simeq 2,575}$

2.2 à retenir

définition 3 :

la loi $\boxed{N(0\,;1)}$ de moyenne $\boxed{m=0}$ et d'écart type $\boxed{\sigma=1}$ est appelée loi $\boxed{\textit{normale centrée réduite}}$

Sa courbe est celle de f avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ où $x \in \mathbb{R}$.



Des valeurs de $p(X \leq t)$ pour $t \in [\,0\ ;\ 2,99[$ avec un pas de $0,01$ sont regroupées dans ce qu'on appelle la $\boxed{\text{table de la loi normale}}$ FIG.1 : *(valeurs approchées 10^{-4})*

Cette table permet alors de lire des valeurs approchées de $p(X \leq 0)$, $p(X \leq 0,01)$, ..., $p(X \leq 2,99)$ par exemple : $p(X \leq 1,32) \simeq 0,9066$

remarques : *(admises)*

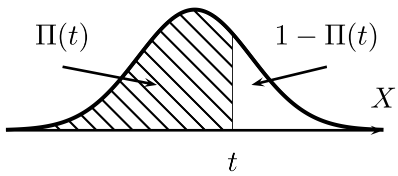
(a) en général, on pose $\boxed{p(X \leq t) = \Pi(t)}$ par exemple : $p(X \leq 1,32) = \Pi(1,32) \simeq 0,9066$

(b) $\Pi(t)$ est égal l'aire sous la courbe de $-\infty$ jusqu'a t où $t \in \mathbb{R}$

propriété 1 : *(admise)*

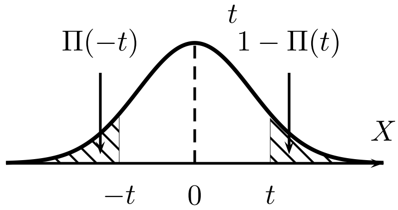
par symétrie de la courbe de la loi normale $N(0\,;1)$, on a les égalités suivantes pour $t > 0$:

(1) $\boxed{p(X \leq t) = \Pi(t)}$



(2) $\boxed{p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - \Pi(t)}$

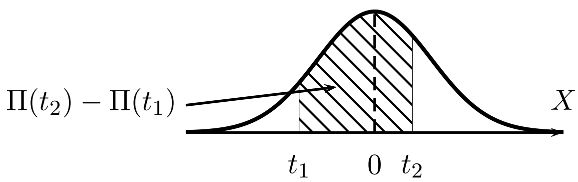
(3) $\boxed{p(X \leq -t) = p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - \Pi(t)}$
soit $\boxed{\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)}$



(4) $\boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2) = p(X \leq t_2) - p(X \leq t_1) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)}$

(5) $\boxed{p(-t \leq X \leq t) = 2\Pi(t) - 1}$

(6) $\boxed{\Pi(t_1) = \Pi(t_2) \Longleftrightarrow t_1 = t_2}$



2.3 exercices

3 changement de variables et loi normale centrée réduite

3.1 activité

A. Changement de variable pour se ramener une loi $N(0\,;1)$

1. principe :

supposons que le résultat de la note un examen X suit une loi $N(10\,;2)$
on cherche déterminer la probabilité $p(X \leq 12)$ que la note soit inférieure ou égale 12, mais, pour estimer cette valeur, on ne dispose pas de la table de la loi $N(10\,;2)$ *(on ne dispose que de la table de la loi $N(0\,;1)$).*
on procède alors un *changement de variable* pour se ramener une loi normale centrée réduite :

l'idée est de poser : $\boxed{Z = \dfrac{X-m}{\sigma}} = \dfrac{X-10}{2}$ où cette fois $\boxed{Z \text{ suit une loi } N(0\,;1)}$ *(admis)* calculer $p(X \leq 12)$

revient calculer : $p(\dfrac{X-10}{2} \leq \dfrac{12-10}{2})$

c'est dire : $p(Z \leq 1)$ ou $Z \sim N(0\ ;1)$

et alors : $p(X \leq 12) = p(\dfrac{X-10}{2} \leq \dfrac{12-10}{2}) = p(Z \leq 1) = \Pi(1) \simeq= 0,8413$

2. exemples

   calculer les probabilités suivantes 0,0001 près où $X \sim N(10\ ;2)$

   a. $p(X \leq 8)$
   b. $p(X \geq 14)$
   c. $p(8 \leq X \leq 12)$
   d. déterminer t tel que $p(X \leq t) = 0,99$

B. Applications

1. une machine est réglée pour remplir des sacs de sucre de $1000g$
   en réalité les sacs ne pèsent tous exactement $1000g$ mais on suppose que la masse M d'un sac suit une loi $N(1000\ ;20)$
   a. en utilisant un changement de variables, calculer les probabilités suivantes 0,0001 près et interpréter les résultats dans le contexte
      i. $p(M \leq 1050)$
      ii. $p(M \leq 980)$
      iii. $p(979 \leq M \leq 1031)$
      iv. $p(M \geq 1010)$
   b. i. déterminer t tel que $p(M \leq t) = 0,95$
      ii. déterminer t tel que $p(M \leq t) = 0,75$

2. on suppose que la valeur T du Q.I. dans la population suit la loi $N(100\ ;15)$
   a. calculer les probabilités des événements suivants 0,0001 près
      i. le Q.I. est entre 85 et 11
      ii. le Q.I. est supérieur 140
      iii. le Q.I. est inférieur 70
   b. i. touver la valeur du le Q.I. telle que 95% de la population a un Q.I. inférieur cette valeur

3.2 à retenir

propriété 2 :*(admises)*

si une variable aléatoire $\boxed{X \text{ suit une loi normale } N(m\ ;\sigma)}$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$
alors
la variable aléatoire $\boxed{Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \text{ suit une loi } N(0\ ;1) \text{ centrée réduite}}$

remarques : *(admises)*

a. un calcul de probabilité sur une loi normale quelconque revient un calcul de probabilité sur une loi normale centrée réduite.
b. si $\boxed{X \text{ suit une loi normale } N(m\ ;\sigma)}$, alors, pour calculer $p(X \leq a)$,
il suffit de calculer $p(\dfrac{X-m}{\sigma} \leq \dfrac{a-m}{\sigma}) = p(Y \leq \dfrac{a-m}{\sigma}) = \Pi(\dfrac{a-m}{\sigma})$
où $\Pi(\dfrac{a-m}{\sigma})$ est estimé avec la table de la loi $N(0\ ;1)$

3.3 exercices

exercice 1 :

X suit la loi normale $N(20; 5)$, calculer les probabilités suivantes

1. $p(X \leq 28)$
2. $p(X \geq 28)$
3. $p(X \geq 12)$
4. $p(X \leq 12)$
5. $p(12 \leq X \leq 28)$

exercice 2 :

une entreprise dispose d'un parc de 150 camions.
la distance parcourue par un camion dans une journée est une variable aléatoire X
où X suit la loi normale $N(120; 14)$
calculer la probabilité qu'un camion, au cours d'une journée, parcourt une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres (arrondir 0,001)

exercice 3 :

dans une entreprise qui produit des bobines de fil pour de l'industrie textile,
la longueur d'une bobine est une variable aléatoire X où X suit la loi normale $N(50; 0,2)$

1. calculer les probabilités suivantes
   (a) la longueur de la bobine est inférieure 50,19m
   (b) la longueur de la bobine est supérieure 50,16m
   (c) la longueur de la bobine est comprise entre 50,16m et 50,19m
2. déterminer la nombre réel positif a tel que $p(50 - a \leq X \leq 50 + a) = 0,9$
   interpréter le résultat trouvé

exercice 4 :

X suit la loi normale $N(20; 5)$
déterminer la valeur du nombre a 10^{-2} près dans chaque cas.

1. $p(X \leq a) = 0,99$
2. $p(X \leq a) = 0,01$

3.4 correction exercices

corrigé exercice 1 :

X suit la loi normale $N(20;5)$, calculer les probabilités suivantes

1. $p(X \leq 28)$

   $p(X \leq 28) = p(\frac{X-20}{5} \leq \frac{28-20}{5})$

   $p(X \leq 28) = p(Z \leq 1,6)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(X \leq 28) = \Pi(1,6)$

   $\boxed{p(X \leq 28) \simeq 0,9452}$

2. $p(X \geq 28)$

   $p(X \geq 28) = 1 - p(X < 28)$

   $p(X \geq 28) = 1 - p(X \leq 28)$

   $p(X \geq 28) = 1 - \Pi(1,6)$

   $\boxed{p(X \geq 28) \simeq 0,0548}$

3. $p(X \geq 12)$

   $p(X \geq 12) = p(\frac{X-20}{5} \geq \frac{12-20}{5})$

   $p(X \geq 12) = p(Z \geq -1,6)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(X \geq 12) = 1 - p(Z \leq -1,6)$

   $p(X \geq 12) = 1 - \Pi(-1,6)$

   $p(X \geq 12) = 1 - (1 - \Pi(1,6))$

   $p(X \geq 12) = \Pi(1,6))$

   $\boxed{p(X \geq 12) \simeq 0,9452}$

4. $p(X \leq 12)$

   $p(X \leq 12) = 1 - p(X > 12)$

   $p(X \leq 12) = 1 - p(X \geq 12)$

   $p(X \leq 12) \simeq 1 - 0,9452$

   $\boxed{p(X \leq 12) \simeq 0,0548}$

5. $p(12 \leq X \leq 28)$

$$p(12 \leq X \leq 28) = p(\frac{12-20}{5} \leq \frac{X-20}{5} \leq \frac{28-20}{5})$$

$p(12 \leq X \leq 28) = p(-1,6 \leq Z \leq 1,6)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(12 \leq X \leq 28) = \Pi(1,6) - \Pi(-1,6)$

$p(12 \leq X \leq 28) = \Pi(1,6) - (1 - \Pi(1,6))$

$p(12 \leq X \leq 28) = 2\Pi(1,6) - 1$

$p(12 \leq X \leq 28) \simeq 2 \times 0,9452 - 1$

$\boxed{p(12 \leq X \leq 28) \simeq 0,8904}$

corrigé exercice 2 :

une entreprise dispose d'un parc de 150 camions.
la distance parcourue par un camion dans une journée est une variable aléatoire X
où X suit la loi normale $N(120; 14)$
calculer la probabilité qu'un camion, au cours d'une journée, parcourt une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres (arrondir 0,001)

Il suffit de calculer $p(110 \leq X \leq 130)$

$p(110 \leq X \leq 130)$

$p(110 \leq X \leq 130) = p(\dfrac{110-120}{14} \leq \dfrac{X-120}{14} \leq \dfrac{130-120}{14})$

$p(110 \leq X \leq 130) = p(-\dfrac{10}{14} \leq Z \leq \dfrac{10}{14})$ où Z suit une loi $N(0; 1)$

$p(110 \leq X \leq 130) = \Pi(\dfrac{10}{14}) - \Pi(-\dfrac{10}{14})$

$p(110 \leq X \leq 130) = \Pi(\dfrac{10}{14}) - (1 - \Pi(\dfrac{10}{14}))$

$p(110 \leq X \leq 130) = 2\Pi(\dfrac{10}{14}) - 1$

$p(110 \leq X \leq 130) \simeq 2\Pi(0,71) - 1$

$p(110 \leq X \leq 130) \simeq 2 \times 0,7611 - 1$

$\boxed{p(110 \leq X \leq 130) \simeq 0,522}$

corrigé exercice 3 :

dans une entreprise qui produit des bobines de fil pour de l'industrie textile,
la longueur d'une bobine est une variable aléatoire X où X suit la loi normale $N(50;0,2)$

1. calculer les probabilités suivantes
   (a) la longueur de la bobine est inférieure 50,19m

   il suffit de calculer la probabilité suivante : $p(X \leq 50,19)$

   $p(X \leq 50,19) = p(\frac{X-50}{0,2} \leq \frac{50,19-50}{0,2})$

   $p(X \leq 50,19) = p(Z \leq 0,95)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(X \leq 50,19) = \Pi(0,95)$

   $\boxed{p(X \leq 50,19) \simeq 0,8289}$

   (b) la longueur de la bobine est supérieure 50,16m

   il suffit de calculer la probabilité suivante : $p(X \geq 50,16)$

   $p(X \geq 12) = p(\frac{X-50}{0,2} \geq \frac{50,16-50}{0,2})$

   $p(X \geq 50,16) = p(Z \geq 0,8)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(X \geq 50,16) = 1 - p(Z \leq 0,8)$

   $p(X \geq 50,16) = 1 - \Pi(0,8)$

   $p(X \geq 50,16) \simeq 1 - 0,7881$

   $\boxed{p(X \geq 50,16) \simeq 0,2119}$

   (c) la longueur de la bobine est comprise entre 50,16m et 50,19m

   Il suffit de calculer la probabilité $p(50,16 \leq X \leq 50,19)$

   $p(50,16 \leq X \leq 50,19) = p(\frac{50,16-50}{0,2} \leq \frac{X-50}{0,2} \leq \frac{50,19-50}{0,2})$

   $p(50,16 \leq X \leq 50,19) = p(0,8 \leq Z \leq 0,95)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(50,16 \leq X \leq 50,19) = \Pi(0,95) - \Pi(0,8)$

   $p(50,16 \leq X \leq 50,19) \simeq 0,8289 - 0,7881$

   $\boxed{p(50,16 \leq X \leq 50,19) \simeq 0,0408}$

2. déterminer la nombre réel positif a tel que $p(50-a \leq X \leq 50+a) = 0,9$
   interpréter le résultat trouvé

   $p(50-a \leq X \leq 50+a) = 0,9$

   $p(\frac{50-a-50}{0,2} \leq \frac{X-50}{0,2} \leq \frac{50+a-50}{0,2}) = 0,9$

$p(-\frac{a}{0,2} \leq Z \leq \frac{a}{0,2}) = 0,9$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$\Pi(\frac{a}{0,2}) - \Pi(-\frac{a}{0,2}) = 0,9$

$\Pi(\frac{a}{0,2}) - (1 - \Pi(\frac{a}{0,2})) = 0,9$

$2\Pi(\frac{a}{0,2}) - 1 = 0,9$

$\Pi(\frac{a}{0,2}) = \frac{0,9+1}{2}$

$\Pi(\frac{a}{0,2}) = 0,95$

on trouve par lecture inverse dans la table que $\Pi(1,645) \simeq 0,95$

$\Pi(\frac{a}{0,2}) \simeq \Pi(1,645)$

$\frac{a}{0,2} \simeq 1,645$

$a \simeq 0,2 \times 1,645$

$\boxed{a \simeq 0,329}$

$\boxed{\text{la probabilité qu'une bobine ait une longueur comprise entre 49,671m et 50,329m est d'environs 90\%}}$

corrigé exercice 4 :

X suit la loi normale $N(20;5)$

déterminer la valeur du nombre a 10^{-2} près dans chaque cas.

1. $p(X \leq a) = 0,99$

   $p(\dfrac{X-20}{5} \leq \dfrac{a-20}{5}) = 0,99$

   $p(\leq Z \leq \dfrac{a-20}{5}) = 0,99$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $\Pi(\dfrac{a-20}{5}) = 0,99$

   on trouve par lecture inverse dans la table que $\Pi(2,33) \simeq 0,9901$

   $\Pi(\dfrac{a-20}{5}) \simeq \Pi(2,33)$

   $\dfrac{a-20}{5} \simeq 2,33$

   $a \simeq 5 \times 2,33 + 20$

   $\boxed{a \simeq 31,65}$

2. $p(X \leq a) = 0,01$

   $p(\dfrac{X-20}{5} \leq \dfrac{a-20}{5}) = 0,01$

   $p(\leq Z \leq \dfrac{a-20}{5}) = 0,01$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $\Pi(\dfrac{a-20}{5}) = 0,01$

   on trouve par lecture inverse dans la table que $\Pi(2,33) \simeq 0,9901$

   donc (par symétrie de la courbe) : $\Pi(-2,33) \simeq 1 - 0,9901 \simeq 0,01$

   $\Pi(\dfrac{a-20}{5}) \simeq \Pi(-2,33)$

   $\dfrac{a-20}{5} \simeq -2,33$

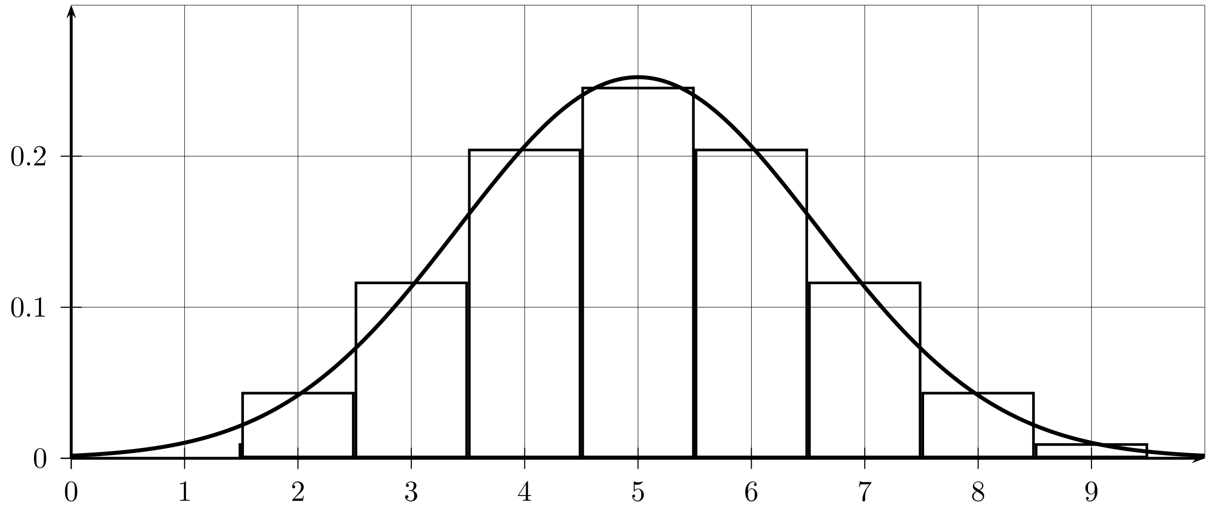
   $a \simeq 5 \times (-2,33) + 20$

   $\boxed{a \simeq 8,35}$

4 approximation d'une loi binomiale par une loi normale

4.1 activité

1. Exemple de 10 lancers indépendants d'une pièce équilibrée
   on lance 10 fois une pièce équilibrée avec indépendance des lancers,
   on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de "piles" obtenu parmi les 10 lancers
   (a) justifier pourquoi X suit une loi binomiale et donner ses paramètres
   (b) calculer $p(4 \leq X \leq 6)$ à 10^{-2} près
   (c) Voici le diagramme en bâtons de la loi binomiale $B(10; 0,5)$,
   ainsi que la courbe de la loi normale $N(m; \sigma)$ de même moyenne et de même écart type que la loi binomiale $B(10; 0,5)$
   calculer les valeurs exactes de m et σ



   (d) on remarque que la courbe de la loi normale est une "bonne approximation" du diagramme en bâtons
   on décide alors de trouver une approximation de la probabilité $p(4 \leq X \leq 6)$ en utilisant la courbe de la loi normale
   (on dit que l'on approxime la loi binomiale par une loi normale de même moyenne et de même écart type)
      i. à l'aire de quelle surface S_1 définie par des bâtons correspond $p(4 \leq X \leq 6)$? *(définir S_1)*
      ii. par l'aire de quelle surface S_2 défiie par la courbe peut-on *(semble t-il)* approcher l'aire précédente ? *(définir S_2)*
      iii. soit la variable aléatoire Y telle que Y suit une loi $N(5; \sqrt{2,5})$
      à quelle probabilité concernant Y correspond l'aire S_2 ?
      (préciser a et b tels que : Aire(S_2) = $p(a \leq Y \leq b)$)
      iv. calculer $p(3,5 \leq X \leq 6,5)$ par changement de variables et en utilisant la table de la loi normale centrée réduite
      v. en utilisant le fait que Aire $(S_1) \simeq$ Aire (S_2)
      donc que $p(4 \leq X \leq 6) \simeq p(3,5 \leq Y \leq 6,5)$
      quelle erreur absolue commet-on en remplaçant $p(4 \leq X \leq 6)$ par $p(3,5 \leq Y \leq 6,5)$?
      vi. en utilisant une approximation par la loi normale précédente,
      donner une approximation de $p(2 \leq X \leq 8)$
2. Exemple de 100 lancers indépendants d'une pièce équilibrée
   on lance 100 fois une pièce équilibrée avec indépendance des lancers,
   on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de "piles" obtenu
   (a) justifier pourquoi X suit une loi biomiale et donner ses paramètres
   (b) on cherche à calculer $p(40 \leq X \leq 60)$ en utilisant une approximation par une loi normale
      i. donner les paramètres m et σ de cette loi normale
      ii. soit Y où Y suit une loi $N(m; \sigma)$
      déterminer $p(39,5 \leq Y \leq 60,5)$ et en déduire une approximation de $p(40 \leq X \leq 60)$

4.2 à retenir

propriété 3 :*(admises)*

une loi binomiale $\boxed{B(n\,;p)}$ où n est un entier positif strict et $p \in]0\,;1[$
peut-être "approchée" par une loi normale $\boxed{N(np\,;\sqrt{np(1-p)})}$ de même moyenne et de même

écart type pourvu que le produit $\boxed{np \text{ soit "assez grand"}}$ *(par exemple : np > 15)*
sous cette condition :

$$(1) \begin{cases} \boxed{p(X \leq t)} \\ \\ X \sim B(n\,;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(Y \leq t + 0,5)} \\ \\ Y \sim N(np\,;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases}$$ *(+0,5 pour correction)*

$$(2) \begin{cases} \boxed{p(X \geq t)} \\ \\ X \sim B(n\,;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(Y \geq t - 0,5)} \\ \\ Y \sim N(np\,;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases}$$ *(-0,5 pour correction)*

$$(3) \begin{cases} \boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2)} \\ \\ X \sim B(n\,;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(t_1 - 0,5 \leq Y \leq t_2 + 0,5)} \\ \\ Y \sim N(np\,;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases}$$ *(-0,5 et +0,5 : correction)*

remarques : *(admises)*

a. un calcul de probabilité sur une loi binomiale revient un calcul de probabilité sur une loi normale.
b. par exemple, pour approcher $p(X \leq t)$ il suffit de calculer $p(Y \leq t + 0,5)$ que l'on peut calculer, après changement de variable, avec la table de la loi $N(0\,;1)$

4.3 exercices

exercice 5 :

Utiliser une approximation par une loi normale pour calculer les probabilités suivantes à 1% près où X suit une loi $B(50; 0,4)$

1. $p(15 \leq X \leq 25)$
2. $p(X \leq 20)$
3. $p(X \geq 18)$

exercice 6 :

Dans chaque cas, utiliser une approximation par une loi normale pour trouver la valeur entière de a où X suit une loi $B(100; 0,6)$

1. $p(24 - a \leq X \leq 24 + a) \simeq 0,95$
2. $p(24 - a \leq X \leq 24 + a) \simeq 0,99$

exercice 7 :

Un ordinateur est programmé pour effectuer des calculs de comptabilité à partir de bases de données afin d'obtenir des bilans *(un par base de donnée)*.
On estime que pour chaque base de donnée, la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de comptabilité pour le bilan est de 4% et on dit alors que le bilan est "erroné".
On estime que les bilans sont indépendants.
On considère la série des 500 bilans d'une journée.
Soit X le nombre de bilan erronés pour cette journée.

1. (a) caractériser la loi suivi par X en justifiant et donner ses paramètres
   (b) calculer la probabilité $p(X = 20)$
   (c) calculer la probabilité qu'il y ait entre 18 et 22 bilans erronés à 0,01 près
2. on décide de faire une approximation de la loi de X par une loi normale $N(m; \sigma)$
   (a) donner les valeurs exactes de m et σ
   (b) calculer la probabilité $p(17,5 \leq Y \leq 22,5)$ à 0,01 près
   et comparer cette probabilité avec celle de la question 1.c.
   (c) en utilisant l'approximation par la loi normale précécente,
   estimer la valeur de $p(X \geq 15)$ à 1% près et interpréter le résultat
   (d) de même pour $p(X \leq 15)$
   (e) procéder de même pour déterminer la valeur entière de a telle que $p(20 - a \leq X \leq 20 + a) \simeq 0,95$

4.4 corrigés exercices

corrigé exercice 5 :

corrigé exercice 6 :

corrigé exercice 7 :

1. (a) X suit une loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 500}$ et $\boxed{p = 0,04}$

   (b) $p(X = 20) = C_{500}^{20} \times 0,04^{20} \times 0,96^{480} \simeq \boxed{0,09}$

   (c) $p(18 \leq X \leq 22) = p(X = 18) + p(X = 19) + ... + p(X = 22)$

   $p(18 \leq X \leq 22) \simeq 0,09 + 0,09 + ... + 0,08 \simeq \boxed{0,44}$

2. on décide de faire une approximation de la loi de X par une loi normale $N(m; \sigma)$

   (a) $m = np = 500 \times 0,04 = \boxed{20}$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p} = \sqrt{500 \times 0,04 \times 0,96} = \boxed{\sqrt{19,2}}$

   (b) $p(17,5 \leq Y \leq 22,5) = p(\dfrac{17,5-20}{\sqrt{19,2}} \leq \dfrac{Y-20}{\sqrt{19,2}} \leq \dfrac{22,5-20}{\sqrt{19,2}})$

   $p(17,5 \leq Y \leq 22,5) \simeq p(-0,57 \leq Z \leq 0,57)$ où Z suit une loi $N(0; 1)$

   $p(17,5 \leq Y \leq 22,5) = 2\Pi(0,57) - 1$

   $p(17,5 \leq Y \leq 22,5) \simeq 2 \times 0,7157 - 1$

   $\boxed{p(17,5 \leq Y \leq 22,5) \simeq 0,4314}$

   et on retrouve approximativement la probabilité de la question 1.c.

   (c) de même : $p(X \geq 15) \simeq p(Y \geq 14,5)$
   avec
   $p(Y \geq 14,5) = p(\dfrac{Y-20}{\sqrt{19,2}} \geq \dfrac{14,5-20}{\sqrt{19,2}})$

   $p(Y \geq 14,5) = p(Z \geq -1,26)$ où Z suit une loi $N(0; 1)$

   $p(Y \geq 14,5) = 1 - p(Z \leq -1,26)$

   $p(Y \geq 14,5) = 1 - \Pi(-1,26)$

   $p(Y \geq 14,5) = 1 - (1 - \Pi(1,26))$

   $p(Y \geq 14,5) = \Pi(1,26))$

   $\boxed{p(Y \geq 14,5) \simeq p(X \geq 14) \simeq 0,8962}$

   soit $\simeq 90\%$ de chance qu'il y ait plus de 15 bilans érronés

   (d) de même $p(X \leq 15) \simeq p(Y \leq 15,5) \simeq \Pi(-1,03) \simeq 1 - \Pi(1,03) \simeq 1 - 0,8485 \simeq 0,1525$

   (e) procéder de même pour déterminer la valeur entière de a telle que $p(20 - a \leq X \leq 20 + a) \simeq 0,95$
   $p(20 - a \leq X \leq 20 + a) \simeq p(19,5 - a \leq Y \leq 20,5 + a) \simeq 0,95$
   $p(20 - a \leq X \leq 20 + a) \simeq p(\dfrac{-0,5-a}{\sqrt{19,2}} \leq Z \leq \dfrac{0,5+a}{\sqrt{19,5}}) \simeq 0,95$ où Z suit une loi $N(0; 1)$

   $2\Pi(\dfrac{0,5+a}{\sqrt{19,5}}) - 1 \simeq 0,95$

   $\Pi(\dfrac{0,5+a}{\sqrt{19,5}}) \simeq \dfrac{1+0,95}{2} \simeq 0.975 \simeq \Pi(1,96)$

   $\dfrac{0,5+a}{\sqrt{19,5}} = 1,96$ soit $a \simeq 1,96 \times \sqrt{19,2} - 0,5 \simeq 8,08$

   conclusion $\boxed{p(12 \leq X \leq 28) \simeq 0,95}$

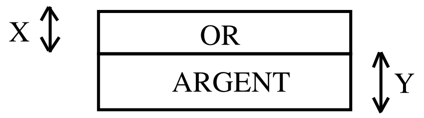
5 somme de lois normales indépendantes

5.1 activités

Principe *(Admis)*

$$\text{si} \begin{cases} X_1 \text{ suit une loi normale } N(m_1\ ;\sigma_1) \\ \\ X_2 \text{ suit une loi normale } N(m_2\ ;\sigma_2) \\ \\ X_1 et X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases} \quad \text{alors} \begin{cases} \boxed{Z = X_1 + X_2} \text{ suit une loi normale} \\ \text{avec} \\ \boxed{N(m = m_1 + m_2\ ; \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})} \end{cases}$$

Activité 1 :



Une pièce de monnaie de collection est constituée de deux parties soudées
Une partie est en or et l'autre en argent
La machine qui fabrique la partie en or assure une épaisseur X
où X suit une loi normale de paramètres $m_1 = 2$ mm et d'écart type $\sigma_1 = 0,1$ mm
La machine qui fabrique la partie en argent assure une épaisseur Y
où Y suit une loi normale de paramètres $m_2 = 3$ mm et d'écart type $\sigma_2 = 0,2$ mm

on admet que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes

la pièce sera déclarée "conforme en épaisseur"
si et seulement si sont épaisseur est comprise entre $4,8$ mm et $5,2$ mm

le réglage des machines sera déclaré "correct"
si et seulement si une pièce fabriquée a une probabilité d'être conforme d'au moins 95%

1. soit $Z = X + Y$ l'épaisseur totale d'une pièce fabriquée
   (a) Déterminer en justifiant la loi de probabilité suivie par Z *(à 0,001 près)*
   (b) calculer la probabilité $p(4,8 \leq Z \leq 5,2)$ à 1 % près et interpréter le résultat
2. le réglage des machines est-il correct ? (justifier)
3. suite à un nouveau réglage des deux machines on a $\sigma_1 = 0,05$ mm et $\sigma_2 = 0,08$ mm
   le réglage des machines est-il maintenant correct ?

Activité 2 :

Un examen est constitué de deux parties notées chacune sur 10 points
Un certain candidat est actuellement entraîné de façon telle que :
Sa note X à la première partie suit une loi $N(7;1)$
Sa note Y à la seconde partie suit une loi $N(6;2)$

Il faut *(avec un "dossier correct")* au moins au moins 9,5 pour être admis

1. soit $T = X + Y$ la note totale de ce candidat
   (a) Déterminer en justifiant, la loi de probabilité suivie par T *(à 0,1 près)*
   (b) calculer la probabilité $p(T \geq 9,5)$ à 1 % près et interpréter le résultat
2. avec un bon entraînement le candidat réduit "chacun des ses écart types" à $0,5$
   quelle est, par conséquent, la probabilité que ce candidat soit admis ? *(avec un "dossier correct")*

5.2 à retenir

propriété 4 :*(admises)*

$$\text{si} \begin{cases} X_1 \text{ suit une loi normale } N(m_1\ ;\sigma_1) \\ X_2 \text{ suit une loi normale } N(m_2\ ;\sigma_2) \\ X_1 et X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases}$$

alors

$\boxed{Z = X_1 + X_2}$ suit une loi normale $\boxed{N(m = m_1 + m_2\ ;\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}$

remarques : *(admises)*

a. on peut ainsi faire des calculs de probabilité dans le cas de "sommes de lois normales indépendantes"

5.3 exercices

exercice 8 :

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois normales $N(22; 4)$ et $N(18; 3)$

Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$

1. préciser la loi suivie par Z et donner ses paramètres
2. en déduire $p(34 \leq Z \leq 48)$

exercice 9 :

Deux supermarchés A et B appartiennent au même groupe.
Le chiffre d'affaire quotidien X du supermarché A en milliers d'euros, suit une loi $N(50; 2)$
et celui Y du supermarché B en milliers d'euros, suit une loi $N(60; 3)$
On admet que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes
Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$ correspondant à la somme des deux chiffres d'affaires quotidiens en milliers d'euros

1. préciser la loi suivie par Z et donner ses paramètres
2. en déduire la probabilité que le chiffre d'affaire total soit compris entre 104000 € et 122000 €

5.4 corrigés exercices

corrigé exercice 8 :

corrigé exercice 9 :

1. Z suit une loi normale de paramètres $m = 50 + 60 = \boxed{110}$ et $\sigma = \sqrt{2^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{13}}$
2. probabilité que le chiffre d'affaire total soit compris entre 104000 € et 122000 €
   $p(104 \leq Z \leq 12,2)$

   $p(104 \leq Z \leq 122) = p(\dfrac{104 - 110}{\sqrt{13}} \leq \dfrac{Z - 110}{\sqrt{13}} \leq \dfrac{122 - 110}{\sqrt{13}})$

   $p(104 \leq Z \leq 122) = p(-1,7 \leq Z \leq 3,3)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(104 \leq Z \leq 122) = \Pi(3,3) - \Pi(-1,7)$

   $p(104 \leq Z \leq 122) = \Pi(3,3) - (1 - \Pi(1,7))$

   $p(104 \leq Z \leq 122) = \Pi(3,3) + \Pi(1,7) - 1$

   $p(104 \leq Z \leq 122) \simeq 0,99952 + 0,0446 - 1$

   $\boxed{p(104 \leq Z \leq 122) \simeq 0,95}$

<u>exercice 51 page 265</u>

X suit une loi $N(24;6)$

a. $p(X \leq 30) = p(\frac{X-24}{6} \leq \frac{30-24}{6})$

$p(X \leq 30) = p(Z \leq 1)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(X \leq 30) = \Pi(1)$

$\boxed{p(X \leq 30) \simeq 0,8413}$

b. $p(X \geq 30) = 1 - p(X < 30)$

$p(X \geq 30) = 1 - p(X \leq 30)$

$p(X \geq 30) \simeq 1 - 0,8413$

$\boxed{p(X \geq 30) \simeq 0,1587}$

c. $p(X \leq 21) = p(\frac{X-24}{6} \leq \frac{21-24}{6})$

$p(X \leq 21) = p(Z \leq -0,5)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(X \leq 21) = \Pi(-0,5)$

$p(X \leq 21) = 1 - \Pi(0,5)$

$p(X \leq 21) \simeq 1 - 0,6915$

$\boxed{p(X \leq 21) \simeq 0,3085}$

d. $p(27 \leq X \leq 33) = p(\frac{27-24}{6} \leq \frac{X-24}{6} \leq \frac{33-24}{6})$

$p(27 \leq X \leq 33) = p(0,5 \leq Z \leq 1,5)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(27 \leq X \leq 33) = \Pi(1,5) - \Pi(0,5)$

$p(27 \leq X \leq 33) \simeq 0,9332 - 0,6915$

$\boxed{p(27 \leq X \leq 33) \simeq 0,2417}$

e. $p(16,5 \leq X \leq 31,5) = p(\frac{16,5-24}{6} \leq \frac{X-24}{6} \leq \frac{31,5-24}{6})$

$p(16,5 \leq X \leq 31,5) = p(-1,25 \leq Z \leq 1,25)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(16,5 \leq X \leq 31,5) = \Pi(1,25) - (1 - \Pi(1,25)) = 2\Pi(1,25) - 1$

$p(16,5 \leq X \leq 31,5) = 2 \times 0,8944 - 1$

$\boxed{p(16,5 \leq X \leq 31,5) \simeq 0,7888}$

f. $p(18 \leq X \leq 20) = p(\frac{18-24}{6} \leq \frac{X-24}{6} \leq \frac{20-24}{6})$

$p(18 \leq X \leq 20) = p(-1 \leq Z \leq -\frac{2}{3})$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(18 \leq X \leq 20) = \Pi(-\frac{2}{3}) - \Pi(-1)$

$p(18 \leq X \leq 20) \simeq (1 - \Pi(0,67)) - 1 + 0,8413$

$p(18 \leq X \leq 20) \simeq (1 - 0,7486) - 1 + 0,8413$

$\boxed{p(16,5 \leq X \leq 31,5) \simeq 0,0927}$

exercice 52 page 265

X suit une loi $N(150;0,2)$

a. Il suffit de calculer la probabilité $p(149,6 \leq X \leq 150,4)$

$p(149,6 \leq X \leq 150,4) = p(\frac{149,6-150}{0,2} \leq \frac{X-150}{0,2} \leq \frac{150,4-150}{0,2})$

$p(149,6 \leq X \leq 150,4) = p(-2 \leq Z \leq 2)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(149,6 \leq X \leq 150,4) = \Pi(2) - \Pi(-2) = 2\Pi(2) - 1$

$p(149,6 \leq X \leq 150,4) \simeq 2 \times 0,9772 - 1$

$p(149,6 \leq X \leq 150,4) \simeq 0,9544$

$\boxed{\text{la probabilité qu'une bouteille soit conforme est de 95,4\%}}$

exercice 55.a page 266

X suit une loi $N(24;6,5)$

$p(24-a \leq X \leq 24+a) = 0,99$

$p(\frac{24-a-24}{6,5} \leq \frac{X-24}{6,5} \leq \frac{24+a-24}{6,5}) = 0,99$

$p(-\frac{a}{6,5} \leq Z \leq \frac{a}{6,5}) = 0,99$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$\Pi(\frac{a}{6,5}) - \Pi(-\frac{a}{6,5}) = 0,99$

$\Pi(\frac{a}{6,5}) - (1 - \Pi(\frac{a}{6,5})) = 0,99$

$2\Pi(\frac{a}{6,5}) - 1 = 0,99$

$\Pi(\frac{a}{6,5}) = \frac{0,99+1}{2} = 0,995$ puis on trouve par lecture inverse dans la table que $\Pi(2,58) \simeq 0,95$

$\Pi(\frac{a}{6,5}) \simeq \Pi(2,58) \Longleftrightarrow \frac{a}{6,5} \simeq 2,58 \Longleftrightarrow a \simeq 6,5 \times 2,58 \Longleftrightarrow \boxed{a \simeq 16,77}$

exercice 59 page 266

X suit une loi $N(68;15)$

a.il suffit de calculer la probabilité suivante : $p(X \geq 100)$

$p(X \geq 100) = p(\dfrac{X-68}{15} \geq \dfrac{100-68}{15})$

$p(X \geq 100) \simeq p(Z \geq 2,13)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(X \geq 100) \simeq 1 - p(Z \leq 2,13)$

$p(X \geq 100) \simeq 1 - \Pi(2,13)$

$p(X \geq 100) \simeq 1 - 0,9834$

$p(X \geq 100) \simeq 0,0166$

$\boxed{\text{la probabilité que la note soit supérieure ou égale 100 est d'environs 2\%}}$

b. Il suffit de calculer la probabilité suivante : $p(50 \leq X \leq 80)$

$p(50 \leq X \leq 80) = p(\dfrac{50-68}{15} \leq \dfrac{X-68}{15} \leq \dfrac{80-68}{15})$

$p(50 \leq X \leq 80) = p(-1,2 \leq Z \leq 0,8)$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$p(50 \leq X \leq 80) = \Pi(0,8) - \Pi(-1,2)$

$p(50 \leq X \leq 80) = \Pi(0,8) - (1 - \pi(1,2))$

$p(50 \leq X \leq 80) \simeq 0,7881 - 1 + 0,8849$

$p(50 \leq X \leq 80) \simeq 0,673$

$\boxed{\text{la probabilité que la note soit comprise entre 50 et 80 euros est d'environs 67\%}}$

c. $p(X \leq a) = 0,1$

$p(\dfrac{X-68}{15} \leq \dfrac{a-68}{15}) = 0,1$

$p(Z \leq \dfrac{a-68}{15}) = 0,1$ où Z suit une loi $N(0;1)$

$\Pi(\dfrac{a-68}{15}) = 0,1 \Longleftrightarrow 1 - \Pi(\dfrac{a-68}{15}) = 1 - 0,1 = 0,9$

on trouve par lecture inverse dans la table que $\Pi(1,29) \simeq 0,9$

donc (par symétrie de la courbe) : $\Pi(-1,29) \simeq 1 - 0,9 \simeq 0,1$

$\Pi(\dfrac{a-68}{15}) \simeq \Pi(-1,29) \Longleftrightarrow \dfrac{a-68}{15} \simeq -1,29 \Longleftrightarrow a \simeq 15 \times (-1,29) + 68 \simeq 48,65$

$\boxed{\text{le montant cherché est 48,65 euros}}$

6 évaluations

6.1 évaluation

6.2 devoir maison

devoir maison :
(loi normale, loi binomiale, approximation d'une loi binomiale par une loi normale)

<u>exercice 1</u> : (87 page 275)

une usine fabrique des rondelles

A. **loi normale**

une rondelle est conforme si son diamètre appartient l'intervalle $[\ 89,6\ ;\ 90,4\ ]$

1. On suppose que le diamètre X_1 d'une rondelle suit une loi $N(90; 0,17)$
   Quelle est la probabilité qu'une rondelle soit conforme 0,01 près ?
2. On suppose que le diamètre D d'une rondelle suit une loi $N(90; \sigma_1)$
   Quelle est la valeur de σ_1 pour que probabilité qu'une rondelle soit conforme soit de 99%

B. **loi binomiale**

soit E l'événement : "la rondelle est défectueuse"
on sait que $p(E) = 0,02$
on prélève 4 rondelles au hasard et on suppose que le stock est assez important pour que l'on puisse assimilier ce prélèvement un tirage avec remise.
soit Y_1 le nombre de rondelles défectueuses parmi les 4.

1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres
2. calculer la pobabilité qu'aucune rondelle ne soit défectueuse 0,001 près
3. calculer la pobabilité qu'au plus une rondelle soit défectueuse 0,001 près

C. **approximaton d'une loi binomiale par une loi normale**

on prélève 1000 rondelles au hasard et on suppose que le stock est assez important pour que l'on puisse assimilier ce prélèvement un tirage avec remise.
soit Y_2 le nombre de rondelles défectueuses parmi les 1000.
on admet que Y_2 suit une loi $B(1000; 0,02)$
on approche cette loi binomiale par une loi normale $N(20; 4,43)$
soit Z unevariable aléatoire qui suit une loi normale $N(20; 4,43)$

1. Justifier les paramètres de cette loi
2. calculer la pobabilité qu'au plus 15 rondelles soit défectueuse, c'est dire $p(Z \leq 15,5)$

<u>exercice 2</u> : (89 page 276)

une usine fabrique des jetons

A. **loi normale**

$$\text{un jeton est conforme si : } \left\{ \begin{array}{c} \text{son diamètre appartient l'intervalle } [\ 28,6\ ;\ 29,4\ ] \\ \text{son épaisseur appartient l'intervalle } [\ 1,9\ ;\ 2,1\ ] \end{array} \right.$$

$$\text{On suppose que : } \left\{ \begin{array}{l} \text{le diamètre } D \text{ suit une loi } N(29; 0,2) \\ \text{l'épaisseur } E \text{ suit une loi } N(2; 0,04) \end{array} \right.$$

1. Quelle est la probabilité qu'un jeton ait un diamètre conforme 0,001 près ?
2. Quelle est la probabilité qu'un jeton ait une épaisseur conforme 0,001 près ?
3. En déduire la probabilité qu'un jeton soit conforme 0,001 près ?

B. **loi binomiale**

on sait que 6% des jetons ne sont pas conformes
on prélève 100 jetons au hasard et on suppose que le stock est assez important pour que l'on puisse assimilier ce prélèvement un tirage avec remise.
soit X le nombre de jetons non conformes

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres
2. calculer la pobabilité qu'un seul jeton soit défectueux 0,001 près

6.3 corrigé devoir maison

corrigé exercice 1 : (87 page 275)

A. **loi normale**

1. probabilité qu'une rondelle soit conforme 0,01 près :

$$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = p(\frac{89,6-90}{0,17} \leq \frac{X_1-90}{0,17} \leq \frac{90,4-90}{0,17}) = p(-2,35 \leq Z_1 \leq 2,35)$$

où Z suit une loi $N(0;1)$

$$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = \Pi(2,35) - \Pi(-2,35) = 2\Pi(2,35) - 1 \simeq \boxed{0,98}$$

2. On suppose que le diamètre D d'une rondelle suit une loi $N(90;\sigma_1)$
valeur de σ_1 pour que probabilité qu'une rondelle soit conforme soit de 99%

$$p(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = 0,99$$

$$\iff p(\frac{89,6-90}{\sigma_1} \leq \frac{X_1-90}{\sigma_1} \leq \frac{90,4-90}{\sigma_1}) = 0,99$$

$$\iff p(\frac{-0,4}{\sigma_1} \leq \frac{X_1-90}{\sigma_1} \leq \frac{0,4}{\sigma_1}) = 0,99$$

$$\iff p(\frac{-0,4}{\sigma_1} \leq Z_1 \leq \frac{0,4}{\sigma_1}) = 0,99 \quad \text{où } Z \text{ suit une loi } N(0;1)$$

$$\iff 2\Pi(\frac{0,4}{\sigma_1}) - 1 = 0,99 \quad \iff \Pi(\frac{0,4}{\sigma_1}) = 0,995$$

or on lit dans la table que : $\Pi(2,575) = 0,995$

$$\iff \Pi(\frac{0,4}{\sigma_1}) = \Pi(2,575)$$

$$\iff \frac{0,4}{\sigma_1} = 2,575$$

$$\iff \sigma_1 = \frac{0,4}{2,575} \simeq \boxed{0,16}$$

B. **loi binomiale**

1. Y_1 suit une loi $B(4;0,02)$ car $\begin{cases} \text{les tirages sont indépendants} \\ \text{on repète 4 tirages} \\ \text{pour chaque tirages, 2 issus : succès } (p=0,02), \text{ échec } (q=0,98) \end{cases}$

2. pobabilité qu'aucune rondelle ne soit défectueuse 0,001 près

$$p(Y_1 = 0) = C_4^0 0,02^0(1-0,02)^{(4-0)} \simeq \boxed{0,92} \text{ 0,01 près.}$$

3. pobabilité qu'au plus une rondelle soit défectueuse 0,001 près

$$p(Y_1 \leq 1) = p(Y_1 = 0) + p(Y_1 = 1) \simeq \boxed{0,995} \text{ 0,01 près.}$$

C. **approximaton d'une loi binomiale par une loi normale**

1. les paramètres de la loi normale d'approximation :

$$m = 1000 \times 0,02 = \boxed{20} \text{ et } \sigma = \sqrt{1000 \times 0,02 \times 0,98} \simeq \boxed{4,43}$$

2. pobabilité qu'au plus 15 rondelles soit défectueuse :

$$p(Z \leq 15,5) = p(\frac{X-20}{4,43} \leq \frac{15,5-20}{4,43}) = p(Z_1 \leq -1,02) \text{ où } Z_1 \text{ suit une loi } N(0;1)$$

$$p(Z \leq 15,5) = 1 - \Pi(1,02) \simeq \boxed{0,154}$$

corrigé exercice 2 : (89 page 276)

une usine fabrique des jetons

A. **loi normale**

un jeton est conforme si : $\begin{cases} \text{son diamètre appartient l'intervalle } [\ 28,6\ ;\ 29,4\ ] \\ \text{son épaisseur appartient l'intervalle } [\ 1,9\ ;\ 2,1\ ] \end{cases}$

On suppose que : $\begin{cases} \text{le diamètre } D \text{ suit une loi } N(29;0,2) \\ \text{l'épaisseur } E \text{ suit une loi } N(2;0,04) \end{cases}$

1. probabilité qu'un jeton ait un diamètre conforme 0,001 près :

   $p(28,6 \leq D \leq 29,4) = p(\frac{28,6-29}{0,2} \leq \frac{D-29}{0,2} \leq \frac{29,4-29}{0,2}) = p(-2 \leq Z_1 \leq 2)$
   où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(28,6 \leq D \leq 29,4) = \Pi(2) - \Pi(-2) = 2\Pi(2) - 1 \simeq \boxed{0,954}$

2. Quelle est la probabilité qu'un jeton ait une épaisseur conforme 0,001 près :

   $p(1,9 \leq E \leq 2,1) = p(\frac{1,9-2}{0,04} \leq \frac{E-2}{0,04} \leq \frac{2,1-2}{0,04}) = p(-2,5 \leq Z_1 \leq 2,5)$
   où Z suit une loi $N(0;1)$

   $p(1,9 \leq E \leq 2,1) = \Pi(2,5) - \Pi(-2,5) = 2\Pi(2,5) - 1 \simeq \boxed{0,988}$

3. En déduire la probabilité qu'un jeton soit conforme 0,001 près :

   comme D et E sont indépendants on a :

   $p([1,9 \leq E \leq 2,1] \cap [28,6 \leq D \leq 29,4]) = 0,954 \times 0,988 \simeq \boxed{0,943}$

B. **loi binomiale**

on sait que 6% des jetons ne sont pas conformes

on prélève 100 jetons au hasard et on suppose que le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement un tirage avec remise.

soit X le nombre de jetons non conformes

1. X suit une loi $B(100;0,06)$ car $\begin{cases} \text{les tirages sont indépendants} \\ \text{on repète 100 tirages} \\ \text{pour chaque tirages, 2 issus : succès } (p=0,06)\text{, échec } (q=0,94) \end{cases}$

2. pobabilité qu'un seul jeton soit défectueux 0,001 près

   $p(X=1) = C_{100}^{1} 0,06^1 (1-0,06)^{(100-1)} \simeq \boxed{0,013}$ 0,01 près.

7 résumé de cours

7.1 loi normale

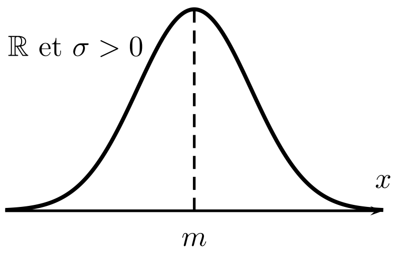
définition 1 :

A une $\boxed{\text{loi normale } N(m;\sigma)}$ de $\boxed{\text{moyenne } m}$ et $\boxed{\text{d'écart type } \sigma}$ correspond une unique courbe en cloche

représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ où $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

Cette courbe admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = m$,

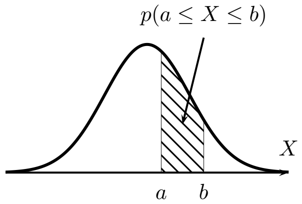
elle admet un maximum en $x = m$

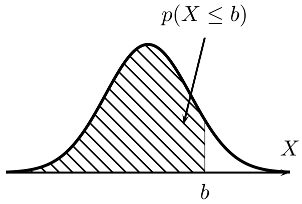


définition 2 :

La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ (on note : $X \sim N(m;\sigma)$) signifie que :
L'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble de tous les nombres réels : $X \in]-\infty\ ;\ +\infty[$
Quels que soient les deux nombres a et b $(a \leq b)$, la probabilité que X soit compris entre a et b est égale à "l'aire sous la courbe" en cloche $N(m;\sigma)$ entre a et b

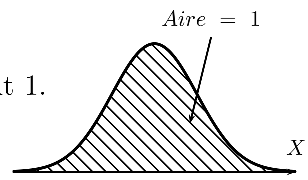
$\boxed{p(a \leq X \leq b) = \text{aire sous la courbe entre } a \text{ et } b}$
et aussi
$\boxed{p(X \leq b) = \text{aire sous la courbe de } -\infty \text{ jusqu'a } b}$





Remarques : *(admises)*

(a) Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, l'aire "totale" sous la courbe vaut 1.
(pour x allant de $-\infty$ à $+\infty$)



(b) Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ on a : $p(a \leq X \leq a) = p(X = a) = 0$
la probabilité d'une "valeur isolée" est nulle

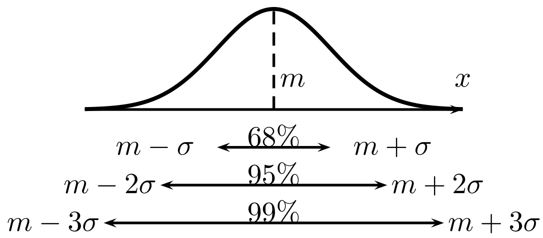
(c) Quels que soient les deux nombres a et b avec $a \leq b$ on a : $p(a \leq X \leq b) = p(a < X < b)$
(pour une loi normale, $<$ et $\leq$ sont "équivalents", ainsi que $>$ et $\geq$)

propriété 1 : *(admise)*

Soit X suivant une loi $N(m;\sigma)$

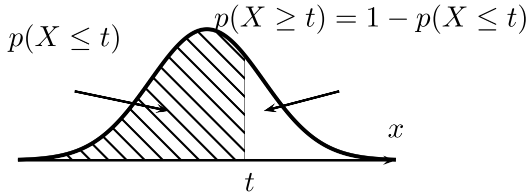
- $\boxed{E(X) = m}$, $\boxed{V(x) = \sigma^2}$ et $\boxed{\sigma(X) = \sigma}$

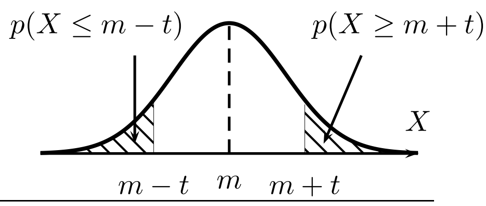
- $\boxed{p(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) \simeq 68\%}$
- $\boxed{p(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \simeq 95\%}$
- $\boxed{p(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) \simeq 99\%}$



- $\boxed{p(X \geq m) = p(X \leq m) = 0,5}$
- $\boxed{p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t)}$ $(t > 0)$
- $\boxed{p(X \leq m-t) = p(X \geq m+t) = 1 - p(X \leq m+t)}$ $(t > 0)$
- $\boxed{p(m-t \leq X \leq m+t) = 2p(X \leq m+t) - 1}$ $(t > 0)$

- Calculatrice : $\boxed{p(a \leq X \leq b) = normalcdf(a, b, m, \sigma)}$





7.2 approximation d'une loi binomiale par une loi normale

propriété 3 :*(admises)*

une loi binomiale $\boxed{B(n\ ;p)}$ où n est un entier positif strict et $p \in]0\ ;1[$
peut-être "approchée" par une loi normale $\boxed{N(np\ ;\sqrt{np(1-p)})}$ de même moyenne et de même

écart type pourvu que le produit $\boxed{np \text{ soit "assez grand"}}$ *(par exemple : np > 15)*
sous cette condition :

$$(1) \begin{cases} \boxed{p(X \leq t)} \\ X \sim B(n\ ;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(Y \leq t+0,5)} \\ Y \sim N(np\ ;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases} \quad \textit{(+0,5 pour correction)}$$

$$(2) \begin{cases} \boxed{p(X \geq t)} \\ X \sim B(n\ ;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(Y \geq t-0,5)} \\ Y \sim N(np\ ;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases} \quad \textit{(-0,5 pour correction)}$$

$$(3) \begin{cases} \boxed{p(t_1 \leq X \leq t_2)} \\ X \sim B(n\ ;p) \end{cases} \text{ est "approchée" par } \begin{cases} \boxed{p(t_1-0,5 \leq Y \leq t_2+0,5)} \\ Y \sim N(np\ ;\sqrt{np(1-p)}) \end{cases} \quad \textit{(-0,5 et +0,5 : correction)}$$

remarques : *(admises)*

a. un calcul de probabilité sur une loi binomiale revient un calcul de probabilité sur une loi normale.
b. par exemple, pour approcher $p(X \leq t)$ il suffit de calculer $p(Y \leq t+0,5)$ que l'on peut calculer, après changement de variable, avec la table de la loi $N(0\ ;1)$

7.3 somme de deux lois normales indépendantes

propriété 4 :*(admises)*

$$\text{si} \begin{cases} X_1 \text{ suit une loi normale } N(m_1\ ;\sigma_1) \\ X_2 \text{ suit une loi normale } N(m_2\ ;\sigma_2) \\ X_1 et X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases}$$

alors

$\boxed{Z = X_1 + X_2}$ suit une loi normale $\boxed{N(m = m_1 + m_2\ ;\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}$

remarques : *(admises)*

a. on peut ainsi faire des calculs de probabilité dans le cas de "sommes de lois normales indépendantes"

8 tp

8.1 TP : Loi normale

1. Loi Normale et tableur

   (a) préparer une feuille de type tableur comme ci dessous

	A	B	C	D
1	m	100		
2	sigma	10		
3				
4	a	80		
5	b (b>a)	120		
6				
7	p(X<a)	p(X>a)	p(X<b)	p(a<X<b) = p(X<b) – p(X<a)
8	0,022750132	0,977249868	0,9772498681	0,9544997361
9				
10				= C8-A8
11				
12			= LOI.NORMALE(B5;B1;B2;1)	
13		= 1 - A8		
14				
15				
16	= LOI.NORMALE(B4;B1;B2;1)			

   la formule qui donne la probabilité $P(X < a)$ est : $\boxed{= LOI.NORMALE(a; m; \sigma; 1)}$
   où m est la moyenne de la loi normale suivie par X, σ est l'écart type et a est le nombre que l'on veut *(il faut mettre 1 en dernier paramètre)*

   (b) en utilisant votre feuille de calcul, compléter ci dessous.

      i. X suit une loi $N(100; 10)$

         A. $p(X < 80) \simeq ...$
         B. $p(X > 80) \simeq ...$
         C. $p(X < 120) \simeq ...$
         D. $p(80 < X < 120) \simeq ...$
         E. $p(X < 100) \simeq ...$
         F. $p(X \in [\ 90;\ 110]) \simeq ...$
         G. $p(X \in [\ 80;\ 120]) \simeq ...$
         H. $p(X \in [\ 70;\ 130]) \simeq ...$

      ii. vérifier tous ces résultats avec géogébra

      iii. X suit une loi $N(10; 100)$

         A. $p(X < 80) \simeq ...$
         B. $p(X < -100) \simeq ...$
         C. $p(-200 < X < -100) \simeq ...$
         D. $p(X \in [\ -90;\ 110]) \simeq ...$
         E. $p(X \in [\ -190;\ 210]) \simeq ...$

      iv. vérifier tous ces résultats avec géogébra

      v. créer de manière analogue, dans un deuxième onglet, la feuille suivante en entrant les formules qu'il faut où X suit une loi $N(100; 10)$

	A	B	C
1	m	100	
2	sigma	10	
3			
4	a	p(X<a)	p(X>a)
5	80	0,022750132	0,977249868
6	81	0,02871656	0,97128344
7	82	0,035930319	0,964069681
8	83	0,044565463	0,955434537
9	84	0,054799292	0,945200708
10	85	[illegible]	[illegible]

         A. déterminer la plus petite valeur du nombre entier a telle que $p(X < a) \geq 10\%$

            $a \geq ...$

         B. déterminer la plus petite valeur du nombre entier a telle que $p(X > a) \leq 10\%$

            $a \geq ...$

Vous utiliserez les logiciels de votre choix pour répondre aux questions suivantes

2. Un auto entrepreneur vend X barquettes repas à l'année où X suit une loi normale de moyenne $m = 2400$ et d'écart type $\sigma = 400$
   Il réalise un bénéfice unitaire de 20€ par barquette
   les charges fixes annuelles sont de 30000€
   (a) quelle est la probabilité que le bénéfice annuel soit positif strict ?
   Explications :

   (b) quelle est la probabilité que son salaire mensuel soit de moins de 1500€ ?
   Explications :

   (c) quelle est la probabilité que son salaire mensuel soit d'au moins 2000€ ?
   Explications :

   (d) quelle est la probabilité que son salaire mensuel soit compris entre 1500€ et 2000€ ?
   Explications :

3. l'entrepreneur souhaite augmenter la probabilité d'avoir un "bon salaire" mensuel
   (a) quel nombre moyen de ventes minimal annuelles m devrait-il faire en gardant un écart type de $\sigma = 400$, pour que la probabilité qu'il gagne plus de 3000€ par mois dépasse 99% ?
   Explications :

   (b) avec un nombre moyen de ventes annuelles $m = 2400$ quel écart type σ faudrait-il pour que la probabilité qu'il gagne plus de 3000€ par mois soit de 99% ?
   Explications :

   (c) avec un nombre moyen de ventes annuelles $m = 3600$ quels écarts types σ garantissent une probabilité minimale de 99% d'avoir au moins 3000€ par mois ?
   Explications :

8.2 TP : Loi normale et loi binomiale

Voici quelques données concernant les ventes quotidiennes d'un certain produit pour un point de vente.
_ bénéfice unitaire *(par vente)* : 10 euros
_ nombre moyen de clients par jour : 200 clients
_ probabilité d'achat d'un produit par le client : 15%
_ coût total quotidien concernant le rayon ou le produit est en vente : 250 euros

1. on assimile l'arrivée d'un client dans le rayon de vente à une expérience aléatoire, le client achète ou bien n'achète pas un produit, et, on considère que le fait qu'un client achète le produit n'a aucun effet sur les autres clients *(achats indépendants)*.
   on note X le nombre de produits vendus à la fin de la journée.

   Vous utiliserez, si besoin, les logiciels *(géogébra, tableur, ...)* ou calculatrice personnelle pour répondre aux questions suivantes

   (a) quelles sont les valeurs possibles pour X ? : ...

   (b) X est une variable aléatoire ! quelle est sa loi de probabilité ? quels sont ses paramètres ? *(justifier)*

   (c) expliquez votre démarche *(logiciels utilisés)* pour répondre aux questions suivantes
   Démarche : ...

   i. quel est le nombre de ventes quotidiennes le plus probable ? ...

   et quelle est sa probabilité à 1% ? ...

   ii. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait au moins 30 ventes ? ...

   iii. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait au plus 30 ventes ? ...

   iv. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait entre 20 et 40 ventes ? ...

   v. trouver l'intervalle $[a; b]$ le moins large possible pour que la probabilité qu'il y ait entre a ventes et b ventes dépasse 99% ...

   (d) on s'intéresse maintenant au bénéfice quotidien
   i. quel est le nombre moyen de ventes quotidiennes ? :...
   ii. montrer ci dessous que le bénéfice moyen quotidien est de 50 €
   ...

   iii. Montrer que le bénéfice quotidien est donné par $B = 10X - 250$
   A. en déduire la probabilité à 1% près que ce bénéfice soit positif strict ...

B. déterminez la probabilité à 1% près pour que ce bénéfice soit d'au moins 150 euros ...

C. quel est le bénéfice le plus probable et quelle est sa probabilité à 1% près ...

(e) Objectif : on souhaite que le bénéfice moyen quotidien soit d'au moins 100 € avec une probabilité d'au moins 95%

i. est ce le cas avec les paramètres n et p actuels ? *(justifier)* ...

ii. quelle probabilité p d'achat minimal à 1% près faudrait-il par client pour atteindre l'objectif si on garde le 200 clients par jours ? *(justifier)* ...

2. On souhaite faire une approximation de la loi binomiale $B(200; 0,5)$ de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$ par une loi normale $N(\mu; \sigma)$

(a) Quelles valeurs de μ et σ à 0,01 près faut-il alors choisir ? et cela est-il raisonnable de la faire ? *(justifier)*

(b) On considère maintenant une variable aléatoire Y de loi normale $N(\mu = 30; \sigma = 5,05)$

i. Retrouver une valeur approchée de $p(X \geq 30)$ en calculant $p(Y \geq b)$ où vous préciserez la valeur de b acceptable .

ii. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

iii. Retrouver une valeur approchée de $p(X \leq 30)$ en calculant $p(Y \leq a)$ où vous préciserez la valeur de a acceptable .

iv. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

v. Retrouver une valeur approchée de $p(20 \leq X \leq 40)$ en calculant $p(a \leq Y \leq b)$ où vous préciserez les valeurs de a et b acceptables.

vi. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

vii. Quel résultat du cours permet de déterminer une valeur a entière telle que $p(30 - a \leq Y \leq 30 + a) \simeq 99\%$? Quelle est cette valeur de a ?

viii. Donner alors la valeur de $p(30 - a \leq Y \leq 30 + a)$ à 0,1% près

ix. Donner alors la valeur de $p(30 - a \leq X \leq 30 + a)$ à 0,1% près

x. De quelle question de la partie 1. le résultat précédent peut-il être rapproché ?

8.3 TP : Loi normale et loi binomiale version 2

Voici quelques données concernant les ventes quotidiennes d'un certain produit pour un point de vente.
_ bénéfice unitaire *(par vente)* : 10 euros
_ nombre moyen de clients par jour : 200 clients
_ probabilité d'achat d'un produit par le client : 15%
_ coût total quotidien concernant le rayon ou le produit est en vente : 250 euros

1. on assimile l'arrivée d'un client dans le rayon de vente à une expérience aléatoire, le client achète ou bien n'achète pas un produit, et, on considère que le fait qu'un client achète le produit n'a aucun effet sur les autres clients *(achats indépendants)*.
   on note X le nombre de produits vendus à la fin de la journée.

   Vous utiliserez, si besoin, les logiciels *(géogébra, tableur, ...)* ou calculatrice personnelle pour répondre aux questions suivantes

   (a) quelles sont les valeurs possibles pour X ? : ...

   (b) X est une variable aléatoire ! quelle est sa loi de probabilité ? quels sont ses paramètres ? *(justifier)*

   (c) expliquez votre démarche *(logiciels utilisés)* pour répondre aux questions suivantes
   Démarche : ...

   i. quel est le nombre de ventes quotidiennes le plus probable ? ...

   et quelle est sa probabilité à 1% ? ...

   ii. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait au moins 30 ventes ? ...

   iii. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait au plus 30 ventes ? ...

   iv. quelle est la probabilité à 1% qu'il y ait entre 20 et 40 ventes ? ...

   v. trouver l'intervalle $[a; b]$ le moins large possible pour que la probabilité qu'il y ait entre a ventes et b ventes dépasse 99% ...

   (d) on s'intéresse maintenant au bénéfice quotidien
   i. quel est le nombre moyen de ventes quotidiennes ? :...
   ii. montrer ci dessous que le bénéfice moyen quotidien est de 50 €
   ...

   iii. Montrer que le bénéfice quotidien est donné par $B = 10X - 250$
   A. en déduire la probabilité à 1% près que ce bénéfice soit positif strict ...

B. déterminez la probabilité à 1% près pour que ce bénéfice soit d'au moins 150 euros ...

C. quel est le bénéfice le plus probable et quelle est sa probabilité à 1% près ...

(e) Objectif : on souhaite que le bénéfice moyen quotidien soit d'au moins 100 € avec une probabilité d'au moins 95%

i. est ce le cas avec les paramètres n et p actuels ? *(justifier)* ...

ii. quelle probabilité p d'achat minimal à 1% près faudrait-il par client pour atteindre l'objectif si on garde le 200 clients par jours ? *(justifier)* ...

2. On souhaite faire une approximation de la loi binomiale $B(200; 0,5)$ de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$ par une loi normale $N(\mu; \sigma)$ de même moyenne et de même écart type

(a) Quelles valeurs de μ et σ à 0,01 près faut-il alors choisir ? *(justifier)*

(b) On considère maintenant une variable aléatoire Y de loi normale $N(\mu = 30; \sigma = 5,05)$

i. Retrouver une valeur approchée de $p(X \geq 30)$ en calculant $p(Y \geq 29,5)$.

ii. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

iii. Retrouver une valeur approchée de $p(X \leq 30)$ en calculant $p(Y \leq 30,5)$.

iv. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

v. Retrouver une valeur approchée de $p(20 \leq X \leq 40)$ en calculant $p(19,5 \leq Y \leq 40,5)$

vi. Quelle erreur absolue fait-on alors ci dessus à 0,1% près ?

vii. Quel résultat du cours permet de déterminer une valeur a entière telle que $p(30 - a \leq Y \leq 30 + a) \simeq 99\%$? Quelle est cette valeur de a ?

viii. Donner alors la valeur de $p(30 - a \leq Y \leq 30 + a)$ à 0,1% près

ix. Donner alors la valeur de $p(30 - a \leq X \leq 30 + a)$ à 0,1% près

x. De quelle question de la partie 1. le résultat précédent peut-il être rapproché ?