Suites Géométriques et Arithmético-Géométriques

Table des matières

1 suites géométriques

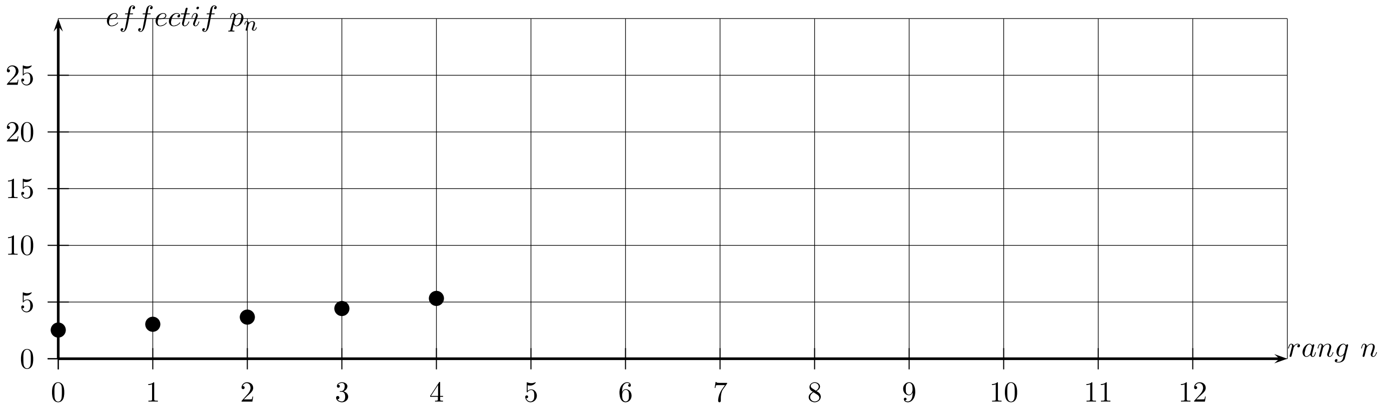
1.1 exploitation dans une situation donnée

1.1.1 activités

activité 1 :

Voici des données concernant l'évolution de la population mondiale de 1950 à 1990

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**année** a **:**	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
2	**rang** n **:**	0	1					
3	**effectif approché (milliards)** p_n **:**	$2,53$	$3,04$	$3,67$	$4,43$	$5,32$		
4	**différence :** $p_n - p_{n-1}$							
5	**quotient :** $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$							
6	u_n							



1. **On souhaite approximer l'évolution de la population mondiale de 1950 à 1990 par une suite numérique u dont on cherche la nature**
   (a) **dans une feuille de calcul (tableur), quelle formule faut-il entrer dans la cellule $C2$ puis tirer jusqu'à $H2$ pour obtenir les valeur attendues ?**
   (b) **de même pour la formule à entrer dans la cellule $C4$ à tirer jusqu'à $F4$**
   (c) **de même pour la formule à entrer dans la cellule $C5$ à tirer jusqu'à $F5$**
   (d) **compléter le tableau pour les plages $D2 : F2$ et $C4 : F5$ à $0,1$ près**
   (e) **quelle nature de suite considérer pour l'approximation souhaitée ?** ***(justifier)*** **préciser le premier terme et la raison de la suite u choisie (à 0,1 près)**

2. **calculs**
   (a) **compléter la ligne 6 du tableau à 10^{-2} près**
   (b) **donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de u_n en fonction de n**
   (c) **quelle formule faut-il entrer dans la cellule $B6$ puis tirer jusqu'à $H6$ pour obtenir les valeur attendues ?**

3. **comparaison**
   les effectifs en 2000 et 2010 sont respectivement 6.12 et 6.9
   quel est le pourcentage d'erreur commise par le "modèle Mathématique" pour les années 2000 et 2010 comparativement à la réalité ? préciser ce qui semble se passer.

4. **dépassement d'un seuil**
   (a) **à partir du "modèle Mathématique", déterminer le rang (puis l'année) à partir duquel la population dépasserait 10 milliards**
   (b) **idem pour 20 milliards**
   (c) **construire la courbe de u dans le repère ci dessus et illustrer les résultats précédents par des tracés**

5. **conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, interpréter le résultat et critiquer le modèle Mathématique.**

activité 2 :

Hypothèses

_ Tout organisme vivant contient du carbone, dont une certaine proportion de carbone 14 *(la même pour tout être vivant et égale à* $10^{-12} = 0,000000000001 = 0,0000000001\%$ *)*

_ A partir du moment où un organisme ne vit plus, le carbone 14 qu'il contient se décompose, la proportion de carbone 14 diminue alors d'environs $0,0121$ **% par an**

_ en raisonnant en proportions, on peut considérer que tout être vivant contient un "ratio" Q_0 **de carbone 14 égale à** $Q_0 = 100$ **et quand il cesse de vivre le ratio diminue de** $0,0121$ **% par an**

_ il est possible de déterminer le "ratio" de carbone 14 dans un objet quelconque *(les scientifiques le font)*, **si cet objet faisait partie d'un être vivant, il est alors possible de calculer la date à partir de laquelle l'être a cessé de vivre**

1. **Des archéologues trouvent un os qui contient un "ratio" de carbone 14 égal à** 50 **et désirent le dater**

   Soit Q_n **le ratio de carbone 14,** n **année après la fin de vie**

   (a) **montrer que** Q **est une suite géométrique et préciser le premier terme et la raison**

   (b) **donner l'expression de** Q_n **en fonction de** n

   (c) **déterminer le ratio de C14 après** 1000 **ans,** 5000 **ans et** 10000 **ans**

   (d) **dater l'os précédant à un siècle près**

   (e) **obtenir la courbe de** Q **pour de** 0 **à** 10000 **en abscisses et de** 0 **à** 100 **en ordonnées et illustrer le résultat précédent sur le graphique**

2. **dater un os qui a un ratio de C14 égal à** 30 **à** 10 **ans près**

3. **conjecturer la valeur de** $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n$, **interpréter le résultat.**

corrigé activité 2 :

1. **Soit Q_n le ratio de carbone 14, n année après la fin de vie**

   (a) $\boxed{Q_0 = 100}$
   On passe d'un terme à l'autre en diminuant la valeur de $0,0121\%$, donc en multipliant par $q = 1 - \dfrac{0,0121}{100} = 0,999879$ donc la suite est de nature géométrique de raison $\boxed{q = 0,999879}$

   (b) $\boxed{Q_n = 100 \times 0,999879^n}$ **en fonction de n**

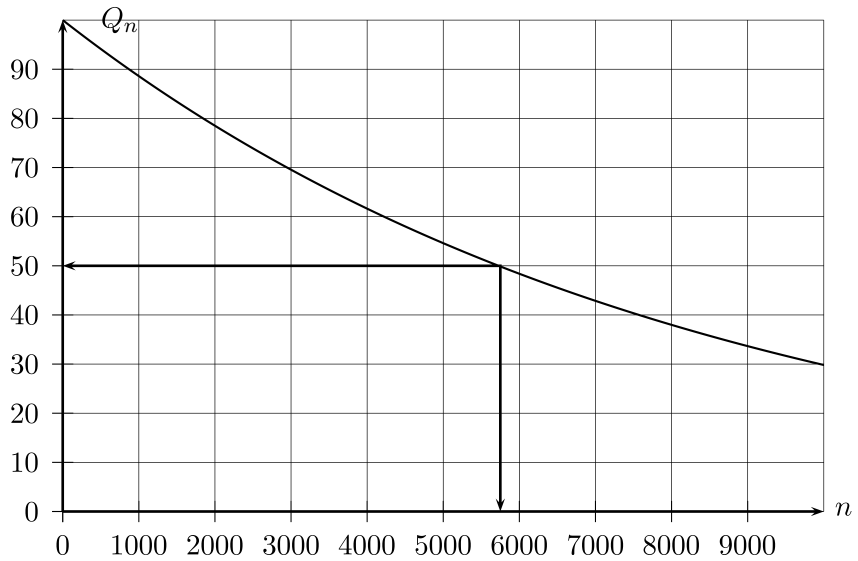
   (c) **ratio de C14 après :**
   1000 **ans :** $Q_{1000} = 100 \times 0,999879^{1000} \simeq \boxed{89}$
   5000 **ans :** $Q_{5000} = 100 \times 0,999879^{5000} \simeq \boxed{55}$
   10000 **ans :** $Q_{10000} = 100 \times 0,999879^{10000} \simeq \boxed{30}$

   (d) **pour dater l'os précédant à un siècle près, il suffit de résoudre l'équation :**
   $100 \times 0,999879^x = 50$
   On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice

n	5700	5800
$Q_n = 100 \times 0,999879^n$	$50,17$	$49,57$
comparaison à 50	> 50	< 50

   Datation de l'os : $\boxed{[5700; 5800]}$ **entre** 5700 **ans et** 5800 **ans soit** $\boxed{5750}$ **ans environs**

   (e) **obtenir la courbe de Q pour de 0 à 10000 en abscisses et de 0 à 100 en ordonnées et illustrer le résultat précédent sur le graphique**



2. **dater un os qui a un ratio de C14 égal à 30 à 10 ans près**

   On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice

n	9940	9950
$Q_n = 100 \times 0,999879^n$	$30,03$	$29,99$
comparaison à 30	> 30	< 30

   Datation de l'os : $\boxed{9945}$ **ans environs**

3. $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = 0}$,
   Plus n est grand et plus Q_n se rapproche de 0
   (le ratio de carbone 14 tend vers 0)

1.1.2 à retenir

définition 1 : *(suite géométrique)*

quelle que soit la suite u de nombres réels :

u **est une suite géométrique de raison** q **et de premier terme** u_0

$\iff$ **quel que soit** $n \in \mathbb{N}$ **:** $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q} \iff \forall n \in \mathbb{N}$ **:** $\boxed{\underbrace{u_{n+1} = q\ u_n}_{formule\ de\ récurrence}}$

remarque :

le quotient entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constant et reste égal à un nombre noté q **et appelé raison de la suite**

on dit aussi que pour passer d'un terme à un autre, on multiplie toujours par le même nombre appelé raison de la suite

exemples :

i. $4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64;\ ...$
est une suite géométrique de raison 2 **et de** 1^{er} **terme** 4 **car on passe d'un terme au suivant en multipliant par** 2

ii. $50;\ 25;\ 12,5;\ 6,25;...$
est une suite géométrique de raison $0,5$ **et de** 1^{er} **terme** 50 **car on passe d'un terme au suivant en multipliant par** $0,5$

propriété 1 : *(formule explicite en fonction de n)*

quelle que soit la suite notée u **ou** (u_n) **de nombres réels :**

si u **est géométrique de** **1^{er} terme** **noté** $\boxed{u_0}$ **et de raison notée** q
alors $u_n = 1^{er}\ terme \times raison^{(écart\ entre\ 0\ et\ n)}$
$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$
u_n **est le** $(n+1)^e$ **terme où le terme après** n **variations**

si u **est géométrique de** **1^{er} terme** **noté** $\boxed{u_1}$ **et de raison notée** q
alors $u_n = 1^{er}\ terme \times raison^{(écart\ entre\ 1\ et\ n)}$
$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$
u_n **est le** n^e **terme où le terme après** $n-1$ **variations**

remarques :

i. **l'écart entre deux nombre** a **et** b **avec** $a \leq b$ **est** $b-a$

ii. **si** u **est géométrique de** 1^{er} **terme noté** u_k **et de raison notée** q
alors $u_n = 1^{er}\ terme \times raison^{(écart\ entre\ k\ et\ n)}$ **avec** $(n \geq k)$ **soit** $u_n = u_k \times q^{n-k}$

exemples :

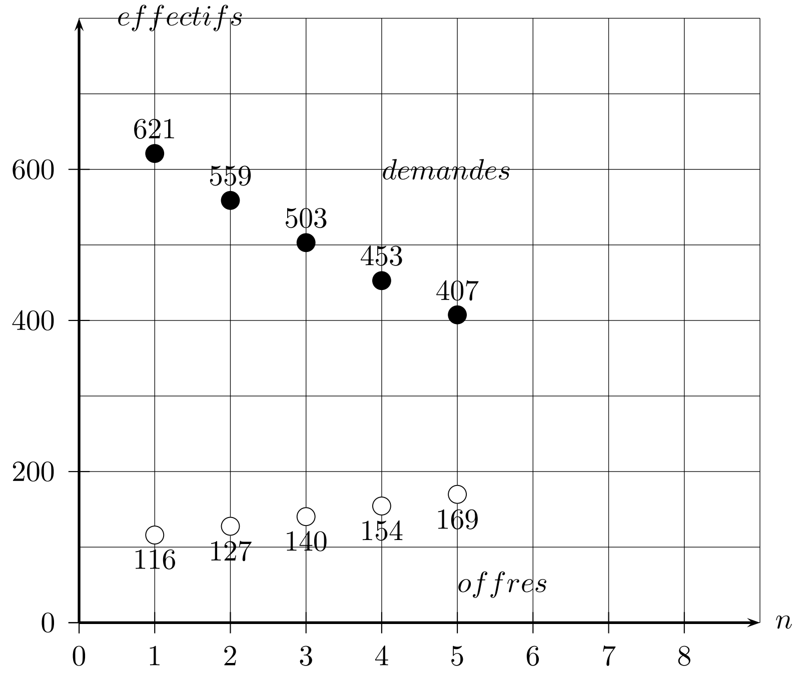
i. **soit une suite géométrique de** 1^{er} **terme** $u_1 = 10$ **et de raison** $1,5$
le n^e **terme en fonction de** n **est** $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 10 \times 1,5^{n-1}$
par exemple
$u_{100} = 10 \times 1,5^{99}$

ii. **soit une suite géométrique de** 1^{er} **terme** $u_0 = 10$ **et de raison** $1,5$
le $(n+1)^e$ **terme en fonction de** n **est** $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 1,5^n$
par exemple
$u_{100} = 10 \times 1,5^{100}$

1.1.3 exercices

exercice 1 :

voici un graphique « corrigé » d'évolution des demandes et des places disponibles pour une certaine filière de BEP dans un département. (la 1ère année est l'année 2001)



soient d_n et p_n deux suites approchant les nombres respectifs de demandes et de places l'année $2000 + n$ où n est un nombre entier

1. **justifier pourquoi les suites (d_n) et (p_n) semblent constituer des suites géométriques et donner pour chacune le 1^{er} terme et la raison à $0,1$ près**
2. **donner les valeurs de d_6 et p_6 puis d_7 et p_7**
3. **donner les "formules de récurrence" d_{n+1} en fonction de d_n ainsi que p_{n+1} en fonction de p_n**
4. **calculer d_{10} et p_{10}**
5. **donner les "formules explicites" de d_n et p_n en fonction de n**
6. **déterminer par calcul l'année à partir de laquelle la demande devrait atteindre 10**
7. **déterminer par calcul l'année à partir de laquelle l'offre devrait atteindre 300**
8. **résoudre l'inéquation : $d_n < p_n$ et en déduire l'année où la demande sera satisfaite *(vérifier graphiquement)***

exercice 2 :

en 2006, une personne place un capital $C_0 = 1000$ euros à $t = 3\%$ d'intérêts composés annuels cette personne ne touche plus à son compte par la suite
(« intérêts composés » signifie que : chaque année, les intérêts sont de $t\%$ du capital précédent)
soit C_n le montant du compte l'année $2006 + n$

1. **calculer C_1, C_2, C_3 et C_{10}**
2. **exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et préciser la nature le 1er terme et la raison de la suite (C_n)**
3. **exprimer C_n en fonction de n**
4. **déterminer l'année à partir de laquelle le capital aura doublé**
5. **calculer le capital à placer pour avoir 2000 euros après 10 ans avec $t = 3\%$**
6. **calculer le taux t pour avoir 2000 euros en 10 ans avec un capital initial de 1000 euros.**

exercice 3 :

un bateau remorqueur est en train de ramener un iceberg de 1000 tonnes du pôle sud et cet iceberg fond en perdant 2% de sa masse par heure en moyenne
on note u_n la masse de l'iceberg dans n heures (n est un nombre entier)

1. **préciser la nature de la suite numérique (u_n), son premier terme u_0 et sa raison**
2. **déterminer la masse de l'iceberg après $10h$ puis 3 jours puis une semaine. $(u_{...} = ...)$**
3. **exprimer la masse de l'iceberg dans n heures en fonction de n $(u_n = ...)$**
4. **dans combien de temps la masse de l'iceberg passera t-elle sous les 600 tonnes ?**
   (conclusion en jours et heures à 1 heure prés)

exercice 4 :

à un péage autoroutier, un caissier a déjà enregistré le passage de 300 véhicules et a remarqué que le nombre total de véhicules enregistrés augmentait de 5% par heure en moyenne
on note v_n le nombre moyen de véhicules enregistrés par le caissier dans n heures

1. **préciser la nature de la suite numérique (v_n), son premier terme v_0 et sa raison**
2. **déterminer le nombre de véhicules enregistrés par le caissier dans 5 heures. $(v_{...} = ...)$**
3. **exprimer le nombre de véhicules enregistrés dans n heures en fonction de n $(v_n = ...)$**
4. **dans combien de temps le nombre de véhicules enregistrés dépassera t-il 2000 ? (conclusion en heures et minutes à 1 minute près)**

exercice 5 :

la population d'une ville a cette année un effectif de 10000 habitants, et il est prévu un accroissement annuel relatif de la population de 4% par an

1. **déterminer l'effectif de la population de la ville dans 1 an, dans 10 ans.**
2. **exprimer l'effectif de la population dans n années, noté P_n**
3. **déterminer le nombre d'années pour que la population dépasse 30000 habitants.**
4. **que devrait être l'accroissement annuel de la population pour que l'effectif de 30000 soit atteint dans 16 années.**
5. **une autre ville (Ville B) avec un accroissement relatif annuel de 10% atteindra les 30000 habitants dans 10 années, quel est alors l'effectif de la ville B aujourd'hui ?**

exercice 6 :

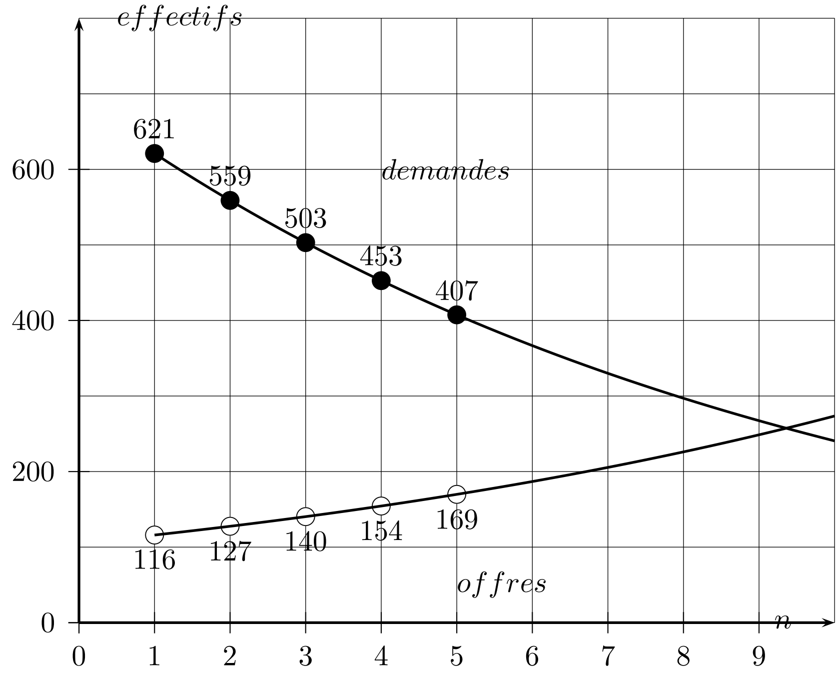
Monsieur X vient d'obtenir un prêt en s'engageant à en rembourser 70 euros ce mois puis 5% de plus le mois prochain, puis 80 euros le mois suivant et ainsi de suite.
on note u_n la somme mensualité remboursée dans n mois (n entier)

1. **Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que son premier terme u_0 et sa raison**
2. **déterminer la mensualité remboursée dans 2 ans. $(u_{...} = ...)$**
3. **exprimer la mensualité remboursée dans n mois en fonction de $n(u_n = ...)$**
4. **déterminer le nombre de mois à attendre pour que la mensualité dépasse les 120 euros**
5. **déterminer la somme totale remboursée en un an.**

1.1.4 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

voici un graphique « corrigé » d'évolution des demandes et des places disponibles pour une certaine filière de BEP dans un département. (la 1ère année est l'année 2001)



soient d_n et p_n deux suites approchant les nombres respectifs de demandes et de places l'année $2000 + n$ où n est un nombre entier

1. **La suite des offres est de nature** $\boxed{\text{géométrique}}$ **car, pour passer d'un terme à l'autre on multiplie toujours par le même nombre** $q = \dfrac{127}{116} \simeq 1,09$
   son premier terme est $\boxed{p_1 = 116}$ **et sa raison est** $\boxed{q = 1,09}$

   La suite des demandes est de nature $\boxed{\text{géométrique}}$ **car, pour passer d'un terme à l'autre on multiplie toujours par le même nombre** $q = \dfrac{559}{621} \simeq 0,9$
   son premier terme est $\boxed{d_1 = 621}$ **et sa raison est** $\boxed{q = 0,9}$

2. $d_6 = d_1 \times 0,9^{6-1} = 621 \times 0,9^5 \simeq \boxed{367}$
   ou bien $d_6 = 407 \times 0,9 \simeq \boxed{366}$ **(écart résultant de l'approximation faite pour** $q = 0,9$

   $p_6 = p_1 \times 0,9^{6-1} = 116 \times 1,09^5 \simeq \boxed{178}$
   ou bien $d_6 = 169 \times 1,09 \simeq 184$ **(écart résultant de l'approximation faite pour** $q = 1,09$

   $d_7 = 621 \times 0,9^6 \simeq \boxed{330}$
   $p_7 = 116 \times 1,09^6 \simeq \boxed{194}$

3. $\boxed{d_{n+1} = d_n \times q = d_n \times 0,9}$ **en fonction de** d_n
   $\boxed{p_{n+1} = p_n \times q = p_n \times 1,09}$ **en fonction de** p_n

4. $d_{10} = d_1 \times 0,9^{10-1} = 621 \times 0,9^9 \simeq \boxed{240}$
   $p_{10} = p_1 \times 1,09^{10-1} = 116 \times 1,09^9 \simeq \boxed{252}$

5. $\boxed{d_n = 621 \times 0,9^{n-1}}$ **en fonction de** n
   $\boxed{p_n = 116 \times 1,09^{n-1}}$ **en fonction de** n

6. **déterminer par calcul l'année à partir de laquelle la demande devrait atteindre** 10

$621 \times 0,9^{n-1} = 10 \Longleftrightarrow 0,9^{n-1} = \dfrac{10}{621}$

équation que l'on ne sait pas résoudre algébriquement sans utiliser la fonction logarithme népérien comme suit :

$0,9^{n-1} = \dfrac{10}{621}$

$\Longleftrightarrow ln(0,9^{n-1}) = ln(\dfrac{10}{621})$

$\Longleftrightarrow (n-1) \times ln(0,9) = ln(\dfrac{10}{116})$

$\Longleftrightarrow n = \dfrac{ln(\dfrac{10}{621})}{ln(0,9)} + 1 \simeq 40,2$

$\Longleftrightarrow n \geq 40,2$ **soit durant l'année** $2000 + 40 = \boxed{2040}$

on peut retrouver ce résultat en utilisant un tableau de valeurs

n	40	41
$d_n = 621 \times 0,9^{n-1}$	$10,2$	$9,2$
comparaison à 10	> 10	< 10

7. **déterminer par calcul l'année à partir de laquelle l'offre devrait atteindre** 300

on utilise un tableau de valeurs

n	12	13
$p_n = 116 \times 1,09^{n-1}$	$\simeq 299$	$\simeq 326$
comparaison à 300	< 300	> 300

soit durant l'année 2013

8. **résoudre l'inéquation :** $d_n < p_n$ **et en déduire l'année où la demande sera satisfaite**

on utilise un tableau de valeurs

n	9	10
$p_n = 116 \times 1,09^{n-1}$	231	251
$d_n = 621 \times 0,9^{n-1}$	267	240
p_n **comparé à** d_n	$p_n < d_n$	$p_n > d_n$

soit $2000 + 10 = \boxed{2010}$

(ce qui est cohérent avec le graphique)

corrigé exercice 2 :

en 2006, une personne place un capital $C_0 = 1000$ euros à $t = 3\%$ d'intérêts composés annuels cette personne ne touche plus à son compte par la suite
(« intérêts composés » signifie que : chaque année, les intérêts sont de $t\%$ du capital précédent)
soit C_n le montant du compte l'année $2006 + n$

1. $C_1 = 1000 \times 1,03 = \boxed{1030}$
   $C_2 = 1000 \times 1,03^2 = \boxed{1060,9}$
   $C_3 = 1000 \times 1,03^3 \simeq \boxed{1092,73}$
   $C_{10} = 1000 \times 1,03^{10} \simeq \boxed{1343,92}$

2. $\boxed{C_{n+1} = C_n \times 1,03}$ **en fonction de** C_n
   la nature de la suite est $\boxed{\textbf{géométrique}}$
   le 1er terme est $\boxed{1000}$
   la raison de la suite est $\boxed{q = 1,03}$
   $\boxed{C_n = 1000 \times 1,03^n}$ **en fonction de** n

3. **déterminer l'année à partir de laquelle le capital aura doublé**
   $C_n = 1000 \times 1,03^n = 2000$

   on utilise un tableau de valeurs

n	23	24
$C_n = 1000 \times 1,03^n$	$\simeq 1973$	$\simeq 2032$
comparaison à 2000	< 2000	> 2000

   soit durant l'année : $2006 + 23 = 2039$

4. **calculer le capital à placer pour avoir** 2000 **euros après** 10 **ans avec** $t = 3\%$

   $x \times 1,03^{10} = 2000$

   $\Longleftrightarrow x = \dfrac{2000}{1,03^{10}} \simeq \boxed{1488,19}$

5. **calculer le taux** t **pour avoir** 2000 **euros en** 10 **ans avec un capital initial de** 1000 **euros**

   $1000 \times (1 + t)^{10} = 2000$

   $\Longleftrightarrow (1 + t)^{10} = \dfrac{2000}{1000}$

   $\Longleftrightarrow (1 + t)^{10} = 2$

   $\Longleftrightarrow 1 + t = 2^{1/10}$

   $\Longleftrightarrow t = 2^{1/10} - 1 \simeq$ **soit** $\boxed{7,18\%}$

corrigé exercice 3 :

un bateau remorqueur est en train de ramener un iceberg de 1000 tonnes du pôle sud et cet iceberg fond en perdant 2% de sa masse par heure en moyenne
on note u_n la masse de l'iceberg dans n heures (n est un nombre entier)

1. $\left\{\begin{array}{l} \text{la suite est de } \boxed{\textbf{nature géométrique}} \\ \text{son premier terme est } \boxed{u_0 = 1000} \\ \text{la raison est } \boxed{q = 1 - \dfrac{2}{100} = 0,98} \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} \text{masse de l'iceberg après } 10h \text{ : } u_{10} = 1000 \times 0,98^{10} = 980 \boxed{993,5 \textbf{ tonnes}} \\ \\ \text{masse dans } 3 \text{ jours } = 3 \times 24 = 72h \text{ : } u_{72} = 1000 \times 0,98^{72} \simeq \boxed{333,49 \textbf{ tonnes}} \\ \\ \text{masse dans une semaine } = 7 \times 24 = 168h \text{ : } u_{168} = 1000 \times 0,98^{168} \simeq \boxed{33,57 \textbf{ tonnes}} \end{array}\right.$

3. **masse de l'iceberg dans n heures en fonction de n** $\boxed{u_n = 1000 \times 0,98^n}$

4. **dans combien de temps la masse de l'iceberg passera t-elle sous les 600 tonnes ?**

   on utilise un tableau de valeurs

n	25	26
$u_n = 1000 \times 0,98^n$	$\simeq 603$	$\simeq 591$
comparaison à 600	> 600	< 600

   soit entre $25h$ $et 26h$

corrigé exercice 4 :

à un péage autoroutier, un caissier a déjà enregistré le passage de 300 véhicules et a remarqué que le nombre total de véhicules enregistrés augmentait de 5% par heure en moyenne on note v_n le nombre moyen de véhicules enregistrés par le caissier dans n heures

1. $\begin{cases} \text{la suite est de } \boxed{\text{nature géométrique}} \\ \text{son premier terme est } \boxed{v_0 = 300} \\ \text{la raison est } \boxed{q = 1 + \dfrac{5}{100} = 1,05} \end{cases}$

2. **nombre de véhicules enregistrés par le caissier dans 3 heures :**
   $\boxed{v_{180} = 300 \times 1,06^3 = 347 \text{ véhicules}}$

3. **nombre de véhicules enregistrés dans n heures en fonction de n :** $\boxed{v_n = 300 \times 1,05^n}$

4. **dans combien de temps le nombre de véhicules enregistrés dépassera t-il 2000 ?**

   on utilise un tableau de valeurs

n	38	39
$v_n = 300 \times 1,05^n$	$\simeq 1915$	$\simeq 2011$
comparaison à 2000	< 2000	> 2000

   soit entre $38h$ $et 39h$

corrigé exercice 5 :

la population d'une ville a cette année un effectif de 10000 habitants, et il est prévu un accroissement annuel relatif de la population de 4% par an

1. $\begin{cases} \textbf{effectif de la population de la ville dans } 1 \textbf{ an} = 10000 \times 1,04 = \boxed{10400 \textbf{ habitants}} \\ \textbf{dans } 10 \textbf{ ans : } 10000 \times 1,04^{10} \simeq \boxed{14802} \end{cases}$

2. **effectif de la population dans n années, noté** $\boxed{P_n = 10000 \times 1,04^n}$

3. **déterminer le nombre d'années pour que la population dépasse 30000 habitants.**

   on utilise un tableau de valeurs

n	28	29
$P_n = 10000 \times 1,04^n$	$\simeq 29987$	$\simeq 31186$
comparaison à 30000	< 30000	> 30000

   soit entre $28\ et 39$ **ans**

4. **il suffit de résoudre l'équation suivante :** $10000 \times (1+t)^{16} = 30000$

   $\iff (1+t)^{16} = \dfrac{30000}{10000} = 3$

   $\iff t = 3^{1/16} - 1 \simeq \boxed{7,1\%}$

5. **il suffit de résoudre l'équation suivante :** $x \times 1,1^{10} = 30000$

   $\iff x = \dfrac{30000}{1,1^{10}} \simeq 11566,29$

   soit $\boxed{11566 \textbf{ habitants}}$

corrigé exercice 6 :

on note u_n la somme remboursée dans n mois (n entier)

1. $\begin{cases} \textbf{la suite est de } \boxed{\textbf{nature géométrique}} \\ \textbf{son premier terme est } \boxed{u_0 = 70} \\ \textbf{la raison est } \boxed{q = 1 + \dfrac{5}{100} = 1,05} \end{cases}$

2. **mensualité remboursée dans** 2 **ans** $= 2 \times 12 = 24$ **mois**
   $u_{24} = 70 \times 1,05^{24} \simeq \boxed{225,76 \text{ €}}$

3. **mensualité remboursée dans** n **mois en fonction de** n $\boxed{u_n = 70 \times 1,05^n}$

4. **déterminer le nombre de mois à attendre pour que la mensualité dépasse les** 120 **euros**

   on utilise un tableau de valeurs

n	11	12
$P_n = 70 \times 1,05^n$	$\simeq 119,7$	$\simeq 125,7$
comparaison à 120	< 120	> 120

   soit entre 11 *et* 12 **mois**

5. **somme totale remboursée en un an**
   il faut calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{11} = 70 \times \dfrac{1 - 1,05^12}{1 - 1,05} \simeq 1114,2$ **€**

1.2 somme des termes

1.2.1 activité : somme des premiers termes

1. **soit u, une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison q**
   on cherche la valeur de la somme des n premiers termes : $S = u_0 + u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + ... + u_0q^{n-1}$
   observez la succession de déductions suivantes :
   $S = u_0 + u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + ... + u_0q^{n-1}$

   $qS = u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + u_0q^4 + ... + u_0q^n$ ***($1^{ère}$ ligne $\times q$)***

   $S - qS = u_0 - u_0q^n$ ***(2^e ligne moins $1^{ère}$ ligne)***

   $S(1-q) = u_0(1-q^n)$ ***(on factorise)***

   $S = u_0\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ***(on isole S)***

   $$\boxed{S = 1^{er}terme \times \frac{1-raison^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}}$$

2. **utiliser le résultat obtenu ci dessus pour calculer les sommes suivantes**
   (a) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

   $S = ...$

   (b) $S = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4$

   $S = ...$

1.2.2 corrigé activité : somme des premiers termes

1. **soit** u**, une suite géométrique de** 1^{er} **terme** u_0 **et de raison** q
on cherche la valeur de la somme des n **premiers termes :** $S = u_0 + u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + ... + u_0q^{n-1}$
observez la succession de déductions suivantes :
$S = u_0 + u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + ... + u_0q^{n-1}$

$qS = u_0q + u_0q^2 + u_0q^3 + u_0q^4 + ... + u_0q^n$ *($1^{ère}$ **ligne** $\times q$)*

$S - qS = u_0 - u_0q^n$ *(2^e **ligne moins** $1^{ère}$ **ligne**)*

$S(1-q) = u_0(1-q^n)$ ***(on factorise)***

$S = u_0\dfrac{1-q^n}{1-q}$ *(**on isole** S)*

$$\boxed{S = 1^{er}terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}}$$

2. **utiliser le résultat obtenu ci dessus pour calculer les sommes suivantes**

(a) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

$$S = 1^{er}terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = \boxed{1023}$$

(b) $S = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4$

$$S = 1^{er}terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 1024 \times \frac{1-0,5^9}{1-0,5} = \boxed{2044}$$

1.2.3 à retenir

propriété 2 : *(formule de la somme)*

quelle que soit la suite notée u ou (u_n) de nombres réels :

si u **est géométrique de** 1^{er} **terme noté** $\boxed{u_0}$

alors $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \boxed{u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}} = \boxed{premier \times \dfrac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q}}$

S **est la somme des** $n+1$ **premiers termes**

si u **est géométrique de** 1^{er} **terme noté** $\boxed{u_1}$

alors $S = u_1 + ... + u_n = \boxed{u_1 \times \dfrac{1-q^{n}}{1-q}} = \boxed{premier \times \dfrac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q}}$

S **est la somme des** n **premiers termes**

exemples :

i. soit une suite géométrique de 1^{er} **terme** $u_1 = 10$ **et de raison** $1,5$
$S = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = ?$

$$S = premier \times \frac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} = 10 \times \frac{1-1,5^{20}}{1-1,5} \simeq 66485$$

ii. soit une suite géométrique de 1^{er} **terme** $u_0 = 10$ **et de raison** $1,5$
$S = u_0 + u_2 + ... + u_{20} = ?$

$$S = premier \times \frac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{21}}{1-q} = 10 \times \frac{1-1,5^{21}}{1-1,5} \simeq 99737$$

1.2.4 exercices

exercice 7 :

calculer astucieusement la somme suivante en justifiant votre méthode

1. $S = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 + 1280 + 2560$
2. $S = 1600 + 800 + 400 + 200 + 100 + 50 + 25 + 12,5$

exercice 8 :

1. **une personne rembourse un prêt selon les modalités suivantes :**
   50 **euros la première mensualité**
   les mensualités augmentent de 4% **chaque mois**
   soit u_n **le montant de la** $n^{ième}$ **mensualité**

   (a) **calculer la somme des mensualités pour les** 12 **premiers mois**
   (b) **calculer la somme des mensualités pour les** 3 **premières années**

2. **une personne rembourse un prêt selon les modalités suivantes :**
   500 **euros la première mensualité**
   les mensualités baissent de 4% **chaque mois**
   soit u_n **le montant de la** $n^{ième}$ **mensualité**

   (a) **calculer la somme des mensualités pour les** 12 **premiers mois**
   (b) **calculer la somme des mensualités pour les** 3 **premières années**

exercice 9 :

Un sportif s'entraîne 10 **mn à la première séance puis** 10% **de plus à chaque séance.**
soit u_n **la durée d'entraînement de la** $n^{ième}$ **séance**

1. **donner les valeurs de** $u_0,\ u_1,\ u_2$ **et** u_{29}
2. **calculer la durée totale** $S_{29} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{29}$ **pour les** 30 **premières séances**

exercice 10 :

une personne décide de d'arrêter de fumer
Ce mois ci elle a dépensé 430 **euros en tabac, chaque mois, elle diminue sa dépense en tabac de** 5%
Soit v_n **la dépense en tabac le** $n^{ième}$ **jour avec** $v_1 = 430$

1. **donner les valeurs de** v_2 **et** v_3**.**
2. **calculer la somme totale dépensée pour les** 5 **prochaines années (** 60 **mois)**

1.2.5 corrigés exercices

corrigé exercice 7 :

calculer astucieusement la somme suivante en justifiant votre méthode

1. $S = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 + 1280 + 2560$

$$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 5 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \boxed{5115}$$

2. $S = 1600 + 800 + 400 + 200 + 100 + 50 + 25 + 12,5$

$$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 1600 \times \frac{1 - 0,5^{8}}{1 - 0,5} = \boxed{3187,5}$$

corrigé exercice 8 :

1. **une personne rembourse un prêt selon les modalités suivantes :**
   50 **euros la première mensualité**
   les mensualités augmentent de 4% **chaque mois**
   soit u_n **le montant de la** $n^{ième}$ **mensualité**

   (a) **calculer la somme des mensualités pour les** 12 **premiers mois**
   $$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 50 \times \frac{1 - 1,04^{12}}{1 - 1,04} \simeq \boxed{751,29}$$

   (b) **calculer la somme des mensualités pour les** 3 **premières années**
   $$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 50 \times \frac{1 - 1,04^{36}}{1 - 1,04} \simeq \boxed{3879,9}$$

2. **une personne rembourse un prêt selon les modalités suivantes :**
   500 **euros la première mensualité**
   les mensualités baissent de 4% **chaque mois**
   soit u_n **le montant de la** $n^{ième}$ **mensualité**

   (a) **calculer la somme des mensualités pour les** 12 **premiers mois**
   $$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 500 \times \frac{1 - 0,96^{12}}{1 - 0,96} \simeq \boxed{4841,1}$$

   (b) **calculer la somme des mensualités pour les** 3 **premières années**
   $$S = 1^{er} terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 50 \times \frac{1 - 0,96^{36}}{1 - 0,96} \simeq \boxed{9624,8}$$

corrigé exercice 9 :

Un sportif s'entraîne 10 mn à la première séance puis 10% de plus à chaque séance.
soit u_n la durée d'entraînement de la $n^{ième}$ séance

1. **donner les valeurs de $u_0,\ u_1,\ u_2$ et u_{29}**
   $u_0 = \boxed{10}$
   $u_1 = 10 \times 1,1 = \boxed{11}$
   $u_2 = 10 \times 1,1^2 = \boxed{12,1}$
   $u_{29} = 10 \times 1,1^{29} \simeq \boxed{158,63}$

2. **calculer la durée totale $S_{29} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{29}$ pour les 30 premières séances**
   $S = 1^{er} terme \times \dfrac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 10 \times \dfrac{1 - 1,1^{30}}{1 - 1,1} \simeq \boxed{1644,9}$

corrigé exercice 10 :

une personne décide de d'arrêter de fumer
Ce mois ci elle a dépensé 430 euros en tabac, chaque mois, elle diminue sa dépense en tabac de 5%
Soit v_n la dépense en tabac le $n^{ième}$ jour avec $v_1 = 430$

1. **donner les valeurs de v_2 et v_3**
   $v_1 = \boxed{430}$
   $v_2 = 430 \times 0,95^1 = \boxed{408,5}$
   $v_3 = 430 \times 0,95^2 \simeq \boxed{388,08}$

2. **calculer la somme totale dépensée pour les 5 prochaines années (60 mois)**
   $S = 1^{er} terme \times \dfrac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = 430 \times \dfrac{1 - 0,95^{60}}{1 - 0,95} \simeq \boxed{8203,8}$

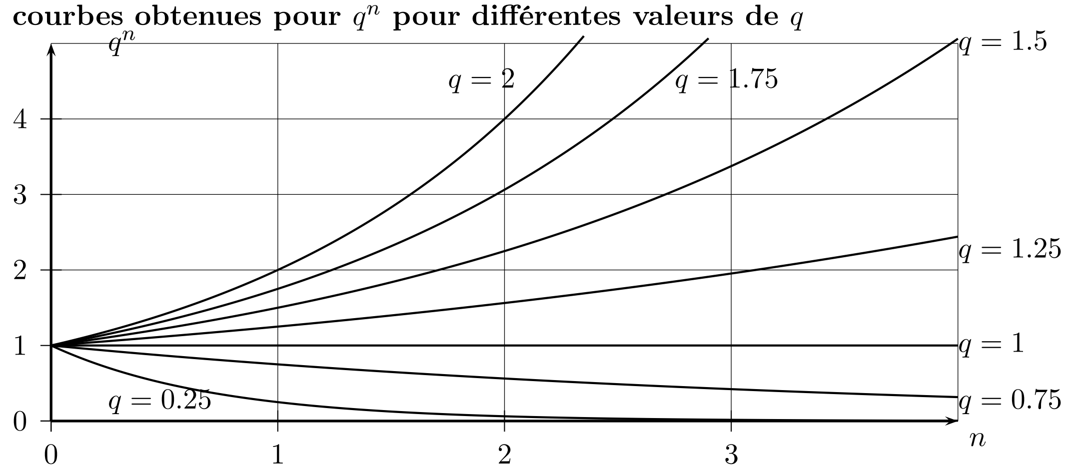
1.3 limite de q^n quand n tend vers l'infini

1.3.1 activités

activité 1 :

Objectif : Déterminer ce qui se passe pour les valeurs de q^n quand n est de plus en plus grand *(tend vers l'infini)* dans chacun des cas suivants : $0 < q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$

1. **voici des courbes obtenues pour q^n pour différentes valeurs de q**



   (a) **conjecturer le sens de variation de $n \longmapsto q^n$ en fonction de q *(distinguer trois cas)***

   (b) **conjecturer la "valeurs" de $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ dans chacun des cas précédents et interpréter**

2. **utiliser le tableau de valeur de la calculatrice pour résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{N}$**

   i. $1,5^n = 1000$ **ii.** $1.5^n = 0,1$ **iii.** $0,9^n = 0,1$ **iv.** $0.9^n = 1000$

1.3.2 à retenir

propriété 3 : *(sens de variation)*

quelle que soit la suite notée u ou (u_n) de nombres réels telle que : $u_n = q^n$

si $\boxed{0 < q < 1}$ **alors u est** $\boxed{\text{strictement décroissante}}$

si $\boxed{q = 1}$ **alors u est** $\boxed{\text{constante}}$

si $\boxed{q > 1}$ **alors u est** $\boxed{\text{strictement croissante}}$

exemples :

i. **soit la suite u définie par $u_n = 0,8^n$**
   $q = 0,8$ **donc** $0 < q < 1$ **donc u est strictement décroissante**

ii. **soit la suite u définie par $u_n = 1,8^n$**
   $q = 1,8$ **donc** $q > 1$ **donc u est strictement croissante**

propriété 4 : *(limite en $+\infty$)*

quelle que soit la suite notée u ou (u_n) de nombres réels telle que : $u_n = q^n$

si $\boxed{0 < q < 1}$ **alors** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0}$

si $\boxed{q = 1}$ **alors** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1}$

si $\boxed{q > 1}$ **alors** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$

exemples :

i. **soit la suite u définie par $u_n = 0,8^n$**
   $q = 0,8$ **donc** $0 < q < 1$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

ii. **soit la suite u définie par $u_n = 1,8^n$**
   $q = 1,8$ **donc** $q > 1$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

1.3.3 exercices

<u>exercice 11 :</u>

déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u dans chacun des cas :

1. **a.** $u_n = (\frac{7}{8})^n$ **b.** $u_n = (\frac{8}{7})^n$ **c.** $u_n = (\frac{\sqrt{5}}{3})^n$ **d.** $u_n = (\frac{5}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-2}{2})^n$
2. **a.** $u_n = 10 \times (\frac{2}{3})^n$ **b.** $u_n = 2 \times (\frac{4}{3})^n$ **c.** $u_n = 3 + (\frac{1}{2})^n$ **d.** $u_n = 8 - (\frac{5}{2})^n$
3. **a.** $u_n = 5 + 3 \times (\frac{3}{4})^n$ **b.** $u_n = 8 - 3 \times (\frac{7}{6})^n$ **c.** $u_n = 5 + 5 \times (\frac{1}{3})^n$ **d.** $u_n = 9 - 4 \times (\frac{7}{2})^n$

<u>exercice 12 :</u>

déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u dans chacun des cas :

1. **a.** $S_n = 3 \times \frac{1-0,25^n}{1-0,25}$ **b.** $S_n = 10 \times \frac{1-1,2^n}{1-1,2}$ **c.** $S_n = 500 \times \frac{1-0,75^n}{1-0,75}$
2. **a.** $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$ **b.** $S_n = 1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + ... + (\frac{2}{3})^n$
3. **a.** $S_n = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + ... + \frac{5}{2^n}$ **b.** $S_n = 4 + 4 \times \frac{2}{3} + 4 \times (\frac{2}{3})^2 + 4 \times (\frac{2}{3})^3 + ... + 4 \times (\frac{2}{3})^n$

1.3.4 corrigés exercices

corrigé exercice 11 :

déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u dans chacun des cas :

1. (a) $u_n = (\frac{7}{8})^n$

$q = \frac{7}{8} = 0,875$ **donc** $0 < q < 1$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{7}{8})^n = 0}$

(b) $u_n = (\frac{8}{7})^n$

$q = \frac{8}{7} \simeq 1,14$ **donc** $q > 1$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{8}{7})^n = +\infty}$

(c) $u_n = (\frac{\sqrt{5}}{3})^n$

$q = \frac{\sqrt{5}}{3} \simeq 0,75$ **donc** $0 < q < 1$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{\sqrt{5}}{3})^n = 0}$

(d) $u_n = (\frac{\sqrt{5}}{3})^n$

$q = 1$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{\sqrt{5}}{3})^n = 1}$

2. (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (10 \times (\frac{2}{3})^n) = 10 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2}{3})^n = 10 \times 0 = \boxed{0}$

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 \times (\frac{4}{3})^n) = 2 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{4}{3})^n = 2 \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 + (\frac{1}{2})^n) = 3 + \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 3 + 0 = \boxed{3}$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (8 - (\frac{5}{2})^n) = 8 - \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{5}{2})^n = 8 - (+\infty) = \boxed{-\infty}$

3. (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (5 + 3 \times (\frac{3}{4})^n) = 5 + 2 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{3}{4})^n = 5 + 3 \times 0 = \boxed{5}$

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (8 - 3 \times (\frac{7}{6})^n) = 8 - 3 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{7}{6})^n = 8 - 3 \times (+\infty) = 8 - \infty = \boxed{-\infty}$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (5 + 5 \times (\frac{1}{3})^n) = 5 + 5 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{3})^n) = 5 + 5 \times 0 = \boxed{5}$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (9 - 4 \times (\frac{7}{2})^n) = 9 - 4 \times \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{7}{2})^n) = 9 - 4 \times (+\infty) = 9 - \infty = \boxed{-\infty}$

corrigé exercice 12 :

déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u dans chacun des cas :

1. (a) $S_n = 3 \times \dfrac{1 - 0,25^n}{1 - 0,25}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 3 \times \frac{1-0}{1-0,25} = 3 \times \frac{1}{0,75} = \boxed{4}$$

(b) $S_n = 10 \times \dfrac{1 - 1,2^n}{1 - 1,2}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 10 \times \frac{1-(+\infty)}{1-1,2} = 10 \times \frac{-\infty}{-0,2} = \frac{10}{-0,2} \times (-\infty) = -20 \times (-\infty) = \boxed{+\infty}$$

(c) $S_n = 500 \times \dfrac{1 - 0,75^n}{1 - 0,75}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 500 \times \frac{1-0}{1-0,75} = 500 \times \frac{1}{0,25} = \boxed{2000}$$

2. a.

(a) $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1 \times \frac{1-0,5^n}{1-0,5}) = 1 \times \frac{1-0}{0,5} = \boxed{2}$$

(b) $S_n = 1 + \dfrac{2}{3} + (\dfrac{2}{3})^2 + (\dfrac{2}{3})^3 + ... + (\dfrac{2}{3})^n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1 \times \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}) = 1 \times \frac{1-0}{\frac{1}{3}} = \boxed{3}$$

(c) $S_n = 5 + \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{8} + ... + \dfrac{5}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (5 \times \frac{1-0,5^n}{1-0,5}) = 5 \times \frac{1-0}{0,5} = \boxed{10}$$

(d) $S_n = 4 + 4 \times \dfrac{2}{3} + 4 \times (\dfrac{2}{3})^2 + 4 \times (\dfrac{2}{3})^3 + ... + 4 \times (\dfrac{2}{3})^n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (4 \times \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}) = 4 \times \frac{1-0}{\frac{1}{3}} = \boxed{12}$$

2 suites arithmético-géométriques

2.1 activités

activité 1 :

une chaîne locale de télévision inscrit 500 abonnés la première année de diffusion ($u_0 = 500$), chaque année, elle garde 60% des abonnés de l'année précédente et gagne 400 nouveaux abonnés
on note u_n le nombre d'abonnés après n années et on pose $v_n = u_n - 1000$ pour $n \geq 0$

1. (a) **compléter le tableau**

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	u_n	500			
3	v_n				
4	$\dfrac{v_n}{v_{n-1}}$				

   (b) **donner les "formules tableur" à entrer dans les cellules $C2$,$B3$ et $C4$ puis à tirer vers la droite**
2. **les suites (u_n) ou (v_n) semblent t-elles particulières ?**
3. **exprimer u_{n+1} en fonction de u_n**
4. **démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,6$ et donner son premier terme**
5. **en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que l'on a $u_n = 1000 - 500 \times 0,6^n$**
6. **en déduire u_{10}**
7. **à partir de quelle valeur de n à t-on $u_n \geq 999$?**
8. **étudier la limite de la suite u**
9. **quelle valeur u_n ne peut pas dépasser ? *(justifier)***

activité 2 :

un loueur de DVD a, cette année, 1000 abonnés et chaque année il perd 20% de ces abonnés mais gagne 900 nouveaux abonnés
on pose $u_0 = 1000$ et u_n le nombre d'abonnés après n années

1. **calculer u_1, u_2 et u_3**
2. **exprimer u_{n+1} en fonction de u_n**
3. **on pose $v_n = u_n - 4500$**
   démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et donner son premier terme
4. **en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que l'on a $u_n = 4500 - 3500 \times 0,8^n$**
5. **en déduire u_{10}**
6. **à partir de quelle valeur de n à t-on $u_n \geq 4499$?**
7. **étudier la limite de la suite u**
8. **que devient le nombre d'abonnés à long terme ? *(justifier)***

2.2 corrigés activités

corrigé activité 2 :

un loueur de DVD a, cette année, 1000 abonnés et chaque année il perd 20% de ces abonnés mais gagne 900 nouveaux abonnés
on pose $u_0 = 1000$ et u_n le nombre d'abonnés après n années

1. $u_1 = 1000 \times (1 - \frac{20}{100}) + 900 = \boxed{1700}$

   $u_2 = 1700 \times (1 - \frac{20}{100}) + 900 = \boxed{2260}$

   $u_3 = 2260 \times (1 - \frac{20}{100}) + 900 = \boxed{2708}$

2. $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n + 900}$

3. **on pose** $v_n = u_n - 4500$
   démontrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et donnons son premier terme

   à partir de : $\begin{cases} (1)\ v_n = u_n - 4500 \quad \Longrightarrow (2)\ v_{n+1} = u_{n+1} - 4500 \\ \\ (3)\ u_{n+1} = 0,8u_n + 900 \end{cases}$

   Méthode 1 :

   Montrons que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8$

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4500}{u_n - 4500}$ **(1) et (2)**

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(0,8u_n + 900) - 4500}{u_n - 4500}$ **(3)**

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,8u_n - 3600}{u_n - 4500}$

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,8(u_n - \frac{3600}{0,8})}{u_n - 4500}$ **(0,8 en facteur)**

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,8(u_n - 4500)}{u_n - 4500}$

   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8$ **C.Q.F.D.**

   Méthode 2 :

   Montrons que $v_{n+1} = 0,8v_n$

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 4500$ **(2)**

   $v_{n+1} = (0,8u_n + 900) - 4500$ **(3)**

   $v_{n+1} = 0,8u_n - 3600$

   $v_{n+1} = 0,8(u_n - \frac{3600}{0,8})$ **(0,8 en facteur)**

   $v_{n+1} = 0,8(u_n - 4500)$

   $v_{n+1} = 0,8v_n$ **(1)**

   C.Q.F.D.

   donc $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ **de premier terme** $v_0 = u_0 - 4500 = 1000 - 4500 = \boxed{-3500}$

4. $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-3500 \times 0,8^n}$

   de plus $v_n = u_n - 4500$

   donc $-3500 \times 0,8^n = u_n - 4500$

   donc $\boxed{u_n = 4500 - 3500 \times 0,8^n}$

5. $u_{10} = 4500 - 3500 \times 0,8^{10} = \boxed{4124}$

6. **à partir de quelle valeur de n à t-on** $u_n \geq 4499$ **?**

   on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice :

n	36	37
$u_n = 4500 - 3500 \times 0,8^n$	4498.86	4499.09
comparaison à 4999	$u_n < 4999$	$u_n > 4999$

   $\boxed{u_n \geq 4499 \textbf{ pour } n \geq 37}$

7. **limite de la suite** u **:**

   $q = 0,8$ **donc** $0 < q < 1$

   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4500 - 3500 \times 0,8^n = 4500 - 3500 \times 0$

   donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4500}$

8. **le nombre d'abonnés** $\boxed{\textbf{se rapproche de 4500}}$ **à long terme**
   car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4500$

2.3 à retenir

<u>définition 2</u> : *(suite arithmético-géométrique)*

quelle que soit la suite u de nombres réels :
u est une suite arithmético-géométrique de premier terme c
$\Longleftrightarrow u_0 = c$ et il existe deux nombres réels a et b tels que : quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$\boxed{u_{n+1} = au_n + b}$ ***(formule de récurrence)***

<u>exemples</u> :

i. $u_0 = 100$ **et** $u_{n+1} = 0,5u_n + 10$

$$100 \xrightarrow{\times 0,5\ +10} 60 \xrightarrow{\times 0,5\ +10} 40 \xrightarrow{\times 0,5\ +10} 30$$

ii. $u_0 = 60$ **et** $u_{n+1} = 1,5u_n - 10$

$$\mathbf{60} \xrightarrow{\times 1,5\ \mathbf{-10}} \mathbf{80} \xrightarrow{\times 1,5\ \mathbf{-10}} \mathbf{110} \xrightarrow{\times 1,5\ \mathbf{-10}} \mathbf{155}$$

<u>remarques</u> :

(1) si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $u_{n+1} = au_n$ et la suite est géométrique de raison a
(2) si $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$ et la suite est arithmétique de raison b

2.4 exercices

<u>exercice 13 :</u>

En 2000, une entreprise compte 4000 employés.
Une étude montre que d'une année sur l'autre, 10% de l'effectif part à la retraite.
Pour tenter de compenser la perte, l'entreprise embauche 200 jeunes chaque année.
Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés l'année $2000+n$

1. **Calculer u_0 ,u_1 et u_2**
2. (a) **Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 200$**
   (b) **Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?**
3. (a) **On pose $v_n = u_n - 2000$ Déterminer v_0, v_1 et v_2**
   (b) **Montrer que (v_n) est géométrique.**
   (c) **En déduire v_n en fonction de n.**
   (d) **En déduire u_n en fonction de n.**
   (e) **En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1er janvier de l'année 2020**
   (f) **En déduire la limite de la suite (u_n). Comment l'interpréter ?**

<u>exercice 14 :</u> *(Antille Septembre 2011)*

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.
On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. **Montrer que $u_1 = 86$.**
2. **Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.**
3. **Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.**
   Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

   Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
   Dans ces question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
4. **Le nombre d'inscriptions à la natation pourra t-il atteindre 201 ?**
5. **Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?**

2.5 corrigés exercices

<u>corrigé exercice 13 :</u>

1. $\boxed{u_0 = 4000}$

$u_1 = 4000 \times (1 - \frac{10}{100}) + 200 = \boxed{3800}$

$u_2 = 3800 \times (1 - \frac{10}{100}) + 200 = \boxed{3620}$

2. **(a)** $u_{n+1} = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) + 200 = \boxed{9u_n + 200}$

(b) **Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique**

3. **(a)** **On pose** $v_n = u_n - 2000$

$v_0 = u_0 - 2000 = \boxed{2000}$

$v_1 = u_1 - 2000 = \boxed{1800}$

$v_2 = u_2 - 2000 = \boxed{1620}$

(b) **à partir de :** $\begin{cases} (1)\ v_n = u_n - 2000 \quad \Longrightarrow (2)\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2000 \\ \\ (3)\ u_{n+1} = 0,9u_n + 200 \end{cases}$

Montrons que $v_{n+1} = 0,9v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2000$ **(2)**

$v_{n+1} = (0,9u_n + 200) - 2000$ **(3)**

$v_{n+1} = 0,9u_n - 1800$

$v_{n+1} = 0,9(u_n - \frac{1800}{0,9})$ **(0,9 en facteur)**

$v_{n+1} = 0,9(u_n - 2000)$

$v_{n+1} = 0,9v_n$ **(1)**

C.Q.F.D.

donc (v_n)**est** $\boxed{\text{géométrique}}$ **de raison** $\boxed{q = 0,9}$ **et de premier terme** $v_0 = \boxed{2000}$

(c) **on a donc :**

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{2000 \times 0,9^n}$

(d) **de plus** $v_n = u_n - 2000$

donc $2000 \times 0,9^n = u_n - 2000$

donc $\boxed{u_n = 2000 + 2000 \times 0,9^n}$

(e) **le 1er janvier de l'année** 2020
$n = 20$ **et** $u_20 = 2000 + 2000 \times 0,9^{20} \simeq 2243$

l'effectif de l'entreprise sera donc de $\boxed{2243 \textbf{ employés}}$

(f) $q = 0,9$ **donc** $0 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2000 + 2000 \times 0,9^n = 2000 + 2000 \times 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2000}$

le nombre d'employés $\boxed{\textbf{se rapproche de 2000}}$ **à long terme**

corrigé exercice 14 : *(Antille Septembre 2011)*

1. $u_1 = 80 \times (1 - \frac{5}{100}) + 10 = \boxed{86}$

2. $\boxed{u_{n+1} = 0,95u_n + 10}$

3. **à partir de :** $\begin{cases} (1)\ a_n = u_n - 200 & \Longrightarrow (2)\ a_{n+1} = u_{n+1} - 200 \\ (3)\ u_{n+1} = 0,95u_n + 10 \end{cases}$

   Montrons que $a_{n+1} = 0,95a_n$

   $a_{n+1} = u_{n+1} - 200 \quad$ **(2)**

   $a_{n+1} = (0,95u_n + 10) - 200 \quad$ **(3)**

   $a_{n+1} = 0,95u_n - 190$

   $a_{n+1} = 0,95(u_n - \frac{190}{0,95}) \quad$ **(0,95 en facteur)**

   $a_{n+1} = 0,95(u_n - 200)$

   $a_{n+1} = 0,95a_n \quad$ **(1)**

   C.Q.F.D.

   donc (a_n)**est** $\boxed{\textbf{géométrique}}$ **de raison** $\boxed{q = 0,95}$ **et de premier terme** $a_0 = u_0 - 200 = 80 - 200 = \boxed{-120}$

   on a donc :

   $a_n = a_0 \times q^n = \boxed{-120 \times 0,95^n}$

   de plus $a_n = u_n - 200$

   donc $-120 \times 0,95^n = u_n - 200$

   donc $\boxed{u_n = 200 - 120 \times 0,95^n}$

4. **Le nombre d'inscriptions à la natation pourra t-il atteindre** 201 **?**

   Méthode 1 :

   pour le savoir essayons de résoudre l'équation l'équation :

   $u_n \geq 201$

   $\Longleftrightarrow 200 - 120 \times 0,95^n = 201$

   $\Longleftrightarrow -120 \times 0,95^n = 1$

   $\Longleftrightarrow 0,95^n = \frac{1}{-120}$

$\Longleftrightarrow 0,95^n = -\dfrac{1}{120}$

$$\text{or } \begin{cases} -\dfrac{1}{120} \simeq -0.0083 \textbf{ est strictement négatif} \\ \\ \textbf{et} \\ \\ 0,95^n \textbf{ est strictement positif pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

donc cette équation n'admet aucune solution
et le nombre d'inscriptions à la natation ne pourra jamais atteindre 201

Méthode 2 :

$q = 0,95$ **donc** $0 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 200 - 120 \times 0,95^n = 200 - 120 \times 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200}$

le nombre d'inscription $\boxed{\textbf{se rapproche de 200}}$ **à long terme, tout en étant croissant (admis) et en partant de** 80
donc, le nombre d'inscriptions à la natation ne pourra jamais atteindre 201

5. **Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?**

on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice :

n	17	18
$u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$	$\simeq 149,82$	$\simeq 152,33$
comparaison à 150	$u_n < 150$	$u_n > 150$

$\boxed{u_n \geq 150 \textbf{ pour } n \geq 18}$ **soit** 18 **semaines**

3 travaux pratiques tableur

3.1 tp 1

Nom :

TP : **Suites Arithmétiques / Suites Géométriques / Suites Arithmético-Géométriques**

Situation :

On souhaite comparer des tarifs de location de 3 locaux de stockage.

- Tarif 1 : 5 000 € le premier mois puis augmentation de 5% par mois
- Tarif 2 : 4500 € le premier mois puis augmentation de 450 € par mois
- Tarif 3 : 4750 € le premier mois puis augmentation de 7% par mois avec une remise de 100 €

soit u_n (resp : v_n, w_n) le montant du loyer de tarif 1 (resp : tarif 2 , tarif 3) après n mois de location

1. ouvrir une feuille de calcul automatique *(Excell)*, la sauvegarder sous le nom "tp_suites_numeriques", dans le dossier "Mes document" dans un sous-dossier "Maths" que vous aurez crée au préalable
2. recopier dans cette feuille de calcul le contenu des cellules comme indiqué ci dessous

	A	B	C	D
1		premier loyer	taux d'évolution (%)	
2	tarif 1	5000	5	
3				
4		premier loyer	évolution (euros)	
5	tarif 2	4500	450	
6				
7		premier loyer	taux d'évolution (%)	évolution (euros)
8	tarif 3	4750	7	-100
9				
10	n	un	vn	wn
11	0			
12				

on souhaite obtenir dans la colonne B (resp : C, D) le tableau de valeurs de la suite u (resp : v, w) pour n allant de 0 à 24

(a) i. compléter par les nombres attendus : $u_0 = ...$ $v_0 = ...$ $w_0 = ...$

ii. la formule à entrer en $B11$ est donc : $= B2$

la formule à entrer en $C11$ est donc : ...

la formule à entrer en $D11$ est donc : ...

(b) i. entrer dans la cellule $A12$ la formule suivante : $= A11 + 1$

ii. donner les formules de récurrence pour v et w :

$u_{n+1} = (1 + 5/100) \times u_n$ $v_{n+1} = ...$ $w_{n+1} = ...$

iii. la formule à entrer en $B12$ est donc : $= (1 + C\$2/100) * B11$
à quoi sert le dollar \$ devant le 2 dans la formule précédente ? : ...

la formule à entrer en $C12$ est donc : ...

la formule à entrer en $D12$ est donc : ...

(c) sélectionner la plage de cellules $A12 : D12$ et étirer les formules vers le bas jusqu'à la ligne 34 afin d'obtenir les tableaux de valeurs attendus

(d) donner alors la valeur approchée entière de : $u_{23} \simeq ...$
Interpréter cette valeur dans le contexte : ...

(e) obtenir dans un même repère les courbes de ces trois suites pour n allant de 0 à 23
(sélectionner la plage de cellules $A11 : D34$ → insertion → graphique → Nuages de points → Nuage de points reliés par une courbe → terminer)
obtenir les quadrillages verticaux secondaires de l'axe des ordonnées *(clic droit sur la zone de graphique → options du graphique → Quadrillage → Axe des ordonnées (X) → Quadrillage secondaire → OK)*

3. déduire du graphique et du tableau de valeur le tarif le moins cher en fonction du nombre de mois n
   – pour n compris entre .... et .... le loyer le moins cher est pour le tarif ...
   ...

4. le plus important pour une durée de location est la somme des loyers versés, nous cherchons maintenant à obtenir les sommes des termes des trois suites précédentes

(a) recopier dans la feuille de calcul le contenu des cellules comme indiqué ci dessous

	F	G	H
10	somme de u0 à un	somme de v0 à vn	somme de w0 à wn
11			
12			

(b) entrer dans la cellule $F11$ la formule suivante : =SOMME(B$11 :B11)
et tirer cette formule jusqu'à la ligne 34

(c) de même on entre dans la cellule $G11$ la formule : ... *(à tirer jusqu'à la ligne 34)*

(d) de même on entre dans la cellule $H11$ la formule : ... *(à tirer jusqu'à la ligne 34)*

(e) donner alors la valeur approchée entière obtenue dans la cellule $F34$: ...
Interpréter cette valeur dans le contexte : ...

(f) obtenir les trois courbes correspondant aux sommes dans un même repère
(insertion → graphique → Nuages de points → Nuage de points reliés par une courbe → Terminer)
(clic droit sur la zone de graphique → données sources → Séries → Ajouter → Valeurs X → sélectionner la plage $A11 : A34$ → Valeurs Y → sélectionner la plage $F11 : F34$ → Ajouter ... de même pour les autres colonnes ... → OK)

(g) déduire du graphique et du tableau de valeur le tarif le moins cher en fonction du nombre de mois n
– pour n compris entre .... et .... le loyer le plus avantageux est pour le tarif ...
...

4 travaux pratiques algorithmique

4.1 entrée-sortie

Algorithmique

le but est d'écrire un algorithme puis de le traduire en un langage de programmation pour calculatrice programmable ou ordinateur

A. Structure, Entrées-sorties

On entre la valeur du premier terme de la suite géométrique, sa raison et le rang du terme dont on veut la valeur en sortie

1. **algorithme :**

```
Début
//Variables
    u0, q, n, un
//Entrées
    demander à l'utilisateur la valeur de u0
    demander à l'utilisateur la valeur de q
    demander à l'utilisateur la valeur de n
//Initialisations
//Traitements
    affecter à un la valeur u0 * q^n
//Sortie
    afficher un
Fin
```

2. **programme en *javascript* :**

```
<script>
//Variables
    var u0, q, n, un ;
//Entrées
    u0 = prompt("u0 =") ;
    q = prompt("q =") ;
    n = prompt("n =") ;
//Initialisations
    u0 = Number(u0) ;
    q = Number(q) ;
    n = Number(n) ;
    // (transforme les "chaine de caractères" en nombres)
//Traitements
    un = u0 * Math.pow(q, n) ;
//Sortie
    alert( "un =" + un ) ;
</script>
```

3. **programme pour TI :**

```
disp "p"
input p
disp "q"
input q
disp "n"
input n
p*q ∧ n → u
disp u
```

4. **programme pour CASIO :**

```
"p" : ? → p
"q" : ? → q
"n" : ? → n
p*q ∧ n → u
u ▲
```

4.2 boucle itérative

B. Boucle Itérative

I. Pour une suite géométrique croissante :

on entre la valeur du premier terme, sa raison et la valeur du seuil ***(supérieur au premier terme)*** **que l'on veut atteindre**

on obtient en sortie la valeur du rang à partir duquel la suite dépasse le seuil donné

1. **algorithme et programmes :**

```
Début
//Variables
    u0, q, n, u, seuil
//Entrées
    demander à l'utilisateur la valeur de u0
    demander à l'utilisateur la valeur de q
    demander à l'utilisateur la valeur de seuil
//Initialisations
    affecter à u la valeur u0
    affecter à n la valeur 0
//Traitements
    TANS QUE u < seuil FAIRE
     | affecter à u la valeur u * q
     | affecter à n la valeur n + 1
     fin TANS QUE
//Sortie
    afficher n
Fin
```

en *js* :

```
<script>
//Variables
    var u0, q, n, un ;
//Entrées
    u0 = prompt("u0 =") ;
    q = prompt("q =") ;
    seuil = prompt("seuil =") ;
//Initialisations
    u0 = Number(u0) ;
    q = Number(q) ;
    seuil = Number(seuil) ;
    n = 0 ;
    u = u0 ;
//Traitements
     while( u < seuil )
     {
      u = u * q ;
      n = n + 1 ;
     } ;
//Sortie
    alert( "n =" + n ) ;
</script>
```

pour TI :

```
disp "p"
input p
disp "q"
input q
disp "s"
input s
p ⟶ u
0 ⟶ n
While u < s
q*u ⟶ u
n+1 ⟶ n
End
disp n
```

pour CASIO :

```
"p" : ? → p
"q" : ? → q
"s" : ? → s
p ⟶ u
0 ⟶ n
While u < s
q*u ⟶ u
n+1 ⟶ n
WhileEnd
n ▲
```

2. (a) **utiliser le programme de la calculatrice pour déterminer la plus petite valeur de** n **telle que** $10 \times 1,1^n > 500$

   (b) **déterminer le rang à partir duquel la valeur de la suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 2 dépasse le seuil de 1000**

II. Pour une suite géométrique positive et décroissante :

1. **écrire un programme tel que :**
   On entre la valeur du premier terme, sa raison et la valeur du seuil (positif et inférieur au premier terme) que l'on veut atteindre, on obtient en sortie la valeur du rang à partir duquel la suite passe sous le seuil donné

2. (a) **utiliser le programme de la calculatrice pour déterminer la plus petite valeur de** n **telle que** $1000 \times 0,9^n < 10$

   (b) **déterminer le rang à partir duquel la valeur de la suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme 12000 passe sous le seuil de 100**

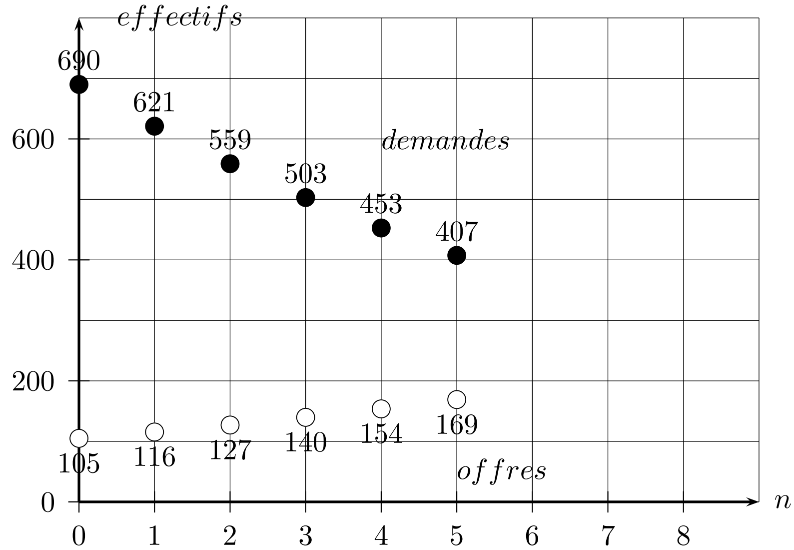
5 interrogations

5.1 interrogation 1

Nom :

interrogation suites numériques

voici un graphique « corrigé » d'évolution des demandes et des places disponibles pour une certaine filière de BTS dans un département. ***(la 1ère année est l'année** 2000**)***



soient d_n et p_n deux suites approchant les nombres respectifs de demandes et de places l'année $2000 + n$ où n est un nombre entier

1. (a) **justifier pourquoi la suite (d_n) semble constituer une suite géométrique et donner son 1^{er} terme et sa raison à $0,1$ près**
   (b) **justifier pourquoi la suite (p_n) semble constituer une suite géométrique et donner son 1^{er} terme et sa raison à $0,1$ près**
2. **Soient (u_n) géométrique de raison $0,9$ avec $u_0 = 690$ et (v_n) géométrique de raison $1,1$ avec $v_0 = 105$**
   (a) i. **calculer les valeurs de u_6 et u_7 à 1 près**
      ii. **calculer les valeurs de v_6 et v_7 à 1 près**
   (b) i. **donner la "formule de récurrence" de u_{n+1} en fonction de u_n**
      ii. **donner la "formule de récurrence" de v_{n+1} en fonction de v_n**
   (c) i. **donner la"formule explicite" de u_n en fonction de n**
      ii. **donner la"formule explicite" de v_n en fonction de n**
   (d) **en utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, résoudre l'inéquation**

   $$690 \times 0,9^n \leq 10$$

   et en déduire l'année à partir de laquelle la demande devrait atteindre 10
   (e) **calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ à 1 près et interpréter le résultat**
   (f) **préciser les limites suivantes en justifiant**
      i. $\lim\limits_{n \to +\infty} (690 \times 0,9^n)$
      ii. $\lim\limits_{n \to +\infty} (105 \times 1,1^n)$
      iii. **interpréter la valeur de la première limite**
   (g) **déterminer l'année à partir de laquelle l'offre devrait dépasser le demande** ***(utiliser la calculatrice)***

5.2 correction interrogation 1

correction interrogation suites numériques

1. (a) La suite des demandes est de nature $\boxed{\text{géométrique}}$ car, pour passer d'un terme à l'autre on multiplie toujours par le même nombre $q = \dfrac{621}{690} \simeq 0,9$
son premier terme est $\boxed{d_0 = 690}$ et sa raison est $\boxed{q = 0,9}$

   (b) La suite des offres est de nature $\boxed{\text{géométrique}}$ car, pour passer d'un terme à l'autre on multiplie toujours par le même nombre $q = \dfrac{116}{105} \simeq 1,1$
son premier terme est $\boxed{p_0 = 105}$ et sa raison est $\boxed{q = 1,1}$

2. (a) i. $u_6 = u_0 \times q^6 = 690 \times 0,9^6 \simeq \boxed{367}$ $u_7 = u_0 \times q^7 = 690 \times 0,9^7 \simeq \boxed{330}$

   ii. $v_6 = v_0 \times q^6 = 105 \times 1,1^6 \simeq \boxed{186}$ $v_7 = v_0 \times q^7 = 105 \times 1,1^7 \simeq \boxed{205}$

   (b) i. $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q = u_n \times 0,9}$

   ii. $\boxed{v_{n+1} = v_n \times q = v_n \times 1,1}$

   (c) i. $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 690 \times 0,9^n}$

   ii. $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 105 \times 1,1^n}$

   (d) en utilisant un tableau de valeurs

n	40	41
$690 \times 0,9^n$	$10,2$	$9,2$
comparaison à 10	> 10	< 10

soit : $\boxed{690 \times 0,9^n \leq 10 \iff n \geq 41}$

c'est pendant l'année $\boxed{2040}$ que la demande devrait atteindre 10

   (e) $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10} = u_0 \times \dfrac{1 - q^{11}}{1 - q} = 690 \times \dfrac{1 - 0,9^{11}}{1 - 0,9} \simeq \boxed{4735}$
ce qui signifie que $\boxed{\text{le nombre total de demandes de } 2000 \text{ à } 2010 \text{ est de } 4735}$

   (f) i. $q = 0,9$ donc $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (690 \times 0,9^n) = 690 \times 0 = \boxed{0}$

   ii. $q = 1,1$ donc $q > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,1^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (105 \times 1,1^n) = 1,5 \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$

   iii. $\boxed{\text{Le nombre de demandes tend vers } 0 \text{ quand le temps tend vers } +\infty}$

   (g) on utilise un tableau de valeurs

n	9	10
$u_n = 690 \times 0,9^n$	267	241
$v_n = 105 \times 1,1^n$	248	272
u_n comparé à v_n	$v_n < u_n$	$v_n > u_n$

l'offre dépasse la demande en $2000 + 10 = \boxed{2010}$

5.3 interrogation 2

Nom :

Interrogation suites numériques

5.4 correction interrogation 2

6 devoir maison

Devoir Maison suites numériques

Exercice 1 :

Une grande entreprise cherche des locaux à louer.
Elle a le choix entre deux locaux qui pourraient convenir dans une même ville
_ Local 1 : Loyer initial de 10000 € par mois avec une augmentation de 5% par mois
_ Local 2 : Loyer initial de 9000 € par mois avec une augmentation de 900 € par mois
Il vous revient de conseiller l'entreprise sur le local à louer selon la durée de location souhaitée par l'entreprise.

A. étude du loyer du local 1 :

1. **Soit $u_0 = 10000$ le montant du loyer annuel initial et u_n le montant du loyer annuel après n mois de location.**
   (a) **calculer u_1, u_2 et u_5 et donner le montant du loyer le 6^e mois de location**
   (b) **donner, en justifiant, la nature de la suite u ainsi que son premier terme et sa raison**
   (c) **exprimer u_n en fonction de n**
   (d) **résoudre l'inéquation $u_n \geq 20000$ *(utiliser la calculatrice)***
   (e) **donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ en justifiant**
   (f) **calculer à 1 € près, $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5$, égal au total des loyers payés pour 6 mois de location**

B. étude du loyer du local 2 :

1. **Soit $v_0 = 9000$ le montant du loyer annuel initial et v_n le montant du loyer annuel après n mois de location.**
   (a) **calculer v_1, v_2 et v_5 et donner le montant du loyer le 6^e mois de location**
   (b) **donner, en justifiant, la nature de la suite v ainsi que son premier terme et sa raison**
   (c) **exprimer v_n en fonction de n**
   (d) **résoudre l'inéquation $v_n \geq 20000$**
   (e) **conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ sans justifier**
   (f) **calculer à 1 € près, $S_5' = v_0 + v_1 + ... + v_5$, égal au total des loyers payés pour 6 mois de location**

C. comparaison des loyers :

1. **justifier en utilisant certains résultats ci dessus**
   (a) **quel est le loyer le moins cher le 6^e mois de location ?**
   (b) **quel est le local le moins cher pour une durée de 6 mois de location**

2. (a) **recopier et compléter le tableau ci dessous à 1 près en détaillant pour la colonne F**

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	5	11	23	35
2	u_n					
3	v_n					
4	S_n					
5	S_n'					

   (b) **donner les formules tableur à entrer en $B2$, $B3$ et $B4$ puis à tirer vers la droite jusqu'à la colonne F**
   (c) **quel est le local au loyer le moins cher**
   i. le 12^e mois ? ii. le 24^e mois ? ii. le 36^e mois ?
   (d) **quel est le local au loyer le moins cher pour une durée de location de**
   i. 12 mois ? ii. 24 mois ? ii. 36 mois ?

3. **l'entreprise souhaite louer pour 2 ans, quel local lui conseillez vous ?**

Exercice 2 : *(A partir de Métropole Septembre 2011)*

La société « Vélibre », spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs.
Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :
– de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;
– de revendre 20 % des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012 ;
– de revendre 20 % au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.

1. **Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $2010 + n$ par les termes de la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par**

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$

Vérifier que U_1 et U_2 correspondent bien au nombre prévu de vélos du parc pour janvier 2011 et janvier 2012.

2. **Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur. Voici un extrait de sa feuille de calcul :**

	A	B	C	D
1	Valeur de n	Valeur de U_n	Valeur de V_n	Valeur de $\frac{V_n}{V_{n-1}}$
2	0	150	-50	
3	1	160	-40	0,8
4	2	168	-32	0,8
5	3	174,4	-25,6	0,8
6	4	179,52	-20,48	
7	5	183,62	-16,38	
8	6	186,89		
9	7	189,51		
10	8	191,61		
11	9	193,29		
12	10	194,63		
13	11	195,71		
14	12	196,56		

   (a) **quelle formule entrer dans la cellule $B3$ pour obtenir les valeurs de la colonne B quand on recopie la formule jusqu'à $B14$?**

   (b) **Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).**

   (c) **Quelle pourrait-être la limite de la suite (U_n) ?**

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 200$.

3. **Quelle formule entrer dans la cellule $C2$ pour obtenir la colonne C ?**

4. (a) **Quelle formule entrer dans la cellule $D3$ pour obtenir la colonne D ?**

   (b) **Prouver que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,8$. Déterminer son premier terme.**

   (c) **En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction du nombre entier n.**

   (d) **Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de vélos atteindra 199**

   (e) **Déterminer la limite de la suite (U_n).**

5. ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***
La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société « Vélibre » pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.

7 corrigé devoir maison

Corrigé Devoir Maison suites numériques

Exercice 1 :

A. étude du loyer du local 1 :

1. (a) $u_1 = 10000 \times (1 + \frac{5}{100}) = \boxed{10500}$ $\quad u_2 = 10000 \times (1 + \frac{5}{100})^2 = \boxed{11025}$

$u_5 = 10000 \times (1 + \frac{5}{100})^5 \simeq \boxed{12762,81} \simeq$ **montant du loyer le** 6^e **mois de location**

(b) **la suite** u **est géométrique car pour passer d'un terme à l'autre,** $\boxed{\text{on multiplie par } 1,05}$, **la raison est** $\boxed{q = 1,05}$ **et le premier terme est** $\boxed{u_0 = 10000}$

(c) $\boxed{u_n = 10000 \times 1,05^n}$

(d) **pour résoudre l'inéquation** $u_n \geq 20000$ **on utilise la calculatrice**

n	14	15
$u_n = 10000 \times 1,05^n$	$\simeq 19799$	$\simeq 20789$
comparaison à 20000	< 20000	> 20000

soit $u_n \geq 20000 \iff \boxed{n \geq 15}$

(e) $q = 1,05 > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,05^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10000 \times 1,05^n = 1000 \times (+\infty) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 10000 \times 1,05^n = +\infty}$

(f) $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5 = 1000 \times \frac{1 - 1,05^6}{1 - 1,05} \simeq \boxed{68019 \text{ €}}$

B. étude du loyer du local 2 :

1. (a) $v_1 = 9000 + 900 = \boxed{9900}$ $\quad v_2 = 9000 + 2 \times 900 = \boxed{10800}$

$v_5 = 9000 + 5 \times 900 = \boxed{13500} =$ **montant du loyer le** 6^e **mois de location**

(b) **la suite** v **est arithmétique car pour passer d'un terme à l'autre,** $\boxed{\text{on ajoute } 900}$, **la raison est** $\boxed{r = 900}$ **et le premier terme est** $\boxed{v_0 = 9000}$

(c) $\boxed{v_n = 9000 + 900n}$

(d) $v_n \geq 20000$

$\iff 9000 + 900n \geq 20000 \iff n \geq \frac{20000 - 9000}{900} \iff \boxed{n \geq 13}$

(e) $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$ **sans justifier**

(f) $S'_5 = v_0 + v_1 + ... + v_5 = \frac{v_0 + v_5}{2} \times 6 = \frac{9000 + 13500}{2} \times 6 = \boxed{67500}$

C. comparaison des loyers :

1. (a) **le loyer le moins cher le** 6^e **mois est pour le** $\boxed{\text{local 1}}$ **car** $12762,81 \leq 13500$

(b) **le local le moins cher pour une durée de** 6 **mois est le** $\boxed{\text{local 2}}$ **car** $67500 < 68019$

2. (a) **recopier et compléter le tableau ci dessous à** 1 **près en détaillant pour la colonne** F

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	5	11	23	35
2	u_n	10000	$\simeq 12763$	$\simeq 17103$	$\simeq 30715$	$\simeq 55160$
3	v_n	9000	13500	18900	29700	40500
4	S_n	10000	$\simeq 68019$	$\simeq 159171$	$\simeq 445020$	$\simeq 958363$
5	S'_n	9000	67500	167400	464400	891000

(b) $\boxed{B2 = 10000 \times 1.05\wedge\ B1}$ $\boxed{B3 = 90000 + 900 \times B1}$ $\boxed{B4 = 10000 \times (1 - 1.05 \wedge (B1 + 1))/(1 - 1.05)}$

(c) **local au loyer le moins cher**

i. le 12^e **mois :** $\boxed{\text{local 1}}$ **ii. le** 24^e **mois :** $\boxed{\text{local 2}}$ **ii. le** 36^e **mois :** $\boxed{\text{local 2}}$

(d) **local au loyer le moins cher pour une durée de location de**

i. 12 **mois :** $\boxed{\text{local 1}}$ **ii.** 24 **mois :** $\boxed{\text{local 1}}$ **ii.** 36 **mois :** $\boxed{\text{local 2}}$

3. pour 2 **ans :** $\boxed{\text{local 1}}$ **car** $445020 < 464400$

Exercice 2 : *(A partir de Métropole Septembre 2011)*

1. $U_1 = 0,8 \times 150 + 40 = \boxed{160}$
   $U_2 = 0,8 \times 160 + 40 = \boxed{168}$
2. (a) $\boxed{B3 = B2 * 0,8 + 40}$
   (b) **la suite** (U_n) $\boxed{\textbf{semble croissante}}$
   (c) **la limite de la suite** (U_n) **pourrait-être égale à** $\boxed{200}$
3. $\boxed{C2 = B2 - 200}$
4. (a) $\boxed{D3 = C3/C2}$
   (b) **à partir de :** $\begin{cases} (1)\ V_n = U_n - 200 \quad \Longrightarrow (2)\ V_{n+1} = U_{n+1} - 200 \\ \\ (3)\ U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \end{cases}$

   $V_{n+1} = U_{n+1} - 200$ **(2)**

   $V_{n+1} = (0,8U_n + 40) - 200$ **(3)**

   $V_{n+1} = 0,8U_n - 160$

   $V_{n+1} = 0,8(U_n - \dfrac{160}{0,8})$ **(0,8 en facteur)**

   $V_{n+1} = 0,8(U_n - 200)$

   $V_{n+1} = 0,8V_n$ **(1)**

   donc (V_n)**est** $\boxed{\textbf{géométrique}}$ **de raison** $\boxed{q = 0,8}$ **et de premier terme** $V_0 = U_0 - 200 = 150 - 200 = \boxed{-50}$

   (c) **on a donc :**
   $V_n = V_0 \times q^n = \boxed{-50 \times 0,8^n}$

   de plus $V_n = U_n - 2000$

   donc $-50 \times 0,8^n = U_n - 200$

   donc $\boxed{U_n = 200 - 50 \times 0,8^n}$

   (d) **année à partir de laquelle le nombre de vélos atteindra** 199 **:**
   on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice :

n	17	18
$U_n = 200 - 80 \times 0,8^n$	$\simeq 198,87$	$\simeq 199,09$
comparaison à 199	$U_n < 199$	$U_n > 199$

   soit $\boxed{U_n \geq 199 \textbf{ pour } n \geq 18}$ **soit à partir de** $\boxed{2028}$

   (e) $q = 0,8$ **donc** $0 < q < 1$

   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 200 - 50 \times 0,8^n = 200 - 50 \times 0$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 200}$

5. **La société « Vélibre »** $\boxed{\textbf{ne pourra jamais satisfaire cette demande}}$**, car la suite est croissante et a pour limite** 200, $\boxed{\textbf{elle n'atteindra donc jamais } 250}$

8 évaluation

Nom : **évaluation suites numériques**

Exercice 1 :

Etude de l'évolution des productions de deux entreprises qui fabriquent le même produit

1. **Observation des données :** ***(nombre d'unités produites par an de 2009 à 2011)***

Année	Entreprise A	Entreprise B
2009	10000	9000
2010	10500	9900
2011	11025	10800

   (a) **pour quelle entreprise l'évolution de la production semble correspondre à une suite géométrique ? justifier pourquoi puis donner le premier terme et la raison de la suite**

   (b) **pour quelle entreprise l'évolution de la production semble correspondre à une suite arithmétique ? justifier pourquoi puis donner le premier terme et la raison de la suite**

2. **Modélisation mathématique des évolutions :**
Hypothèse 1 : la production de l'entreprise A augmente de 5% par an
Hypothèse 2 : la production de l'entreprise B augmente de 900 par an
Soit u (respectivement : v) la suite correspondant à la production de l'entreprise A (respectivement : B) en $2009 + n$,

   (a) **Etude de l'entreprise A**

      i. **donner la valeur de u_0 et montrer que $u_3 = 11576,25$**
      ii. **exprimer u_{n+1} en fonction de u_n**
      iii. **donner la nature de la suite ainsi que sa raison**
      iv. **exprimer u_n en fonction de n**
      v. **calculer u_{23} et interpréter le résultat**
      vi. **à la calculatrice, résoudre l'inéquation $10000 \times 1,05^n \geq 25000$ et interpréter**
      vii. **déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} 10000 \times 1,05^n$ et interpréter le résultat**
      viii. **montrer que la somme $S_{23} = u_0 + u_1 + ... + u_{23}$ est égale à $\simeq 445020$ et interpréter le résultat**

   (b) **Etude de l'entreprise B**

      i. **donner la valeur de v_0 montrer que $v_3 = 11700$**
      ii. **exprimer v_{n+1} en fonction de v_n**
      iii. **donner la nature de la suite ainsi que sa raison**
      iv. **exprimer v_n en fonction de n**
      v. **calculer v_{23}**
      vi. **en quelle année l'entreprise devrait produire plus de 25000 unités ?** ***(justifier)***
      vii. **montrer que $S'_{23} = v_0 + v_1 + ... + v_{23}$ est égale à 464400**

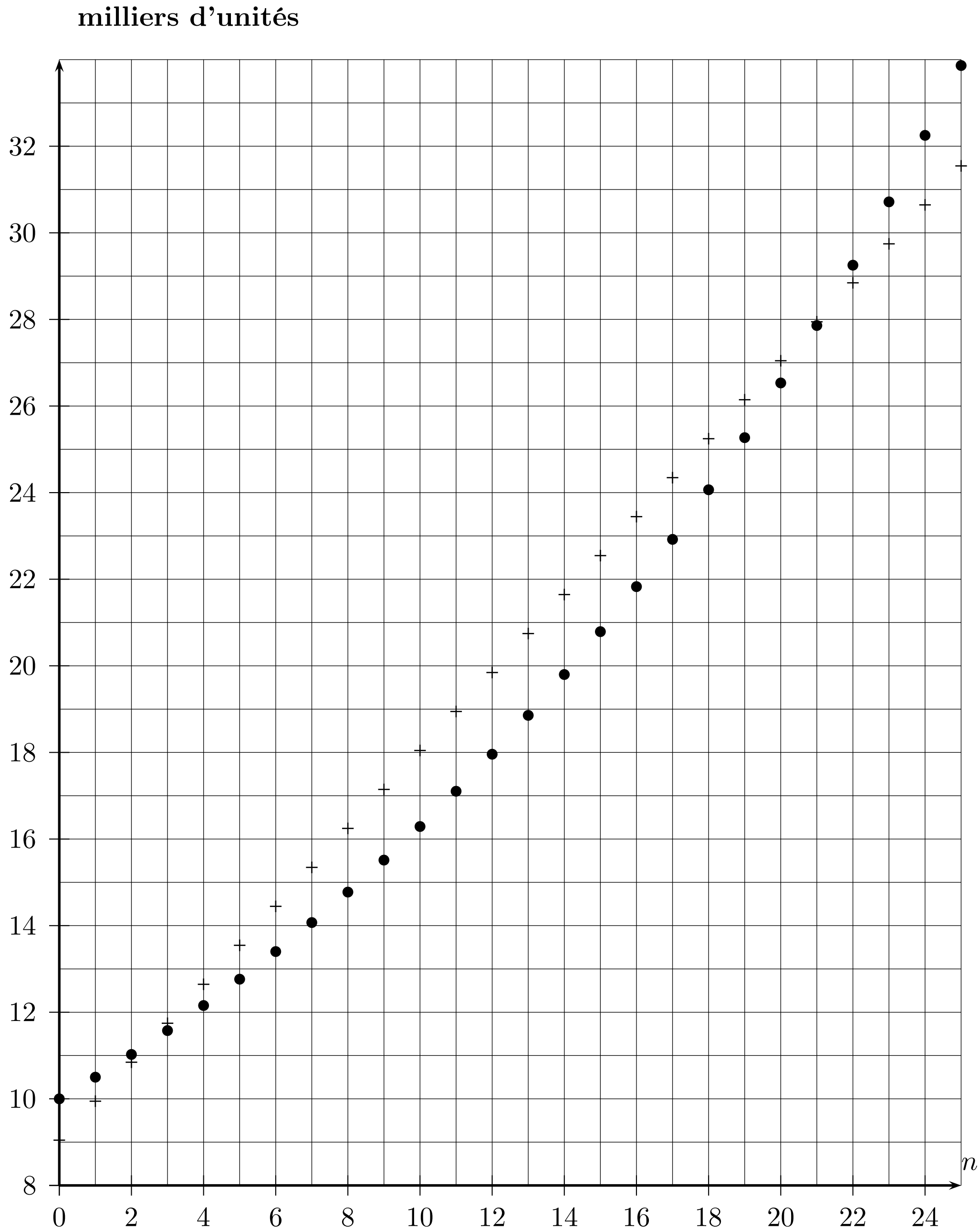
   (c) **Comparaisons des productions**

      i. **on utilise un tableur pour obtenir les tableaux de valeurs des suites u et v**

	A	B	C	D	E
1	n	u_n	v_n	S_n	S'_n
2	0	10000	9000	10000	9000
3	1				
4	2				

         A. **donner deux formules différentes qu'il est possible d'entrer dans la cellule $B3$ et de tirer vers le bas pour obtenir les valeurs de la colonne B**
         B. **donner deux formules différentes qu'il est possible d'entrer dans la cellule $C3$ et de tirer vers le bas pour obtenir les valeurs de la colonne C**
         C. **donner une formule à entrer dans la cellule $D3$ et à tirer vers le bas pour obtenir les valeurs de la colonne D**
         D. **donner une formule à entrer dans la cellule $E3$ et à tirer vers le bas pour obtenir les valeurs de la colonne E**

ii. **le tableur permet d'obtenir la représentation graphique suivante**



utiliser le graphique pour déterminer pour quelles années, l'entreprise A a une production annuelle supérieure à celle de l'entreprise B (tracés visibles)

(d) **Bilan pour** 2032

i. **quelle entreprise devrait produire le plus l'année** 2032 **?**

ii. **quelle entreprise devrait avoir produit le plus au total de** 2009 **à** 2032 **?**

Exercice 2 :

En 2000, une entreprise compte 8000 employés.
Une étude montre que d'une année sur l'autre, 10% de l'effectif part à la retraite.
Pour tenter de compenser la perte, l'entreprise embauche 400 jeunes chaque année.
Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés l'année $2000 + n$
On a donc $u_0 = 8000$

1. **montrer que $u_1 = 7600$ et calculer u_2**
2. **exprimer u_{n+1} en fonction de u_n**
3. **pour tout entier naturel n, on admet que $u_{n+1} = 0,9u_n + 400$ et on pose $v_n = u_n - 4000$**
   (a) **calculer v_0**
   (b) **démontrer que (v_n) est géométrique et donner son premier terme et sa raison**
   (c) **en déduire l'expression de v_n en fonction de n**
   (d) **en déduire que $u_n = 4000 + 4000 \times 0,9^n$**
   (e) **calculer l'effectif de l'entreprise en 2020 à 1 près**
   (f) **déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat**
   (g) **en quelle année l'effectif passera t-il sous les 4100 ? *(utiliser la calculatrice)***
4. **soit l'algorithme :**

```
Début
//Variables
    n, u, seuil
//Entrées
    demander à l'utilisateur la valeur de seuil
//Initialisations
    affecter à u la valeur 8000
    affecter à n la valeur 0
//Traitements
    TANS QUE u > seuil FAIRE
     | affecter à u la valeur u * 0.9 + 400
     | affecter à n la valeur n + 1
     fin TANS QUE
//Sortie
    afficher n
Fin
```

   (a) **combien y a t-il de variable d'entrée, combien y a t-il de variable de sortie ?**
   (b) **expliquer à quoi sert cet algorithme dans le contexte de l'exercice**
   (c) **que donne t-il en sortie si on entre la valeur 4100 ?**
   (d) **que se passe t-il si on entre la valeur 4000 ?**

Exercice 3 : (uniquement pour les candidats non spécialistes)

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse
(*Chaque réponse est à justifier , toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*)

1	$u_{n+1} = -1,5u_n - 2$ **avec** $u_0 = 10$ **donc** $u_5 =$	$-82,8125$	$82,8125$	$-82,5$
2	$S = 100 + 100 \times 0,5 + 100 \times 0,5^2 + ... + 100 \times 0,5^{15} \simeq$ **(à** 10^{-3}**)**	$199,994$	$199,997$	$199,998$
3	**avec** n **entier naturel et** $u_n = 50 - 10 \times 0,9^n$ **on a** $u_n \geq 60$ **pour**	$n \geq 20$	$n \leq 20$	**aucune valeur de** n

Exercice 3 : (uniquement pour les candidats spécialistes)

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse
(*Chaque réponse est à justifier, toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*)

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ **donc** $2A + B =$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$
2	**la matrice inverse de** $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **est**	$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2,5 & 1,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $AX = B$ **donc**	$X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Formulaire

si une suite est arithmétique
alors la somme des n **premiers termes** S **est telle que :**

$$S = 1^{er} terme + 2^{e} terme + 3^{e} terme + ... + dernier\ terme = \boxed{\frac{premier + dernier}{2} \times (nombre\ de\ termes)}$$

si une suite est géométrique
alors la somme des n **premiers termes** S **est telle que :**

$$S = 1^{er} terme + 2^{e} terme + 3^{e} terme + ... + dernier\ terme = \boxed{premier \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}}$$

9 corrigé évaluation

<u>**corrigé exercice 1 :**</u>

1. (a) **pour entreprise** $\boxed{A}$ **l'évolution de la production semble correspondre à une suite géométrique car** $\boxed{\frac{10500}{10000} = \frac{11025}{10500} = 1,05 = constante}$**, le premier terme est** $\boxed{10000}$ **et la raison de la suite est** $\boxed{q = 1,05}$

   (b) **pour entreprise** $\boxed{B}$ **l'évolution de la production semble correspondre à une suite arithmétique car** $\boxed{9900 - 9000 = 10500 - 9900 = 900 = constante}$**, le premier terme est** $\boxed{9000}$ **et la raison de la suite est** $\boxed{r = 900}$

2. (a) **Etude de la l'entreprise** A

   i. $\boxed{u_0 = 10000}$ **et** $u_3 = 10000 \times 1,05^3 = \boxed{11576,25}$

   ii. $\boxed{u_{n+1} = 1,05 \times u_n}$

   iii. **la suite est** $\boxed{\textbf{géométrique}}$ **de raison** $\boxed{q = 1,05}$

   iv. $\boxed{u_n = 10000 \times 1,05^n}$

   v. $\boxed{u_{23} = 10000 \times 1,05^{23} \simeq 30715}$ **qui est la production de l'entreprise** A **en** 2032

   vi. $\boxed{10000 \times 1,05^n \geq 25000}$ **On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice**

n	18	19
$u_n = 1000 \times 1,05^n$	24066	25269
comparaison à 25000	< 25000	> 25000

   C'est $\boxed{\textbf{durant l'année } 2009 + 18 = 2027}$ **que la production atteint** 25000

   vii. $q = 1,05$
   donc $q > 1$
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,05^n = +\infty$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} 10000 \times 1,05^n = 10000 \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$
   La production de l'entreprise A $\boxed{\textbf{tend vers l'infini}}$ **quand le temps passe**

   viii. $S_{23} = u_0 + u_1 + ... + u_{23} = 10000 \times \dfrac{1 - 1,05^{24}}{1 - 1,05} \simeq \boxed{445020}$
   la $\boxed{\textbf{production totale}}$ **de** 2009 **à** $2009 + 23 = 2032$ **est d'environs** 445020 **unités**

   (b) **Etude de la ville B**

   i. $\boxed{v_0 = 9000}$ **et** $v_3 = 9000 + 3 \times 900 = \boxed{11700}$

   ii. $\boxed{v_{n+1} = v_n + 900}$

   iii. **la suite est** $\boxed{\textbf{arithmétique}}$ **de raison** $\boxed{r = 900}$

   iv. $\boxed{v_n = 9000 + 900n}$

   v. $v_{23} = 9000 + 900 \times 23 = \boxed{29700}$

   vi. $9000 + 900n \geq 25000 \iff n \geq \dfrac{25000 - 9000}{900} \simeq 17,8$
   les 25000 **unités sont** $\boxed{\textbf{dépassées durant l'année } 2009 + 17 = 2026}$

   vii. $S'_{23} = v_0 + v_1 + ... + v_{23} = \dfrac{v_0 + v_{23}}{2} \times 24 = \dfrac{9000 + 29700}{2} \times 24 = \boxed{464400}$

   (c) **Comparaisons des productions**

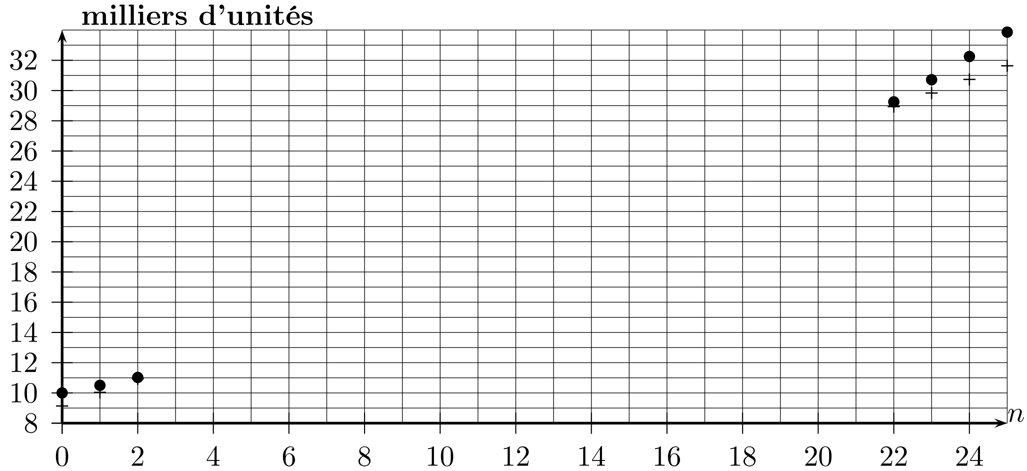
   i.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	n	u_n	v_n	S_n	S'_n
2	0	10000	9000	10000	9000
3	1				

   A. $\boxed{B3 = B2 * 1,05}$ **ou** $\boxed{B3 = 10000 * 1,05 \wedge A3}$ **B.** $\boxed{C3 = C2 + 900}$ **ou** $\boxed{C3 = 9000 + 900 * A3}$

   B. $\boxed{D3 = 10000 * (1 - 1,05 \wedge (A3 + 1))/(1 - 1,05)}$ **D.** $\boxed{E3 = (A3 + 1) * (C\$2 + C3)/2}$

ii. le tableur permet d'obtenir la représentation graphique suivante



l'entreprise A a une production annuelle supérieure à celle de l'entreprise B pour $n = 0, n = 1, n = 2$ et pour $n \geq 22$ donc $\boxed{\text{entre 2009 et 2011}}$ **puis** $\boxed{\text{à partir de 2031}}$

(d) Bilan pour 2032

i. en 2032, $n = 23$, $30715 > 29700$ **donc** $\boxed{A \text{ produit plus que } B}$

ii. 2009 **à** 2032 **:** $445020 < 464400$ **donc** $\boxed{B \text{ produit plus que } A \text{ au total}}$

corrigé exercice 2 :

1. $u_1 = 8000 \times (1 - \frac{10}{100}) + 400 = \boxed{7600}$ **et** $u_2 = 7600 \times (1 - \frac{10}{100}) + 400 = \boxed{7240}$

2. $\boxed{u_{n+1} = 0,9u_n + 400}$

3. (a) $v_0 = u_0 - 4000 = 8000 - 4000 = \boxed{4000}$

(b) à partir de : $\begin{cases} (1)\ v_n = u_n - 4000 \quad \Longrightarrow (2)\ v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 \\ (3)\ u_{n+1} = 0,9u_n + 400 \end{cases}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000$ **(2)**

$v_{n+1} = (0,9u_n + 400) - 4000$ **(3)**

$v_{n+1} = 0,9u_n - 3600$

$v_{n+1} = 0,9(u_n - \frac{3600}{0,9})$ **(0,9 en facteur)**

$v_{n+1} = 0,9(u_n - 4000)$

$v_{n+1} = 0,9v_n$ **(1)**

donc $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ **de premier terme** $v_0 = 4000$ **et de raison** $0,9$

(c) $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{4000 \times 0,9^n}$

(d) $v_n = u_n - 4000$ **donc** $4000 \times 0,9^n = u_n - 4000$ **donc** $\boxed{u_n = 4000 + 4000 \times 0,9^n}$

(e) en 2020, $n = 20$ **donc** $u_{20} = 4000 + 4000 \times 0,9^{20} \simeq \boxed{4486}$

(f) $q = 0,9$ **donc** $0 < q < 1$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4000 + 4000 \times 0,9^n = 4000 + 4000 \times 0 = 4000$ **donc** $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4000}$

l'effectif de l'entreprise $\boxed{\text{se rapproche de 4000}}$ **à long terme**

(g) on utilise le tableau de valeurs de la calculatrice :

n	35	36
$u_n = 4000 + 4000 \times 0,9^n$	4100	4090
comparaison à 4100	$u_n > 4100$	$u_n < 4100$

$\boxed{u_n \leq 4100 \text{ pour } n \geq 36}$ **donc durant l'année** 2036

4. (a) il y a $\boxed{3}$ variables d'entrée, $\boxed{1}$ variable de sortie
   (b) cet algorithme sert à $\boxed{\text{déterminer la valeur de } n}$ pour laquelle $\boxed{\text{l'effectif de l'entreprise est passée sous un certain seuil}}$ entré par l'utilisateur
   (c) si on entre la valeur 4100, il donne $\boxed{n = 36}$
   (d) si on entre la valeur 4000, $\boxed{\text{l'algorithme ne se termine jamais en théorie}}$ car l'effectif décroît vers 4000 sans jamais l'atteindre

corrigé exercice 3 : (uniquement pour les candidats non spécialistes)

1	$u_{n+1} = -1,5u_n - 2$ avec $u_0 = 10$ donc $u_5 =$	$\boxed{82,8125}$
2	$S = 100 + 100 \times 0,5 + 100 \times 0,5^2 + ... + 100 \times 0,5^{15} \simeq$ (à 10^{-3})	$\boxed{199,994}$
3	avec n entier naturel et $u_n = 50 - 10 \times 0,9^n$ on a $u_n \geq 60$ pour	aucune valeur de n

(1) : on calcul les 5 premiers termes
(2) : on utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique
(3) : on calcule la limite qui est égale à 50 de plus $50 < 60$ et la suite croît

corrigé exercice 3 : (uniquement pour les candidats spécialistes)

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ donc $2A + B =$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$
2	la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est	$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2,5 & 1,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $AX = B$ donc	$X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

On peut tout vérifier à la calculatrice