Nombre dérivé et dérivation

Table des matières

1 Mots clés - Notations - Formules

1.1 Vocabulaire

Il faut connaître la signification des mots ou expressions suivantes :

1. fonction, variable
2. domaine de définition de la fonction
3. image d'un nombre par une fonction
4. antécédent(s) d'un nombre par une fonction
5. par la fonction, 0 a pour image 15
6. par la fonction, 15 a pour antécédents 0
7. courbe d'une fonction
8. tableau de valeurs de la fonction
9. tableau de signes de la fonction
10. valeurs d'annulation de la fonction *(la fonction s'annule en -5 et en -2)*
11. signe d'une fonction *(positif, négatif, nul)*
12. la fonction est strictement négative entre -5 exclu et -2 exclu
13. la fonction est strictement positive entre -10 inclu et -5 exclu ou entre -2 exclu et 20 inclu
14. intervalle *(ouvert, fermé, semi ouvert, réunion d'intervalles)*
15. bornes d'un intervalle *(inclu, exclu, l'infinie)*
16. tableau de variations de la fonction
17. sens de variation d'une fonction *(croissante, décroissante, constante)*
18. la fonction est décroissante entre -10 et -4, croissante entre -4 et 8, décroissante entre 8 et 20
19. extrémums d'une fonction *(maximum, minimum)*
20. la fonction admet 25 pour maximum et -10 pour minimum
21. la fonction est supérieure ou égale à 10 sur l'intervalle de bornes -10 inclu et -8 exclu et sur l'intervalle de bornes -3 exclu et 12 exclu
22. la fonction est inférieure stricte à -5 entre -5,5 exclu et -1 exclu
23. la droite est tangente à la courbe de la fonction
24. le coefficient directeur, la pente, le nombre dérivé
25. valeurs d'annulation de la dérivée
26. signe de la dérivée
27. tableau de signes de la dérivée
28. fonction dérivée
29. tableau de variations complet de la fonction

1.2 Notations

Il faut connaître la signification des notations mathématiques suivantes :

1. $x, \quad f(x), \quad f'(x)$
2. D_f, D_g
3. $[a\ ;\ b] \quad]a\ ;\ b[\quad]a\ ;\ b] \quad [a\ ;\ b[\quad]a\ ;\ +\infty[\quad [a\ ;+\infty[, \quad]-\infty\ ;\ b[\quad]-\infty\ ;\ b]$
4. $f(0) = 15 \quad f(-2) = 0$
5. $f(x) = 15$ pour $x = 0 \quad f(x) = 0$ pour $x = -2$
6. $f(x) = 0$ pour $x = -5$ ou $x = -2$
7. $C_f \quad C_g$
8.

valeur de x	-10	-5	0	-2	8	20
valeur de $f(x)$	20	0	15	0	25	8

9.

valeur de x	-10		-5		-2		20
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-5\ ;\ -2\} \\ f(x) < 0 \text{ pour } x \in\ ]-5\ ;\ -2[\\ f(x) > 0 \text{ pour } x \in [-10\ ;\ -5[\ \cup\ ]-2\ ;\ 20] \end{cases}$$

10.

valeur de x	-10		-4		8		20
variations de $f(x)$	20	↘	-10	↗	25	↘	8

$$\begin{cases} f \text{ décroît pour } x \in [-10\ ;\ 4] \\ f \text{ croît pour } x \in [-4\ ;\ 8] \\ f \text{ décroît pour } x \in [8\ ;\ 20] \end{cases}$$

11. $\begin{cases} f \text{ admet 25 pour maximum en } x = 8 \\ f \text{ admet -10 pour minimum en } x = -4 \end{cases}$

12. $f(x) \geq 10 \Leftrightarrow x \in [-10\ ;\ -8[\ \cup\ ]-3\ ;\ 12[$

13. $f(x) < -5 \Leftrightarrow x \in]-5,5\ ;\ -1]$

14. T

15. $a \quad f'(-10) = -5 \quad f'(-4) = 0 \quad f'(0) = 5 \quad f'(8) = 0 \quad f'(10) = -8$

16. $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-4\ ;\ 8\} \\ f(x) < 0 \text{ pour } x \in [-10\ ;\ -4[\ \cup\ ]8\ ;\ 20] \\ f(x) > 0 \text{ pour } x \in\ ]-4\ ;\ 8[\end{cases}$

17.

valeur de x	-10		-4		8		20
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-4\ ;\ 8\} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in [-10\ ;\ -4[\ \cup\ ]8\ ;\ 20] \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in\ ]-4\ ;\ 8[\end{cases}$$

18.

valeur de x	-10		-4		8		20
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	20	↘	-10	↗	25	↘	8

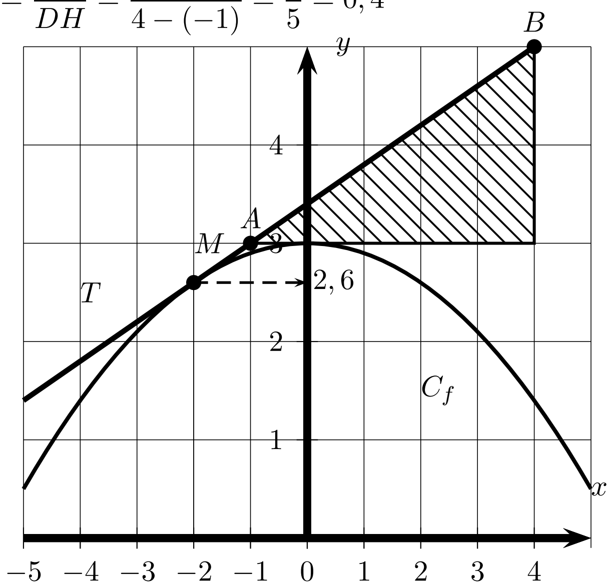
1.3 Formules

Il faut connaître par coeur les formules suivantes :

1. Pente de la droite = coefficient directeur de la droite : a = $\boxed{\dfrac{DV}{DH}} = \boxed{\dfrac{Dy}{Dx}} = \boxed{\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

   ci dessous : avec $A(-1;3)$ et $B(4;5)$

   $a = f'(-2) = \dfrac{DV}{DH} = \dfrac{5-3}{4-(-1)} = \dfrac{2}{5} = 0,4$



   l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = x_0$ est $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

   l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = x_0$ est $\boxed{y = ax + b}$ avec $\boxed{a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$ et $\boxed{b = y_A - ax_A}$

2. Tableau des dérivées : $(a \in \mathbb{R})$ $(b \in \mathbb{R})$ $(c \in \mathbb{R})$ $(d \in \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$

$f(x)$	$f'(x)$
0	0
1	0
2	0
-2	0
$\frac{1}{3}$	0
$\sqrt{2}$	0
$a \in \mathbb{R}$	0
x	1
$2x$	2
$-2x$	-2
$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}$
$\frac{ax}{b} = \frac{a}{b}x$	$\frac{a}{b}$
ax	a
$ax + b$	a
x^2	$2x$
ax^2	$2ax$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$
x^3	$3x^2$
ax^3	$3ax^2$
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$3ax^2 + 2bx + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}
$ax^n \ (n \in \mathbb{N})$	anx^{n-1}

3. Tableau de signes de $ax + b$: *(signe du binôme)*

valeur de x	$-\infty$ $\dfrac{-b}{a}$ $+\infty$
signe de $ax + b$	signe de -a 0 signe de a

Calcul de l'annulation : $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$

"priorité à droite au signe de a"

4. Tableau de signes de ax^2+bx+c : *(signe du trinôme)*

Quel que soit le trinôme $\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ définit sur $\mathbb{R}$
de discriminant $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ où $x_0,\ \ x_1$ et x_2 sont les annulations éventuelles

si $\boxed{\Delta<0}$ alors $\boxed{\text{aucune annulation}}$ dans $\mathbb{R}$ pour ax^2+bx+c

si $\boxed{\Delta=0}$ alors $\boxed{\text{une seule annulation}}$ dans $\mathbb{R}$ pour ax^2+bx+c : $\boxed{x_0=\dfrac{-b}{2a}}$

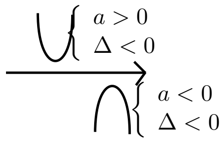
si $\boxed{\Delta>0}$ alors $\boxed{\text{deux annulations}}$ dans $\mathbb{R}$ pour ax^2+bx+c : $\boxed{x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

le signe de $f(x)=ax^2+bx+c$ est donné en fonction de x par :

si $\boxed{\Delta<0}$ alors

valeur de x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a

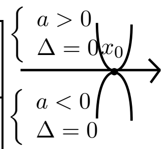
"signe de a"



si $\boxed{\Delta=0}$ alors

valeur de x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a	0	signe de a

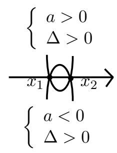
"signe de a de part et d'autre de l'annulation"



si $\boxed{\Delta>0}$ alors

valeur de x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

"signe de a à l'extérieur des annulations et signe de $-a$ à l'intérieur"



(on suppose $x_1<x_2$)

5. Tableau de signes d'un produit ou d'un quotient
   quels que soient les réels A et B
   le signe du produit $A \times B$ ou du quotient $\dfrac{A}{B}$ est donné par le tableau suivant

signe de B \ signe de A	$+$	-
$+$	$+$	-
-	-	$+$

   le produit *(quotient)* de deux nombres réels de mêmes signes est positif
   le produit *(quotient)* de deux nombres réels signes contraires est négatif

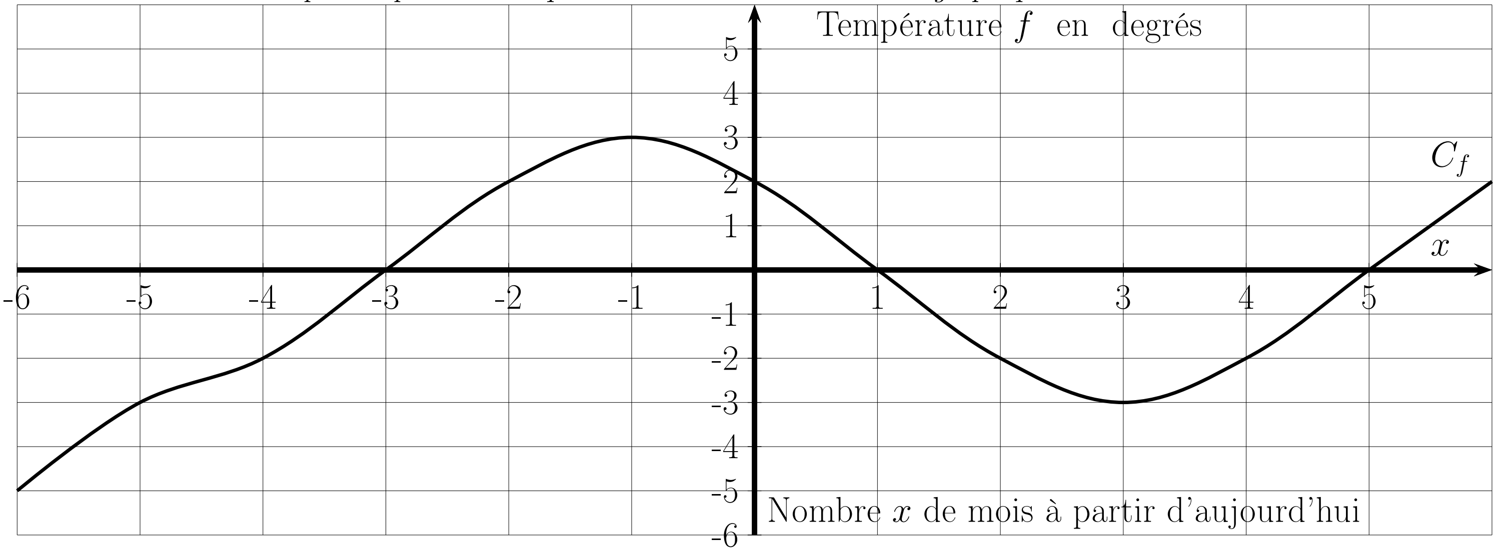
1.4 activités bilan

1.4.1 Activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant les fonctions

Activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant les fonctions

• On dispose de la courbe de l'évolution de la température en un lieux donné sur une période d'un an

Tous les tracés utilisés pour répondre aux questions seront visibles sur le graphique



1. La courbe notée ... est celle de la fonction T... notée ....

   en fonction de la variable N... notée ...

2. Cette fonction est définie pour un nombre de mois compris entre ...

   c'est à dire sur l'intervalle [... ou encore pour $x \in$ [...

   Cet intervalle a pour Bo... , ... et ... qui sont toutes deux In...

   on dit aussi que l'intervalle ... est le Dom... noté ...

3. Graphiquement, on peut lire qu'il y a 5 mois il faisait ... soit $f(...\quad) = ...$

   ... a pour Im... ... par la fonction ... et on note aussi : $f : ... \mapsto ...$

4. Les 2 degrés sont atteints pour les mois ... ou ... ou ...

   soit $f(x) = ...$ pour $x = ...$ ou $x = ...$ ou $x = ...$

   2 a pour ... ... ,... et ... par la fonction ...

5. À l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de Va... ci dessous

Valeur de x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de $f(x)$												

6. À l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de Si... ci dessous

Valeur de x	... ...
Signe de $f(x)$	... ...

Commentaires : $\left\{ \begin{array}{l} \text{la température est nulle pour les mois ... ; ... et ...} \\ \text{la température est strictement négative entre les mois ... inclu et ... exclu} \\ \text{ou entre les mois ... ... et ... ...} \\ \text{la température est positive strict entre les mois ...} \\ \text{ou entre les mois ...} \end{array} \right.$

Commentaires *(en écriture Mathématique)* : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x \in \{... \quad ; \quad ... \quad ; \quad ...\} \\ f(x) < 0 \text{ pour } x \in \ [... \quad ; ... \quad [\cup]... \quad ; ... \quad [\\ f(x) > 0 \text{ pour } x \in ... \end{cases}$

7. À l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de Va... ci dessous

Valeur de x	...		...		...		...
Variations de $f(x)$			...				...
		...		...		...	
	...				...		

Commentaires : $\begin{cases} \text{La température est Cr... entre les mois ... et ... inclus} \\ \text{La température est Dé... entre les mois ... et ... inclus} \\ \text{La température ... entre les mois ... et ... inclus} \end{cases}$

Commentaires *(en écriture Mathématique)* : $\begin{cases} f \text{ croît pour } x \in [... \quad ; \quad ...] \\ f \ ... \qquad \text{pour } x \in ... \\ f \ ... \qquad \text{pour } x \in ... \end{cases}$

8. À l'aide du graphique, on peut trouver les Extr... de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 6]$

La température maximale vaut ... degrés pour le mois ...

La température minimale vaut ... degrés pour le mois ...

La fonction f admet un Ma... qui vaut ... pour $x = ...$

La fonction f admet un Mi... qui vaut ... pour $x = ...$

9. À l'aide du graphique on peut résoudre des É... et des I...

La température est égale à 2 pour les mois ... , ... et ...

L'équation $f(x) = 2$ a pour ensemble de solutions $S = \{... \quad ; \quad ... \quad ; \quad ... \quad \}$

La température est égale à -2 pour les mois ...

L'équation ... $= ...$ a pour ensemble de solutions $S = ...$

La température est supérieure ou égale à 2 pour les mois compris entre ... inclu et ... ...

ou pour le mois ...

L'inéquation $f(x) \geq 2$ a pour ensemble de solutions $S = ...$

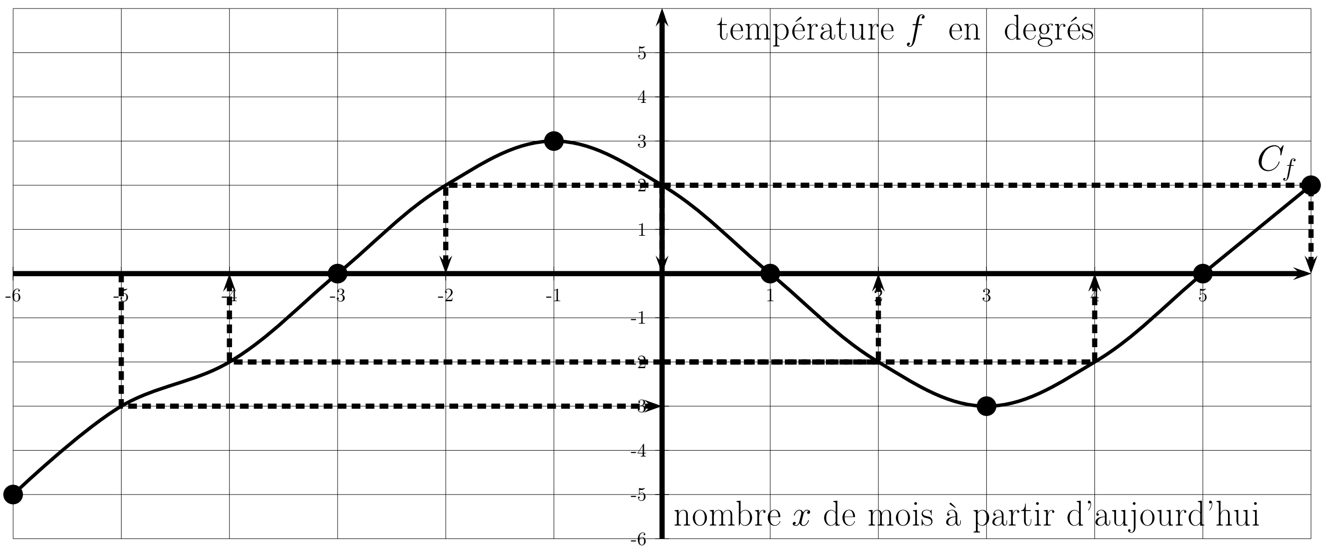
La température est strictement inférieure à -2 pour les mois compris ...

ou ...

L'inéquation $f(x)... \ -2$ a pour ensemble de solutions $S = ...$

1.4.2 corrigé activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant les fonctions

Activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant les fonctions



1. La courbe notée C_f est celle de la fonction température notée f

   en fonction de la variable nombre de mois notée x

2. cette fonction est définie pour un nombre de mois compris entre - 6 et 6

   c'est à dire sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ ou encore pour $x \in [-6\ ;\ 6]$

   cet intervalle a pour *bornes*, -6 et 6 qui sont toutes deux *incluses*

   on dit aussi que l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ est le domaine de définition de f noté D_f

3. graphiquement, on peut lire qu'il y a 5 mois il faisait -3 degrés soit $f(-5) = -3$

   -5 a pour image -3 par la fonction f et on note aussi : $f : -5 \mapsto -3$

4. les 2 degrés sont atteints pour les mois $-2; 0$ et 6

   soit $f(x) = 2$ pour $x = -2$ ou $x = 0$ ou $x = 6$

   2 a pour antécédents -2, 0 et 6 par la fonction f

5. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de valeurs ci dessous

valeur de x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
valeur de $f(x)$	-5	-2	0	2	3	2	0	-2	-3	-2	0	2

6. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de signes ci dessous

valeur de x	-6		-3		1		5		6
signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

la température est nulle pour les mois -3 ; 1 et 5

la température est négative strict entre les mois -6 inclu et -3 exclu
ou entre les mois 1 exclu et 5 exclu
la température est positive strict entre les mois -3 exclu et 1 exclu
ou entre les mois 5 exclu et 6 inclu

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } \boxed{x \in \{-3; 1; 5\}} \\ f(x) < 0 \text{ pour } \boxed{x \in \ [-6\ ;\ -3[\ \cup\ ]1\ ;\ 5[} \\ f(x) > 0 \text{ pour } \boxed{x \in\ ]-3\ ;\ 1[\ \cup\ ]5\ ;\ 6]} \end{cases}$$

7. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de $\boxed{\text{variations}}$ ci dessous

valeur de x	-6		-1		3		6
variations de $f(x)$			3				2
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-5				-3		

$$\begin{cases} \text{la température est croissante entre les mois } \boxed{-6 \text{ et } -1 \text{ inclus}} \\ \text{la température est décroissante entre les mois } \boxed{-1 \text{ et } 3 \text{ inclus}} \\ \text{la température } \boxed{\textit{croissante}} \text{ entre les mois } \boxed{3 \text{ et } 6 \text{ inclus}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\ \boxed{\text{croît}} \text{ pour } \boxed{x \in [-6\ ;\ -1]} \\ f\ \boxed{\text{décroît}} \text{ pour } \boxed{x \in [-1\ ;\ 3]} \\ f\ \boxed{\text{croît}} \text{ pour } \boxed{x \in [3\ ;\ 6]} \end{cases}$$

8. à l'aide du graphique, on peut trouver les $\boxed{\text{extremums}}$

   la température maximale vaut $\boxed{3}$ degrés pour le mois $\boxed{\text{-1}}$

   la température minimale vaut $\boxed{\text{-5}}$ degrés pour le mois $\boxed{\text{-6}}$

   la fonction f admet un maximum qui vaut $\boxed{3}$ pour $\boxed{x = -1}$

   la fonction f admet un minimum qui vaut $\boxed{\text{-5}}$ pour $\boxed{x = -6}$

9. à l'aide du graphique on peut dire que :

   la température est égale à 2 pour les mois $\boxed{-2; 0 \text{ et } 6}$

   l'équation $f(x) = 2$ a pour ensemble de solutions $\boxed{S = \{-2\ ;\ 0\ ;\ 6\}}$

   la température est égale à -2 pour les mois $\boxed{-4; 2 \text{ et } 4}$

   l'équation $f(x) = -2$ a pour ensemble de solutions $\boxed{S = \{-4\ ;\ 2\ ;\ 4\}}$

   la température est supérieure ou égale à 2 pour les mois $\boxed{\text{compris entre -2 inclu et 0 inclu}}$ ou $\boxed{\text{pour le mois 6}}$

   l'inéquation $f(x) \geq 2$ a pour ensemble de solutions $\boxed{S = [-2\ ;\ 0]\ \cup\ \{6\}}$

   la température est strictement inférieure à -2 pour les mois $\boxed{\text{compris entre -6 inclu et -4 exclu}}$ ou entre les mois $\boxed{\text{compris entre 2 exclu et 4 exclu}}$

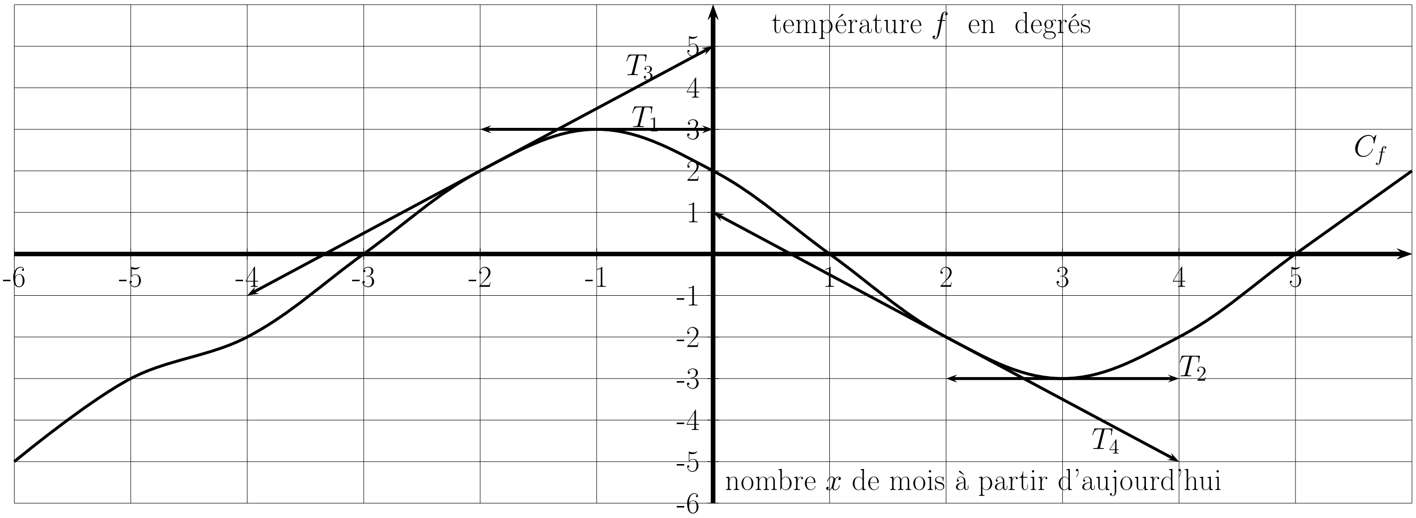
   l'inéquation $f(x) < -2$ a pour ensemble de solutions $\boxed{S = [-6\ ;\ -4[\cup]2\ ;\ 4[}$

1.4.3 Activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant la dérivation des fonctions

$f'(x)$ - Pente d'une Courbe - Signe de $f'(x)$ - Sens de Variation de f

• On dispose de la courbe de l'évolution de la température en un lieux donné sur une période d'un an

Tous les tracés utilisés pour répondre aux questions seront visibles sur le graphique



1. en $x = ...$, la droite tangente T_1 est Ho... donc sa Pe... est N...

   donc $f'(-1) = ...$ de plus, T_1 coupe l'axe des ordonnées en $y = ...$

   donc son ordonnée à l'origine vaut $b = ...$ et l'équation de cette droite est $y = ...$

2. en $x = ...$, la droite tangente T_2 est ... donc sa ... est ...

   donc $f'(... \quad) = ...$ de plus son ordonnée à l'origine vaut $b = ...$

   donc l'équation de cette droite est $y = ...$

3. par calcul, la droite tangente T_3 a une Pe... égale à $f'(-2) = ...$

   donc $f'(-2) = ...$ de plus son ordonnée à l'origine vaut $b = ...$

   donc l'équation de cette droite est $y = ...$

4. par calcul, la droite tangente T_4 a une ... égale à $f'(... \quad) = ...$

   donc $f'(... \quad) = ...$ de plus son ordonnée à l'origine vaut $b = ...$

   donc l'équation de cette droite est $y = ...$

5. • Pour x compris entre ... inclu et ... exclu, la pente de la tangente est P... S...

   et la fonction est S... C...

   • Pour x compris entre ... ... et ... ... , la pente de la tangente est ... ...

   et la fonction est ... ...

   • Pour x compris entre ... ... et ... ... , la pente de la tangente est ... ...

   et la fonction est ... ...

   • Pour $x = -1$ et $x = ...$ la pente de la tangente est ... et change de signe, on se trouve, à un E... Local. *(M... pour $x = -1$ et M... pour $x = ...$)*

6. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de S... de $f'(x)$ ci dessous.

Valeur de x	
Signe de $f'(x)$	

$f'(x) > 0$ pour $x \in [...$ et la fonction f est ... sur $[...$

$f'(x) < 0$ pour $x \in]...$ et la fonction f est ... sur $]...$

$f'(x) > 0$ pour $x \in]...$ et la fonction f est ... sur $]...$

$f'(x) = 0$ pour $x \in \{...$ et change de signe, ce qui pour f, correspond à des ...

7. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de ... complet ci dessous

Valeur de x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de $f(x)$	

Maximum = ... pour $x =$

Minimum = ... pour $x =$

8. Bilan

(a) Pour connaître les V... de la fonction f,

il suffit de connaître le S... de la fonction ...

(b) Si la fonction ... est positive Alors la fonction ...

(c) Si la fonction ... est ... Alors la fonction ...

(d) Si la fonction ... est ... et change de ... Alors la fonction ... est à un ...

9. Application

On dispose des information suivantes sur une fonction f : f est définie pour $x \in [-8; 8]$

$f(-8) = 0$; $f(-3) = -4$; $f(0) = -1$; $f(1) = 0$; $f(3) = 4$; $f(4) = 0$; $f(6) = -5$; $f(7) = 0$; $f(8) = 5$

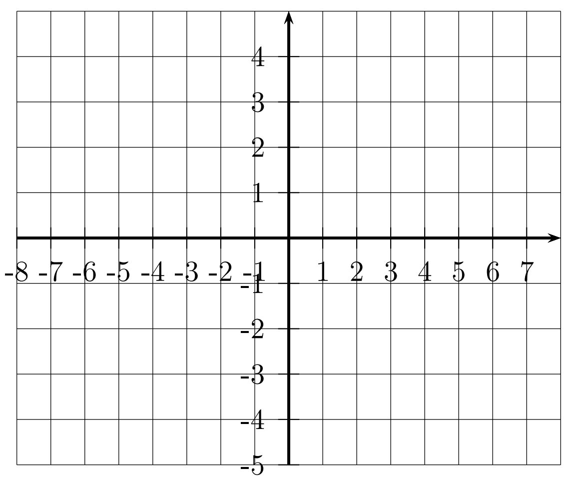
f est strictement décroissante sur $[-8; -3]$; $f'(-3) = 0$; $f'(x) > 0$ sur $[-3; 3]$; $f'(3) = 0$;

f décroît strictement pour $3 < x < 6$; $f'(6) = 0$; $f'(x) \geq 0$ sur $[6; 8]$; $f'(8) = 0$

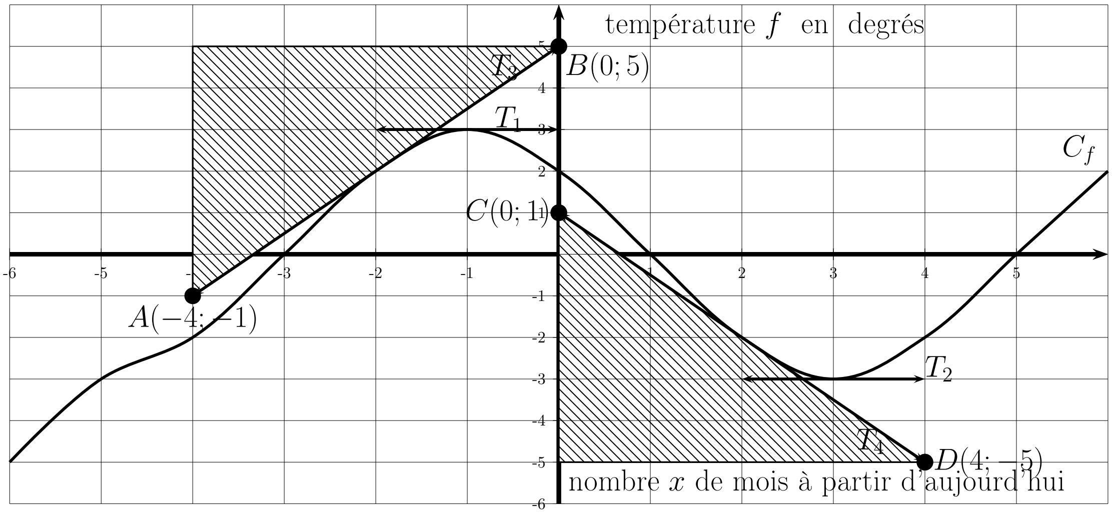
(a) Compléter le tableau ci dessous

Valeur de x	... ...
Signe de $f'(x)$	... ...
Variations de f	... ... 5 ... ...

(b) Construire ci dessous une courbe de f en cohérence avec le tableau



1.4.4 corrigé activité bilan sur le vocabulaire et les notations usuelles concernant la dérivation des fonctions



1. en $\boxed{x=-1}$, la droite tangente T_1 est $\boxed{\text{horizontale}}$ donc sa $\boxed{\text{pente}}$ est $\boxed{\text{nulle}}$

   donc $\boxed{f'(-1)=0}$ de plus, T_1 coupe l'axe des ordonnées en $\boxed{y=3}$

   son ordonnée à l'origine vaut $\boxed{b=3}$ et l'équation de cette droite est $y=ax=b=\boxed{0x+3}$

2. en $\boxed{x=3}$, la droite tangente T_2 est $\boxed{\text{horizontale}}$ donc sa $\boxed{\text{pente}}$ est $\boxed{\text{nulle}}$

   donc $\boxed{f'(3)=0}$ de plus son ordonnée à l'origine vaut *(sur graphique)* $\boxed{b=-3}$

   donc l'équation de cette droite est $\boxed{y=0x-3}$

3. par calcul, la droite tangente T_3 a une $\boxed{\text{pente}}$ égale à $\boxed{\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{5-(-1)}{0-(-4)}=\dfrac{6}{4}=1,5}$ avec $A(-4;-1)$ et $B(0;5)$

   donc $\boxed{f'(-2)=1,5}$ de plus son ordonnée à l'origine vaut $\boxed{b=5}$

   donc l'équation de cette droite est $\boxed{y=1,5x+5}$

4. par calcul, la droite tangente T_4 a une $\boxed{\text{pente}}$ égale à $\boxed{\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{-5-1}{4-0}=\dfrac{-6}{4}=-1,5}$ avec $C(0;1)$ et $D(4;-5)$

   donc $\boxed{f'(2)=-1,5}$ de plus son ordonnée à l'origine vaut $\boxed{b=1}$

   donc l'équation de cette droite est $\boxed{y=-1,5x+1}$

5. • Pour x compris entre $\boxed{-6}$ inclu et $\boxed{-1}$ exclu, la pente de la tangente est $\boxed{\text{Positive Stricte}}$

   et la fonction est $\boxed{\text{Strictement Croissante}}$

   • Pour x compris entre $\boxed{\text{-1 exclu}}$ et $\boxed{\text{3 inclu}}$, la pente de la tangente est $\boxed{\text{strictement négative}}$

   et la fonction est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$

   • Pour x compris entre $\boxed{\text{3 exclu}}$ et $\boxed{\text{6 inclu}}$, la pente de la tangente est $\boxed{\text{positive stricte}}$

   et la fonction est $\boxed{\text{strictement croissante}}$

   • Pour $x=-1$ et $\boxed{x=3}$ la pente de la tangente est $\boxed{\text{nulle}}$ et change de signe, on se

   trouve, à un $\boxed{\text{Extremum}}$ Local. *($\boxed{\textit{Maximum}}$ pour $x=-1$ et $\boxed{\textit{Minimum}}$ pour $x=3$)*

6. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de $\boxed{\textit{signes}}$ ci dessous

valeur de x	-6		-1		3		6
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ pour } \boxed{x\in[-6\ ;\ -1[} \text{ et la fonction } f \text{ est } \boxed{\text{strictement croissante}} \text{ sur } \boxed{[-6\ ;\ -1[} \\ f'(x)<0 \text{ pour } \boxed{x\in]-1\ ;\ 3[} \text{ et la fonction } f \text{ est } \boxed{\text{strictement décroissante}} \text{ sur } \boxed{]-1\ ;\ 3[} \\ f'(x)>0 \text{ pour } \boxed{x\in]3\ ;\ 6]} \text{ et la fonction } f \text{ est } \boxed{\text{strictement croissante}} \text{ sur } \boxed{]3\ ;\ 6]} \\ f'(x)=0 \text{ pour } \boxed{x\in\{-1;3\}} \text{ et change de signe, ce qui pour } f\text{, correspond à des } \boxed{\text{Extremums}} \end{cases}$$

7. à l'aide du graphique, on peut compléter le tableau de $\boxed{\text{variations}}$ complet ci dessous

valeur de x	-6		-1		3		6
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
variations de $f(x)$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

$$\begin{cases} \text{Maximum} = \boxed{3} \quad \text{pour } \boxed{x=-1} \\ \text{Minimum} = \boxed{-5} \quad \text{pour } \boxed{x=-6} \end{cases}$$

8. Bilan
   (a) Pour connaître les $\boxed{\text{Variations}}$ de la fonction f,

   il suffit de connaître le $\boxed{\text{Signe}}$ de la fonction $\boxed{f'}$

   (b) Si la fonction $\boxed{f'}$ est positive Alors la fonction $\boxed{f \text{ croît}}$

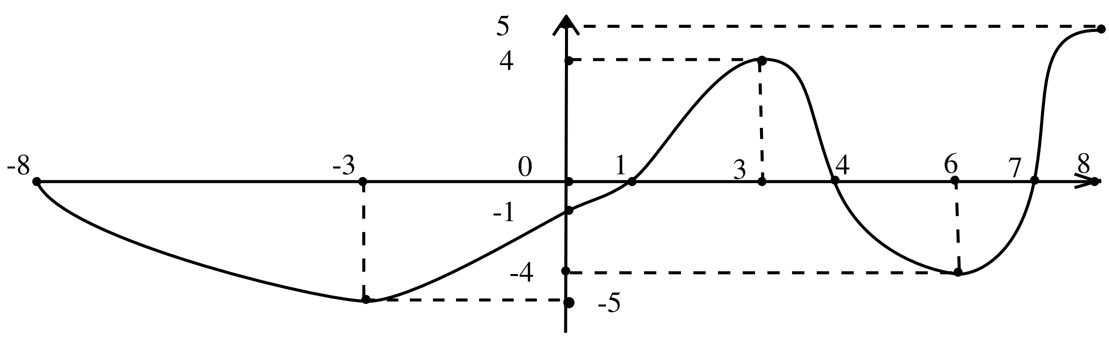
   (c) Si la fonction $\boxed{f'}$ est négative Alors la fonction $\boxed{f \text{ décroît}}$

   (d) Si la fonction $\boxed{f'}$ est nulle et change de signe Alors la fonction $\boxed{f}$ est à un $\boxed{\text{Extremum}}$

9. Application
   On dispose des information suivantes sur une fonction f : f est définie pour $x\in[-8;8]$
   $f(-8)=0$; $f(-3)=-5$; $f(0)=-1$; $f(1)=0$; $f(3)=4$; $f(4)=0$; $f(6)=-4$; $f(7)=0$; $f(8)=5$
   f est strictement décroissante sur $[-8;-3]$; $f'(-3)=0$; $f'(x)>0$ sur $[-3;3]$; $f'(3)=0$;
   f décroît strictement pour $3<x<6$; $f'(6)=0$; $f'(x)\geq 0$ sur $[6;8]$; $f'(8)=0$
   (a) Compléter le tableau ci dessous

valeur de x	-8		-3		3		6		8
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	0
variations de $f(x)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

   (b) Construire ci dessous une courbe de f
   en cohérence avec le tableau



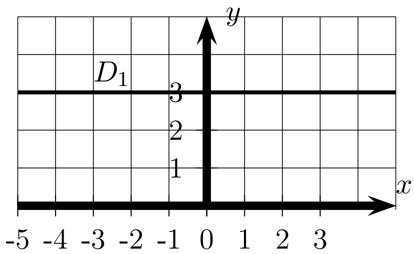
2 "coefficient directeur" ou "pente" "d'une courbe de fonction" en un point

2.1 activités *(ggb)*

$$\boxed{pente \;= a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

1. Activité 1 : *(cas des fonctions affines : $f(x) = ax + b$)*

   on dispose des courbes partielles D_1, D_2 et D_3 des fonctions affines f_1, f_2 et f_3



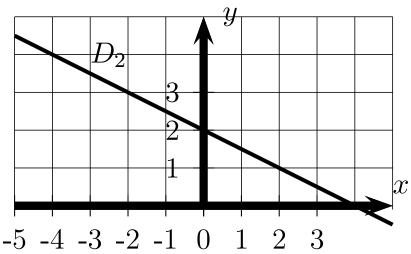
coefficient directeur de D_1 :

avec $A(...\ ;\ ...)$ et $B(...\ ;\ ...)$

$a = ...$

sens de variation de f_1 :

f_1 est ...



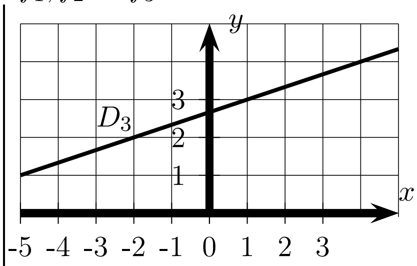
coefficient directeur de D_2 :

avec $A(...\ ;\ ...)$ et $B(...\ ;\ ...)$

$a = ...$

sens de variation de f_2 :

f_2 est ...



coefficient directeur de D_3 :

avec $A(...\ ;\ ...)$ et $B(...\ ;\ ...)$

$a = ...$

sens de variation de f_3 :

f_3 est ...

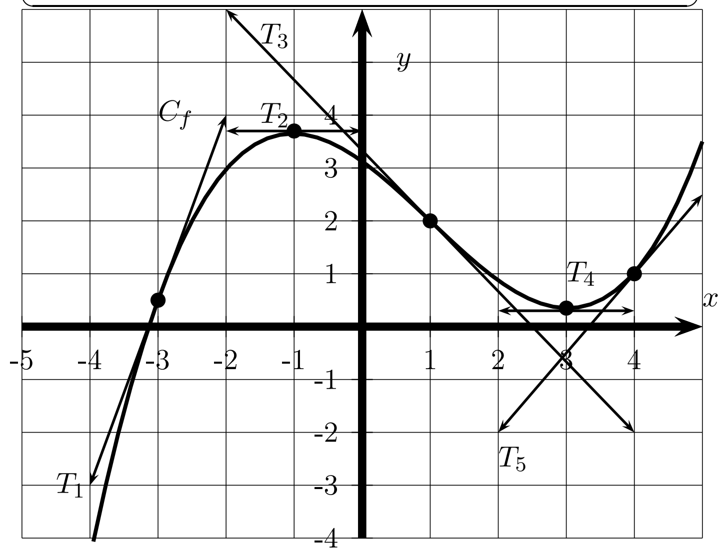
bilan : $\begin{cases} \text{si } a = 0 \text{ alors } f \text{ est ...} \\ \text{si } a < 0 \text{ alors } f \text{ est ...} \\ \text{si } a > 0 \text{ alors } f \text{ est ...} \end{cases}$

le ... de la fonction affine est complétement déterminé par le ... de la droite représentative de la ...

2. Activité 2 : *(cas d'une fonction quelconque) ("dérivable")*

   $f'(x_0)$ est, s'il existe, le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0
   Ci contre, sont représentées les droites tangentes à la courbe C_f de f
   en $x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$ et $x_5 = 4$

$\boxed{pente\ en\ x_0 = f'(x_0) =\ pente\ de\ la\ tangente\ en\ x_0}$



$f'(-3) =$ coefficient directeur de T_1

$f'(-3) = ...$

$f'(-1) =$ coefficient directeur de ...

$f'(-1) = ...$

$f'(1) =$ coefficient directeur de ...

$f'(1) = ...$

$f'(3) =$ coefficient directeur de ...

$f'(3) = ...$

$f'(4) =$ coefficient directeur de ...

$f'(4) = ...$

valeur de x	
signe de $f'(x)$	
variations de $f(x)$	

$f'(x) > ...$ sur [... ; ...]
$\Longleftrightarrow f$ ...

$f'(x) < ...$ sur ...
$\Longleftrightarrow f$ ...

$f'(x) = 0$ et *change de signe* en ...
$\Longleftrightarrow f$

• déterminer les équations des droites tangentes $T_1,\ T_2,\ T_3,$ et T_4

Activité 3 : *(nombre dérivé taux de variation)*

1. représenter la fonction carré avec géogébra $f(x) = x^2$ et afficher la grille
2. construire deux curseurs "a" et "b"
3. construire le point $M = (a, f(a))$ sur la parabole
4. construire en rouge,la droite (T) tangente à la courbe de f au point M
5. régler la valeur de a à 1, afficher la pente de la droite (T), que vaut alors cette pente ? : $f'(1) = ...$
6. déterminer grace au curseur les valeurs de : $f'(2) = ...$ $f'(0) = ...$ $f'(-1) = ...$ $f'(-2) = ...$
   essayer de conjecturer une formule qui donne $f'(x)$ quand on connaît x : $f'(x) = ...$
7. régler $a = 1$ puis construire le point $A = (a + b, f(a + b))$ sur la parabole
8. construire la droite (AM) en vert et afficher sa pente
9. que se passe t-il pour le point A lorque b tend vers 0 ? : ...
10. que se passe t-il pour la droite (AM) lorque b tend vers 0 ? : ...
11. que se passe t-il pour la pente de la droite (AM) lorque b tend vers 0 ? : ...
12. montrer que le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + b$ donné par $t = \dfrac{f(1 + b) - f(1)}{b}$ est égal à $2 + b$
13. en déduire la valeur de $\lim\limits_{b \to 0} \dfrac{f(1 + b) - f(1)}{b} = ...$

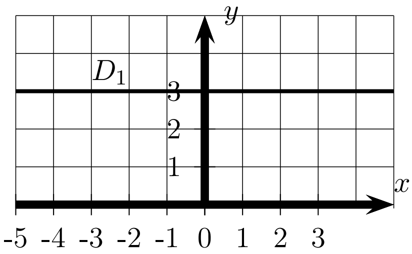
    retrouve t-on $f'(1)$? : ...
14. montrer que $t = \dfrac{f(x + b) - f(x)}{b}$ est égal à $2x + b$
15. en déduire $\lim\limits_{b \to 0} \dfrac{f(x + b) - f(x)}{b} = ...$

    retrouve t-on $f'(x)$? : ...

2.2 corrigé activité

1. cas des fonctions affines

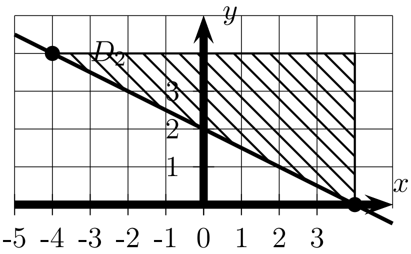
on dispose des courbes partielles D_1, D_2 et D_3 des fonctions affines f_1, f_2 et f_3



coefficient directeur de D_1 :

$\boxed{a = 0}$ car D_1 est horizontale

sens de variation de f_1 :
f_1 est $\boxed{\text{constante}}$

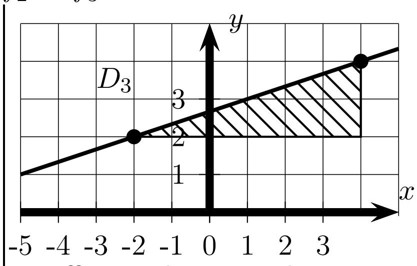


coefficient directeur de D_2 :

avec $A(-4;\ 4)$ et $B(4\ ;\ 0)$

$\boxed{a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \dfrac{0-4}{4-(-4)} = \boxed{-0,5}$

sens de variation de f_2 :
f_2 est $\boxed{\text{décroissante}}$



coefficient directeur de D_3 :

avec $A(-2\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ 4)$

$a = \dfrac{4-2}{4-(-2)} = \dfrac{2}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

sens de variation de f_3 :
f_3 est $\boxed{\text{croissante}}$

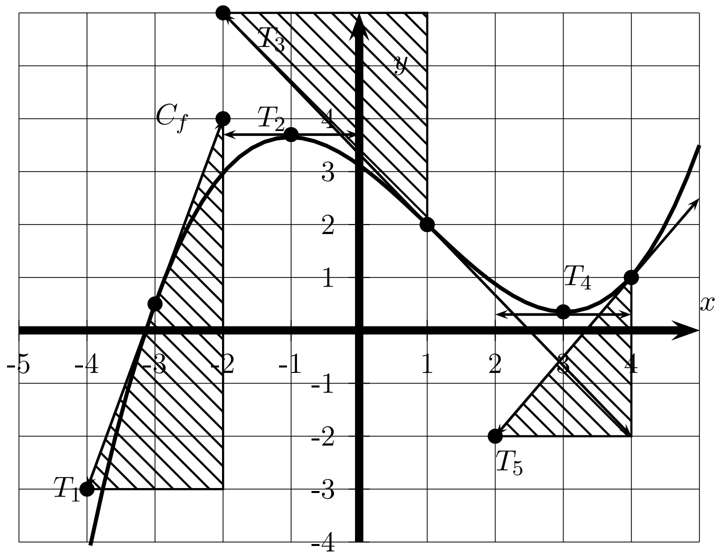
bilan : $\begin{cases} \text{si } \boxed{a = 0} \text{ alors } f \text{ est } \boxed{\text{constante}} \\ \text{si } \boxed{a < 0} \text{ alors } f \text{ est } \boxed{\text{décroissante}} \\ \text{si } \boxed{a > 0} \text{ alors } f \text{ est } \boxed{\text{croissante}} \end{cases}$

le $\boxed{\text{sens de variation}}$ de la fonction affine est complétement déterminé par le

$\boxed{\text{signe du coefficient directeur}}$ de la droite représentative de la $\boxed{\text{fonction affine}}$

2. cas d'une fonction quelconque *("dérivable")*

$f'(x_0)$ est, s'il existe, le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = x_0$. Ci contre sont représentées les droites tangentes à la courbe C_f de f
en $x_0 = -3,\ x_0 = -1,\ x_0 = 1,\ x_0 = 3$ et $x_0 = 4$



$f'(-3) =$ coefficient directeur de T_1

$\begin{cases} A(-4;\ -3) \\ B(-2;\ 4) \end{cases}$ $\boxed{f'(-3) = \dfrac{4-(-3)}{-2-(-4)} = 3,5}$

(350%)

$f'(-1) =$ coefficient directeur de T_2

$\boxed{f'(-1) = 0 \text{ car } T_2 \text{ est horizontale}}$

$f'(1) =$ coefficient directeur de T_3

$\begin{cases} C(-2;\ 6) \\ D(1;\ 2) \end{cases}$ $\boxed{f'(1) = \dfrac{2-6}{1-(-2)} = -\dfrac{4}{3}}$ ($\simeq$ -133%)

$f'(3) =$ coefficient directeur de T_4

$\boxed{f'(3) = 0 \text{ car } T_4 \text{ est horizontale}}$

$f'(4) =$ coefficient directeur de T_5

$\begin{cases} E(2;\ -2) \\ F(4;\ 1) \end{cases}$ $f'(4) = \dfrac{1-(-2)}{4-2} = \boxed{1,5}$ (150%)

valeur de x	-4		-1		3		5
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
variations de $f(x)$			3,8				3,5
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-4				0,25		

$\boxed{f'(x) > 0}$ sur $[-4;\ -1]$
$\iff f$ $\boxed{\text{croît}}$

$\boxed{f'(x) < 0}$ sur $[-1;\ 3]$
$\iff f$ $\boxed{\text{décroît}}$

$\boxed{f'(x) = 0}$ en -1 et 3
$\iff f$ $\boxed{\text{constante}}$

- déterminer les équations des droites tangentes $T_1,\ T_2,\ T_3,$ et T_4

(a) pour la tangente T_1 en $x_0 = -3$: $\begin{cases} T_1 \text{ a une équation de la forme } y = ax + b \\ T_1 \text{ a pour coefficient directeur } f'(-3) = \dfrac{7}{2} \\ T_1 \text{ passe par le point de coordonnées } A(-3; \dfrac{1}{2}) \end{cases}$

i. détermination de a :

on a directement $a = f'(-3) = \dfrac{7}{2}$

donc $y = \dfrac{7}{2}x + b$

ii. détermination de b :

T_1 passe par le point $A(-3; \dfrac{1}{2})$

donc $y_A = \dfrac{7}{2}x_A + b$

donc $\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} \times (-3) + b$

donc $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{21}{2} + b$

donc $b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{21}{2} = \dfrac{22}{2} = 11$

iii. conclusion

T_1 a pour équation : $\boxed{y = \dfrac{7}{2}x + 11}$

(b) cas général : équation de la tangente T à la courbe de f en x_0

i. détermination de a :

on a directement $a = f'(x_0)$
donc $y = f'(x_0)x + b$

ii. détermination de b :

T passe par le point $A(x_0; f(x_0))$

donc $y_A = f'(x_0) \times x_A + b$

donc $f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + b$

donc $f(x_0) - x_0 f'(x_0) = b$

iii. conclusion

T a pour équation : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$
$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

(c) pour la tangente T_2 en $x_0 = -1$: : $\begin{cases} T_1 \text{ a une équation de la forme } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f'(x_0) = f'(-1) = 0 \\ f(x_0) = f(-1) = 4,8 \end{cases}$

donc $y = 0 \times (x - (-1)) + 4,8$
donc $\boxed{y = 0x + 4,8}$

(d) pour la tangente T_3 en $x_0 = 1$: : $\begin{cases} T_3 \text{ a une équation de la forme } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f'(x_0) = f'(1) = -\dfrac{4}{3} \\ f(x_0) = f(1) = 2 \end{cases}$

donc $y = -\dfrac{4}{3} \times (x - 1) + 2$
donc $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{3} + 2$
donc $\boxed{y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3}}$

(e) pour la tangente T_4 en $x_0 = 3$: : $\begin{cases} T_4 \text{ a une équation de la forme } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f'(x_0) = f'(3) = 0 \\ f(x_0) = f(3) = 0,3 \end{cases}$

donc $y = 0 \times (x - 3) + 0,3$
donc $\boxed{y = 0x + 0,3}$

(f) pour la tangente T_5 en $x_0 = 4$: : $\begin{cases} T_5 \text{ a une équation de la forme } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f'(x_0) = f'(4) = \dfrac{3}{2} \\ f(x_0) = f(4) = 1 \end{cases}$

donc $y = \dfrac{3}{2} \times (x - 4) + 1$
donc $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{12}{2} + 1$
donc $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x - 5}$

2.3 à retenir

Définition 1 : *(nombre dérivé)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$ un nombre

Si la courbe de f admet une droite tangente (AB) non "verticale" au point d'abscisse x_0
Alors

$$\begin{cases} \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } x_0 \text{ noté } \boxed{f'(x_0)} \\ \text{est } \boxed{\text{le coefficient directeur } \textit{(ou pente)} \text{ de la droite } (AB) \text{ tangente à la courbe de } f \text{ en } x_0} \end{cases}$$

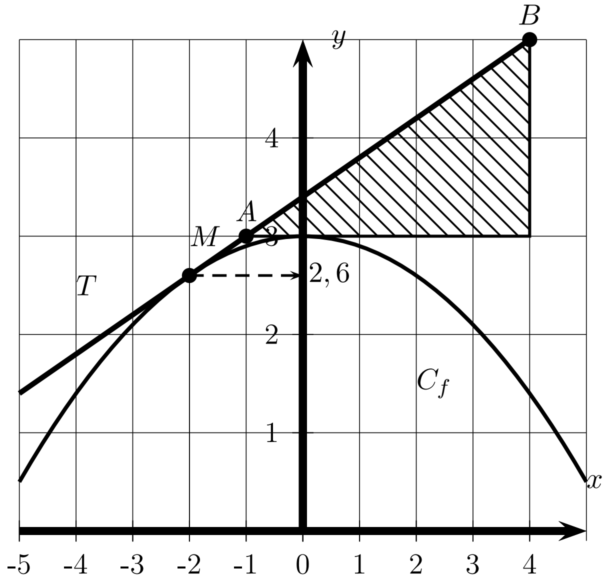
avec $\boxed{f'(x_0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \boxed{\dfrac{DV}{DH}} = \boxed{\dfrac{Dy}{Dx}}$

(DV = déplacement vertical DH = déplacement horizontal)

Remarques et exemple : *(admis si non démontré)*

i. si C_f admet une droite non verticale tangente au point d'abscisse $x = x_0$ on dit que f est *"dérivable en x_0"*
ii. on peut, par abus de langage, dire que $f'(x_0)$ est le *"coefficient directeur de la courbe en x_0"*
iii. Le coefficient directeur est nul $\iff$ la tangente est parallèle à l'axe (ox)
iv. ci contre : avec $A(-1; 3)$ et $B(4; 5)$

$$f'(-2) = \frac{DV}{DH} = \frac{5-3}{4-(-1)} = \frac{2}{5} = 0,4$$



Propriété 1 : *(équation de la tangente)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$ un nombre

Si la fonction f est dérivable en x_0
alors la courbe C_f de f admet une droite tangente T d'équation $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

(admis)

Exemple : pour la droite (AB) ci dessus, tangente à C_f en $x_0 = -2$

l'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $\begin{cases} x_0 = -2 \\ f(x_0) = f(-2) = 2,6 \\ f'(x_0) = f'(-2) = 0,4 \end{cases}$

soit : $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$

donc : $y = 0,4(x + 2) + 2,6$

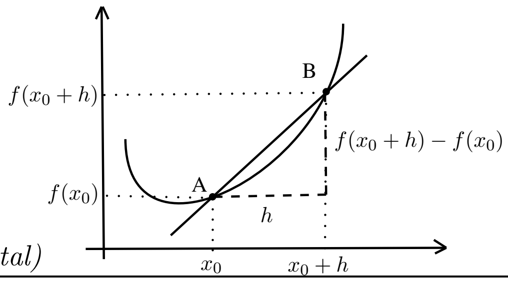
donc : $y = 0,4x + 0,8 + 2,6$

conclusion $y = 0,4x + 3,4$

Définition 2 : *(taux d'accroissement d'une fonction)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$, soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$
le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$
est le nombre $\boxed{t = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} = \boxed{\dfrac{DV}{DH}} = \boxed{\dfrac{Dy}{Dx}}$

(DV = déplacement vertical DH = déplacement horizontal)



remarques :

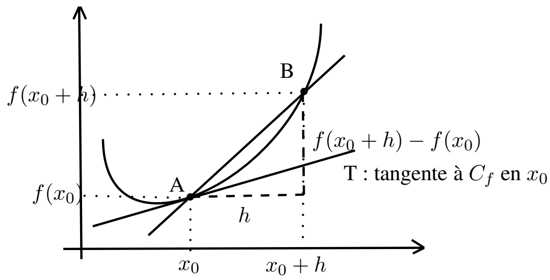
(a) $\boxed{t = \dfrac{variation\ de\ f(x)\ entre\ x_0\ et\ x_0+h}{variation\ de\ x\ entre\ x_0\ et\ x_0+h}}$

(b) $t =$ "coefficient directeur" de la droite (AB) *(voir figure)* ou "pente"

Définition 3 : *(nombre dérivé de f en x_0)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$, soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$

Si le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$
tend vers un nombre L quand h tend vers 0
Alors on dit que f est "dérivable" en x_0
L est appelé le "nombre dérivé" de f en x_0
on note ce nombre : $f'(x_0)$
avec : $\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$

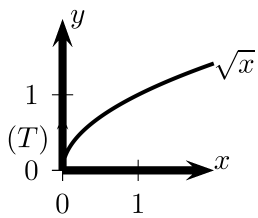


remarques :

(a) si f est dérivable en x_0
lorsque h tend vers 0 on a alors :
$\rightarrow$ B se rapproche de A
$\rightarrow$ la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe de f au point A
$\rightarrow$ le coefficient directeur de la droite (AB) se rapproche du coefficient directeur de la tangente à la courbe de f lorsque h tend vers 0

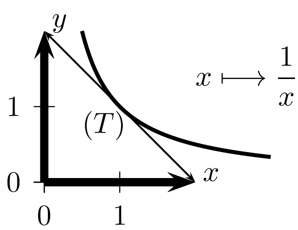
(b) voici un contre exemple *(à démontrer ci dessous)* :
la fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0
car le taux de variation entre 0 et $0 + h$ tend vers l'infinie lorsque h tend vers 0

(la tangente (T) à la courbe est "verticale" en $x_0 = 0$)



exemple :

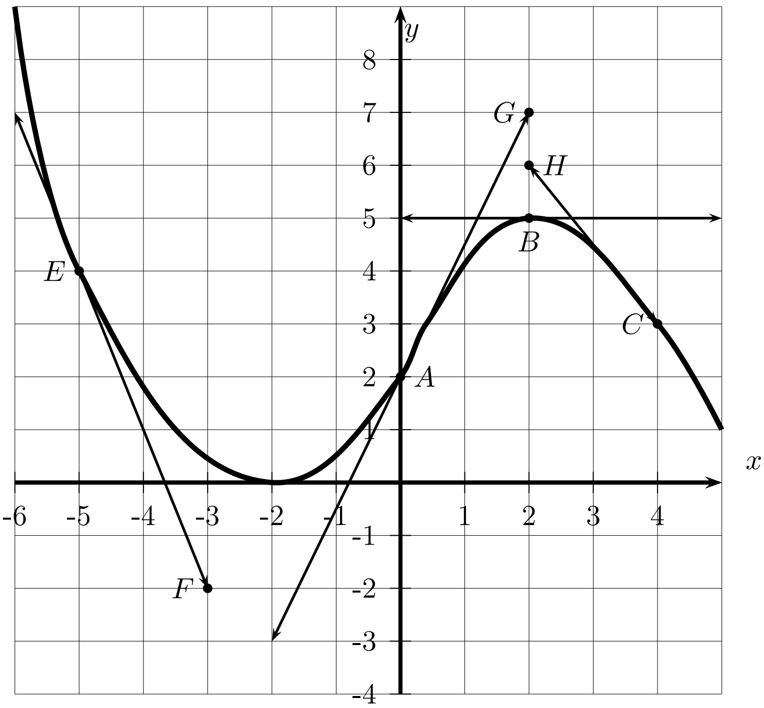
Démontrer à partir de la définition ci dessus que la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en $x_0 = 1$ et que l'on a $f'(1) = -1$ puis donner l'équation de la tangente correspondante et vérifier la cohérence avec le graphique ci contre :



2.4 exercices

Exercice 1 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.
Les tangentes à la courbe en E, A, B et C sont aussi représentées



(a) Lire
   i. $f(4)$ et $f'(4)$
   ii. $f(2)$ et $f'(2)$
   iii. $f(0)$ et $f'(0)$
   iv. $f(-5)$ et $f'(-5)$
   v. $f(-2)$ et $f'(-2)$

(b) donner l'ensemble des solutions de
   i. $f(x) = 0$
   ii. $f'(x) = 0$
   iii. $f(x) > 0$
   iv. $f'(x) > 0$
   v. $f(x) \leq 0$
   vi. $f'(x) \leq 0$

(c) donner le tableau de signes de $f(x)$

(d) donner le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f

(e) donner les équations des tangentes à la courbe

Exercice 2 :

soit la fonction f dont on dispose de la courbe C_f pour $x \in [-3,25\ ;\ 5,25]$

(a) estimer à 0,1 près : $f(-2), f(1)$ et $f(4)$

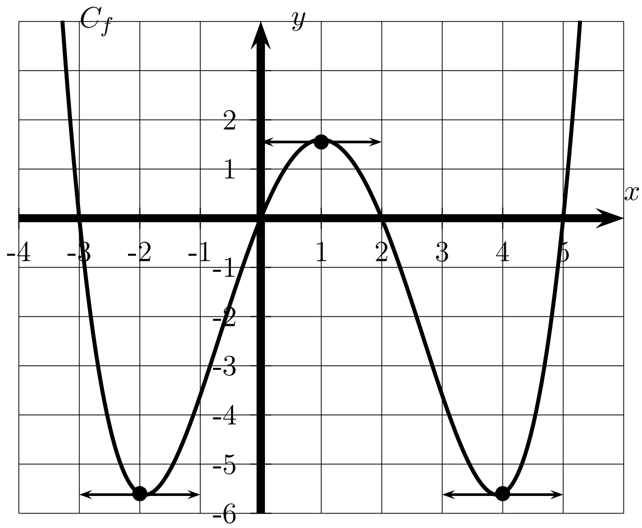
(b) estimer : $f'(-2),\ f'(1)$ et $f'(4)$

(c) donner les signes de :
$f(-1),\ f'(-1),\ f(1,5),\ f'(1,5),\ f(3),\ f'(3)$

(d) donner l'ensemble des solutions de :
   i. $f(x) = 0$
   ii. $f'(x) = 0$
   iii. $f(x) > 0$
   iv. $f'(x) > 0$
   v. $f(x) < 0$
   vi. $f'(x) < 0$

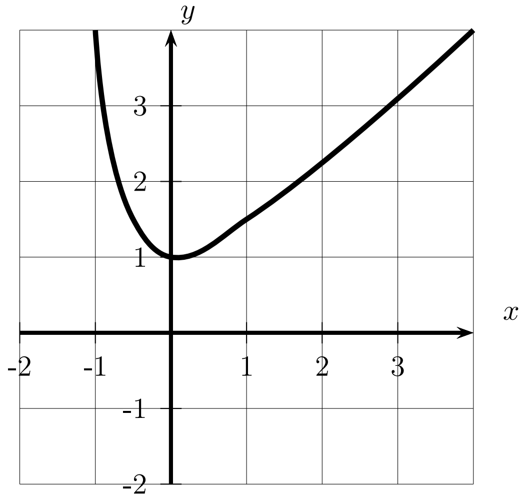
(e) donner le tableau de variations complet de f *(avec le signe de $f'(x)$)*

(f) donner l'équation des tangentes en -2, en 1 et en 4

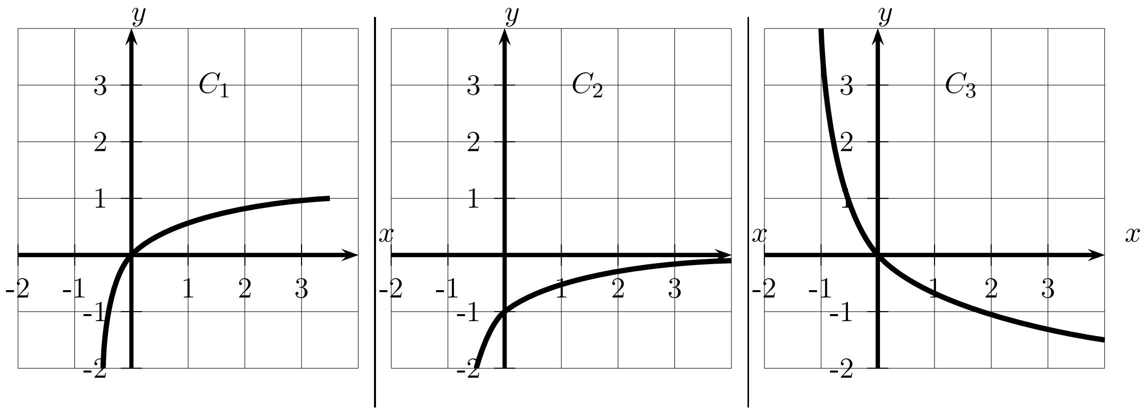


Exercice 3 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.

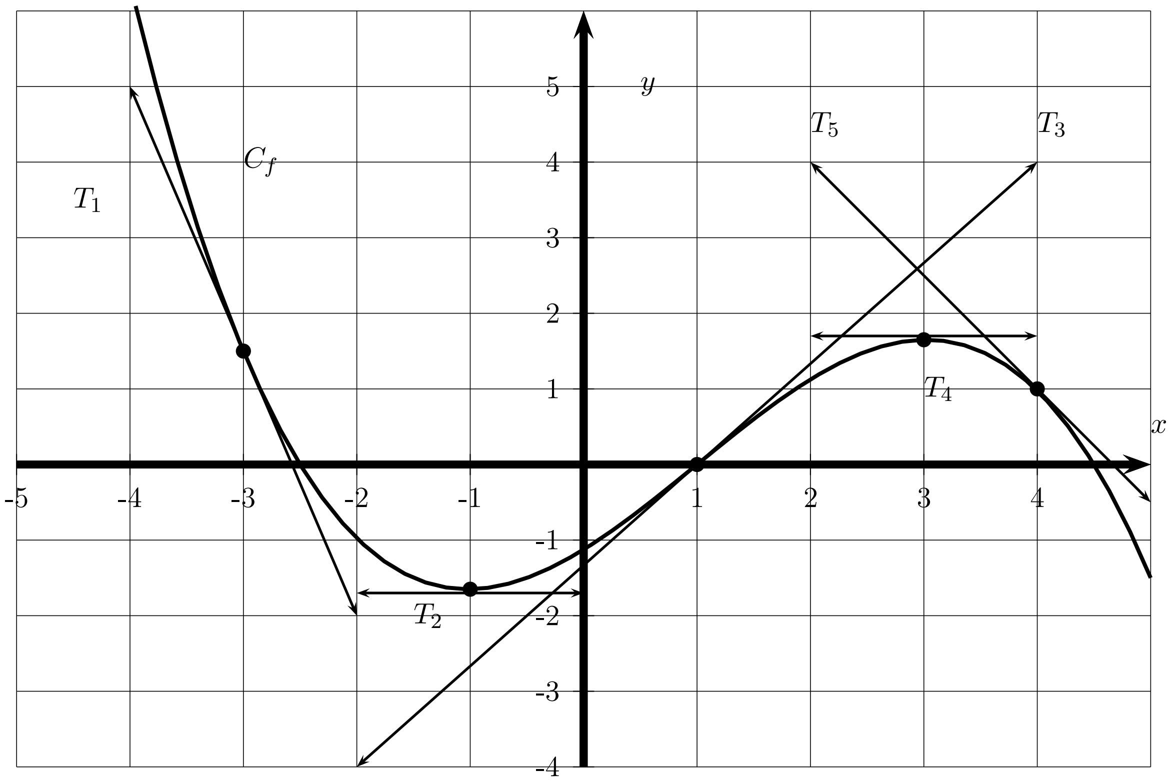


Laquelle des courbes ci dessous est la courbe de f' où f' est la dérivée de la fonction f ? (justifier)



Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $[-4;\ 5]$ dont on dispose de la courbe ci dessous



1. déterminer chacune des valeurs suivantes
   (exacte ou à 0,1 près)
   (a) $f(-3),\ f(-1),\ f(1),\ f(3),\ f(4)$
   (b) $f'(-3),\ f'(-1),\ f'(1),\ f'(3),\ f'(4)$

2. estimer le signe de :

   (a) $f(-3,5),\ f'(-3,5)$
   (b) $f(-2),\ f'(-2)$
   (c) $f(0),\ f'(0)$
   (d) $f(2),\ f'(2)$

3. résoudre les équations

   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f'(x) = 0$
   (c) $f'(x) = \dfrac{4}{3}$

4. résoudre les inéquations

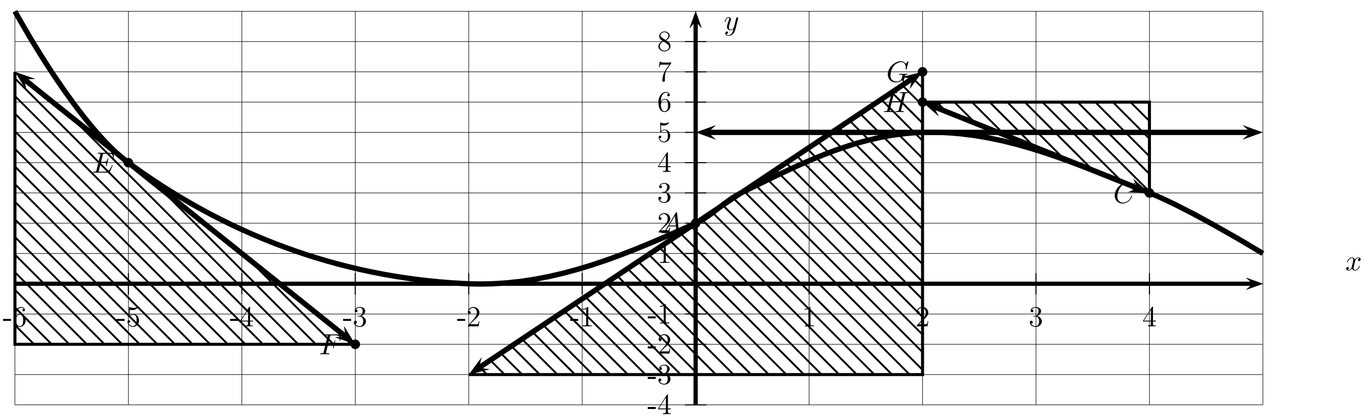
   (a) $f(x) > 0$
   (b) $f'(x) > 0$
   (c) $f(x) \leq 0$
   (d) $f'(x) \leq 0$
   (e) $f'(x) < \dfrac{4}{3}$

5. donner le tableau de signes de $f(x)$
6. donner le tableau de signes de $f'(x)$
7. donner le tableau de variation de f
   (signe de $f'(x)$ compris)
8. déterminer les équations des droites tangentes $T_1,\ T_2$ et T_3

2.5 corrigés exercices

Corrigé exercice 1 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.



(a) Lire

i. $\boxed{f(4)=3}$ $\quad f'(4)=\dfrac{DV}{DH}=\dfrac{3-6}{4-2}=\dfrac{-3}{2}=\boxed{-1,5}$ avec les points $H(2\ ;\ 6)$ et $C(4\ ;\ 3)$.

ii. $\boxed{f(2)=5}$ $\quad \boxed{f'(2)=0}$ car la tangente est horizontale.

iii. $\boxed{f(0)=2}$ $\quad f'(0)=\dfrac{7-2}{2-0}=\dfrac{5}{2}=\boxed{2,5}$ avec les points $A(0\ ;\ 2)$ et $G(2\ ;\ 7)$.

iv. $\boxed{f(-5)=4}$ $\quad f'(-5)=\dfrac{DV}{DH}=\dfrac{-2-4}{-3-(-5)}=\dfrac{-6}{2}=\boxed{-3}$ avec les points $E(-5\ ;\ 4)$ et $F(-3\ ;\ -2)$.

v. $\boxed{f(-2)=0}$ et $\boxed{f'(-2)=0}$ car la $\boxed{\text{tangente est horizontale}}$.

(b) ensemble des solutions

i. $f(x)=0$ $\quad \boxed{S=\{-2\}}$

ii. $f'(x)=0$ $\quad \boxed{S=\{-2;2\}}$

iii. $f(x)>0$ $\quad \boxed{S=[-6;-2[\cup]-2;5]}$

iv. $f'(x)>0$ $\quad \boxed{S=]-2;2[}$

v. $f(x)\leq 0$ $\quad \boxed{S=\{-2\}}$

vi. $f'(x)\leq 0$ $\quad \boxed{S=[-6;-2]\cup[2;5]}$

(c) tableau de signes de $f(x)$

valeur de x	-6		-2		5
signe de $f(x)$		+	0	+	

(d) tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f

valeur de x	-6		-2		2		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	9	↘	0	↗	5	↘	1

(e) équations des tangentes

i. en E :

$y=f'(-5)(x-(-5))+f(-5)$

$y=-3(x+5)+4$

$\boxed{y=-3x-11}$

ii. en A : $\boxed{y=2,5x+2}$

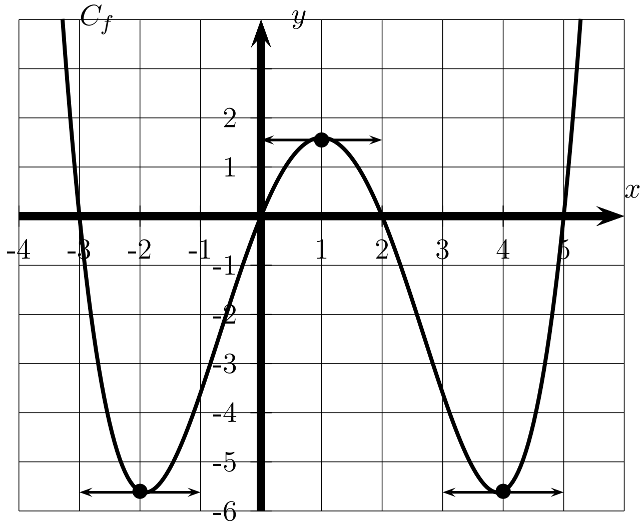
iii. en B : $\boxed{y=5}$

iv. en C : $\boxed{y=-1,5x+9}$

Corrigé exercice 2 :

soit la fonction f dont on dispose de la courbe C_f pour $x \in [-3,25\ ;\ 5,25]$

(a) $\boxed{f(-2) \simeq -5,5}$ $\boxed{f(1) \simeq 1,5}$ $\boxed{f(4) \simeq -5,5}$



(b) $\boxed{f'(-2) = 0}$ $\boxed{f'(1) = 0}$ $\boxed{f'(4) = 0}$
car les tangentes sont horizontales

(c) $\boxed{f(-1) < 0}$ $\boxed{f'(-1) > 0}$ *(f croît)*
$\boxed{f(1,5) > 0}$ $\boxed{f'(1,5) < 0}$ *(f décroît)*
$\boxed{f(3) < 0}$ $\boxed{f'(3) < 0}$ *(f décroît)*

(d) i. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in \{-3;\ 0;\ 2;\ 5\}}$

ii. $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in \{-2;\ 1;\ 4\}}$

iii. $f(x) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in\ [-3,25;\ -3[\ \cup\ ]0;\ 2[\cup]5;\ 5,25]}$

iv. $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in]-2;\ 1[\ \cup\ ]4;\ 5,25]}$

v. $f(x) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in]-3;\ 0[\ \cup\ ]2;\ 5[}$

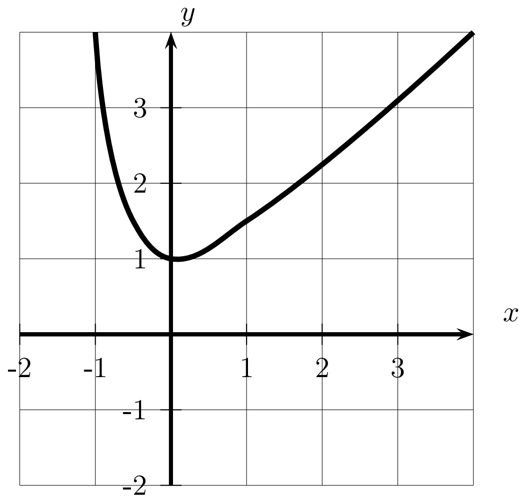
vi. $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in [-3,25;\ -2[\ \cup\ ]1;\ 4[}$

(e)

valeur de x	-3,25		-2		1		4		5,25
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
variations de $f(x)$	4	↘	-5,5	↗	1,5	↘	-5,5	↗	4

Corrigé exercice 3 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.

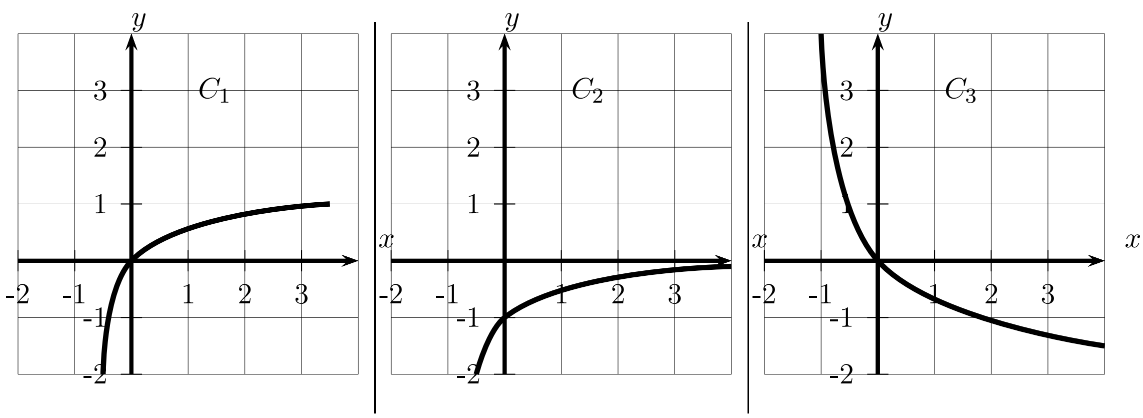


Seule C_1 peut-être la courbe de f'

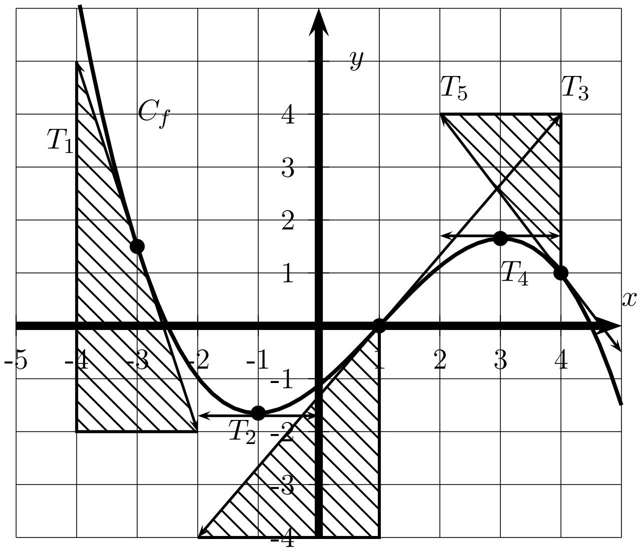
En effet :

D'après la courbe de f, $f'(x)$ s'annule pour $x = 0$ (tangente horizontale en x = 0) donc $f'(0) = 0$ donc C_2 ne convient pas.

De plus, d'après la courbe de f, $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ donc C_3 ne convient pas.



Corrigé exercice 4 :



1.
   (a) $\boxed{f(-3) \simeq 1,5}$ $\boxed{f(-1) \simeq -1,8}$
   $\boxed{f(1) = 0}$ $\boxed{f(3) \simeq 1,8}$ $\boxed{f(4) = 1}$

   (b) $f'(-3) = \dfrac{DV}{DH} = \dfrac{-2-5}{-2-(-4)} = \dfrac{-7}{2} = \boxed{-3,5}$
   avec $A(-2\ ;\ -2)$ et $B(-4\ ;\ 5)$

   $f'(-1) = \boxed{0}$ car la $\boxed{\text{tangente } T_2 \text{ est horizontale}}$

   $f'(1) = \dfrac{DV}{DH} = \dfrac{0-(-4)}{1-(-2)} = \dfrac{4}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$
   avec $C(-2\ ;\ -4)$ et $D(1\ ;\ 0)$

   $f'(3) = \boxed{0}$ car la $\boxed{\text{tangente } T_4 \text{ est horizontale}}$

   $f'(4) = \dfrac{DV}{DH} = \dfrac{1-4}{4-2} = \dfrac{-3}{2} = \boxed{-1,5}$
   avec $E(2\ ;\ 4)$ et $F(4\ ;\ 1)$

2. (a) $\boxed{f(-3,5) > 0}$ $\boxed{f'(-3,5) < 0}$ (c) $\boxed{f(0) < 0}$ $\boxed{f'(0) > 0}$
   (b) $\boxed{f(-2) < 0}$ $\boxed{f'(-2) < 0}$ (d) $\boxed{f(2) > 0}$ $\boxed{f'(2) > 0}$

3. (a) $f(x) = 0$ pour $\boxed{x \in \{-2,5; 1; 4,5\}}$ (c) $f'(x) = \dfrac{4}{3}$ pour $\boxed{x \in \{1\}}$
   (b) $f'(x) = 0$ pour $\boxed{x \in \{-1; 3\}}$

4. (a) $f(x) > 0$ pour $\boxed{x \in [-4; -2,5[\cup]1; 4,5[}$ (d) $f'(x) \leq 0$ pour $\boxed{x \in [-4; -1] \cup [3; 5]}$
   (b) $f'(x) > 0$ pour $\boxed{x \in]-1; 3[}$
   (c) $f(x) \leq 0$ pour $\boxed{x \in [-2,5; 1] \cup [4,5; 5]}$ (e) $f'(x) < \dfrac{4}{3}$ pour $\boxed{x \in [-4; 1[\cup]1; 5]}$

5. tableau de signes de $f(x)$

valeur de x	-4		-2,5		1		4,5		5
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

6. tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	-4		-1		3		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	

7. tableau de variation de f

valeur de x	-4		-1		3		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	6	↘	-1,8	↗	1,8	↘	-1,6

8. • pour la tangente T_1, l'équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $\begin{cases} x_0 = -3 \\ f(x_0) = f(-3) \simeq 1,5 \\ f'(x_0) = f'(-3) = -3,5 \end{cases}$

   soit : $y = f'(-3)(x-(-3)) + f(-3)$ donc : $y = -3,5(x+3) + 1,5$ donc : $y = -3,5x - 10,5 + 1,5$
   conclusion $\boxed{y = -3,5x - 9}$

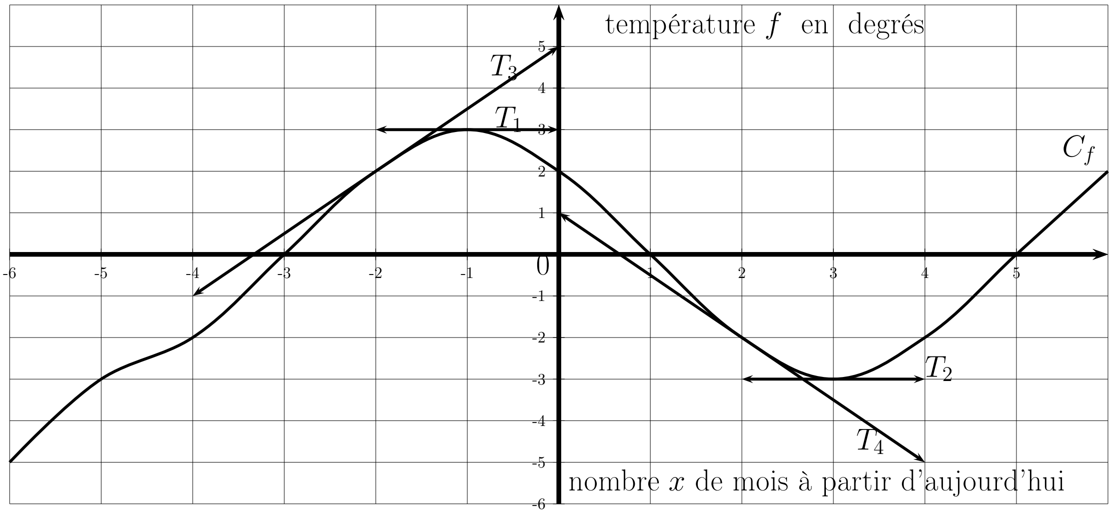
   • pour T_2, l'équation est $\boxed{y = 0x - 1,6}$ • pour T_4, l'équation est $\boxed{y = 0x + 1,8}$

   • pour T_3, l'équation est $\boxed{y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}}$ • pour T_5, l'équation est $\boxed{y = -1,5x + 7}$

2.6 évaluation

évaluation : Lecture graphique et dérivation

Nom :



— Vocabulaire et notations *(Compléter ci dessous par des mots ou des notations Mathématiques)*

1. T_1, T_2, T_3 *et* T_4 représentent des ... à la courbe notée ... de la fonction f
2. $f'(-2)$ est la ... *(ou encore le ... ...)* de la tangente à la courbe au point d' ... $x = ...$
3. sur l'intervalle $[-6; -1]$, la fonction f est ... car la ... est ...
4. en $x = -1$, la ... est ... car la ... à la courbe est ...
5. sur l'intervalle $]-3; 1]$, la fonction f est ... car sa ... C_f est ... ... de ...

— Lecture Graphique *(déterminer graphiquement)*

1. $f(-2) = ...$ $f'(-2) = ...$
2. $f(-1) = ...$ $f'(-1) = ...$
3. $f(2) = ...$ $f'(2) = ...$
4. $f(3) = ...$ $f'(3) = ...$
5. compléter

valeur de x	
signe de $f(x)$	

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x \in ... \\ f(x) < 0 \text{ pour } x \in ... \\ f(x) > 0 \text{ pour } x \in ... \end{cases}$$

6. compléter

valeur de x	
signe de $f'(x)$	

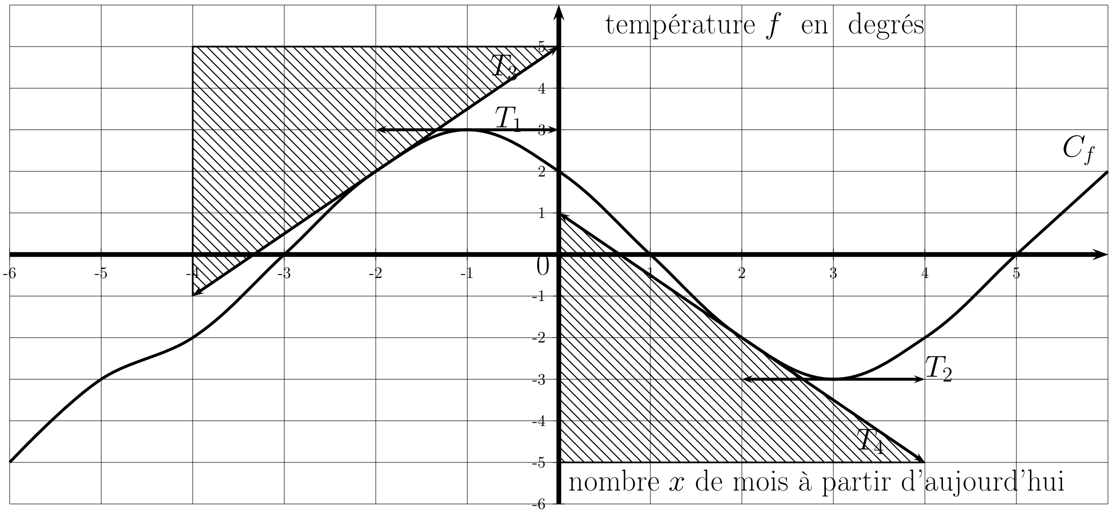
$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in ... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in ... \end{cases}$$

7. compléter

valeur de x	
signe de $f'(x)$	
variations de $f(x)$	

8. déterminer les équations des tangentes T_1 et T_3 *(au verso S.V.P.)*

2.7 corrigé évaluation



— Vocabulaire et notations *(Compléter ci dessous par des mots ou des notations Mathématiques)*

1. T_1, T_2, T_3 *et* T_4 représentent des $\boxed{\text{tangentes}}$ à la courbe notée $\boxed{C_f}$ de la fonction f
2. $f'(-2)$ est la $\boxed{\text{pente}}$ *(ou encore le* $\boxed{\textit{coefficient directeur}}$*)* de la tangente à la courbe au point $\boxed{\text{d'abscisse}}$ $\boxed{x=-2}$
3. sur l'intervalle $[-6;-1]$, la fonction f est $\boxed{\text{croissante}}$ car la $\boxed{\text{pente (ou dérivée)}}$ est $\boxed{\text{positive}}$
4. en $x=-1$, la $\boxed{\text{pente}}$ est $\boxed{\text{nulle}}$ car la $\boxed{\text{tangente}}$ à la courbe est $\boxed{\text{horizontale (parallèle à l'axe des abscisses)}}$
5. sur l'intervalle $]-3;1]$, la fonction f est $\boxed{\text{négative}}$ car sa $\boxed{\text{courbe}}$ C_f est $\boxed{\text{en dessous de l'axe des abscisses}}$

— Lecture Graphique *(déterminer graphiquement et détailler le calcul s'il y en a un à faire)*

1. $\boxed{f(-2)=2}$ $\boxed{f'(-2)=\dfrac{Dy}{Dx}=\dfrac{6}{4}=1,5}$
2. $f(-1)=3$ $\boxed{f'(-1)=0}$ *(tangente horizontale)*
3. $f(2)=-2$ $\boxed{f'(2)=\dfrac{Dy}{Dx}=\dfrac{-6}{4}=-1,5}$
4. $\boxed{f(3)=-3}$ $\boxed{f'(3)=0}$ *(tangente horizontale)*
5.

valeur de x	-6		-3		1		5		6
signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

$$\begin{cases} f(x)=0 \text{ pour } \boxed{x\in\{-3;1;5\}} \\ f(x)<0 \text{ pour } \boxed{x\in\ [-6\ ;\ -3[\ \cup\ ]1\ ;\ 5[} \\ f(x)>0 \text{ pour } \boxed{x\in\ ]-3\ ;\ 1[\ \cup\ ]5\ ;\ 6]} \end{cases}$$

6.

valeur de x	-6		-1		3		6
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } \boxed{x\in\{-1;3\}} \\ f'(x)<0 \text{ pour } \boxed{x\in\ ]-1\ ;\ 3[} \\ f'(x)>0 \text{ pour pour } \boxed{x\in\ [-6\ ;\ -1[\ \cup\ ]3\ ;\ 6]} \end{cases}$$

7.

valeur de x	-6		-1		3		6
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
variations de $f(x)$			3				2
		↗		↘		↗	
	-5				-3		

8. équations des tangentes : $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

$T_1 : \begin{cases} x_0=-1 \\ f(x_0)=f(-1)=3 \\ f'(x_0)=f'(-1)=0 \end{cases}$ $\quad y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \quad y=0(x+1)+3 \quad \boxed{y=3}$

$T_3 : \begin{cases} x_0=-2 \\ f(x_0)=f(-2)=2 \\ f'(x_0)=f'(-2)=1,5 \end{cases}$ $\quad y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2) \quad y=1,5(x+2)+2 \quad \boxed{y=1,5x+5}$

3 fonction dérivée

3.1 activités

3.1.1 activité 0

Détermination algébrique des nombres dérivés des fonctions usuelles *(et autres)* "en fonction de x"

1. principe de base

   Par définition, s'il existe, $f'(x_0)$ est
   la pente de la droite T tangente
   à la courbe de f au point d'abscisse x_0.
   Considérons le point $A \in C_f$ de coordonnées $A(x_0; f(x_0))$
   et $B \in C_f$ de coordonnées $B(x_0 + h; f(x_0 + h))$.
   Quand le nombre h tend vers 0 :
   (1) le point B se rapproche du point ...
   (2) le droite (AB) se rapproche de la ...
   (3) la pente de (AB) se rapproche de la ...

   (a) montrer que la pente de la droite (AB) est $a = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

   (b) si elle existe, de quelle valeur se rapproche a quand h tend vers 0 ?

   (c) compléter alors : $\lim\limits_{h \to ...} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = ...$

2. Applications pour les fonctions usuelles

   (a) fonction carrée $\boxed{f(x) = x^2}$

      i. simplifier au maximum $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
      ii. en déduire $f'(x_0)$ en fonction de x_0
      iii. en déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   (b) fonction cube $\boxed{f(x) = x^3}$
   Procéder de même que précédemment sachant que $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ *(à vérifier)*
   et en déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   (c) fonction inverse $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$
   Procéder de même et en déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

   (d) fonction racine carrée $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$
   Procéder de même et en déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$
   sachant que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

   (e) fonctions affines $\boxed{f(x) = ax + b}$
   Procéder de même et en déduire $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3. autres fonctions construites à partir des fonctions usuelles

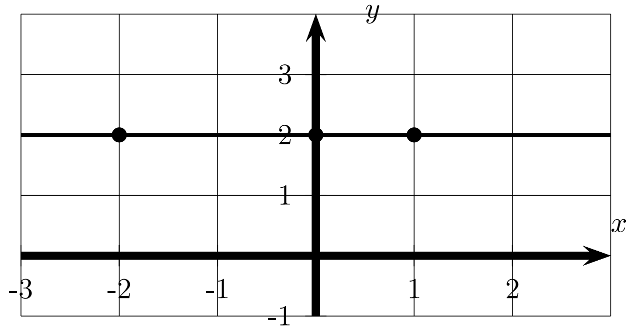
   (a) déterminer $f'(x)$ dans chacun des cas ci dessous

      i. $f(x) = ax^2$
      ii. $f(x) = ax^2 + bx + c$
      iii. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3.1.2 activité 1

<u>activité 1</u> : *(dérivées des fonctions usuelles)*

(a) pour $\boxed{f(x) = 2}$, compléter et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



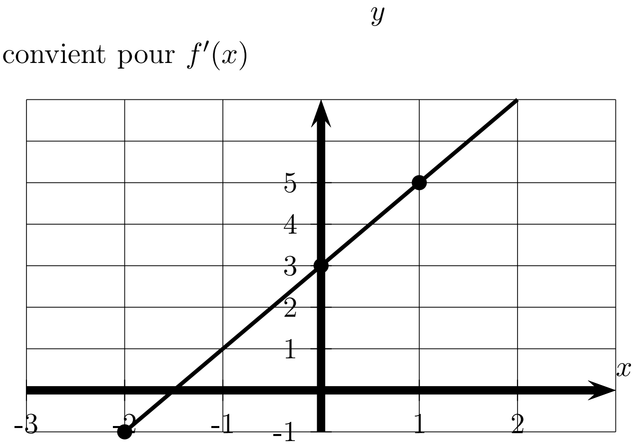
$f'(-2) = ...$

$f'(1) = ...$

quel que soit x on a $\boxed{f'(x) = ...}$

cas général : $\boxed{f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = ...}$

(b) pour $\boxed{f(x) = 2x + 3}$, compléter et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$f'(-2) = ...$

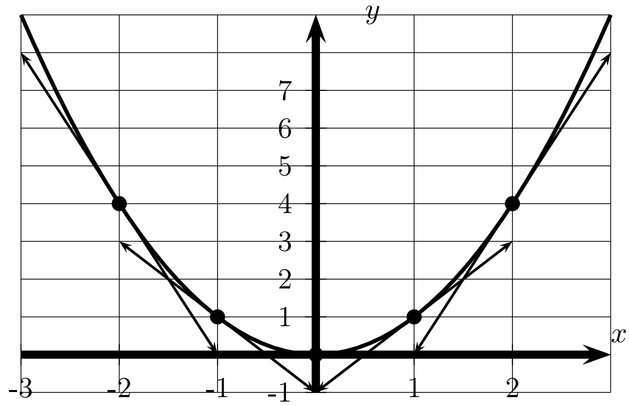
$f'(0) = ...$

$f'(1) = ...$

quel que soit x on a $\boxed{f'(x) = ...}$

cas général : $\boxed{f(x) = ax + b \Longrightarrow f'(x) = ...}$

(c) pour $\boxed{f(x) = x^2}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$f'(-2) = ...$

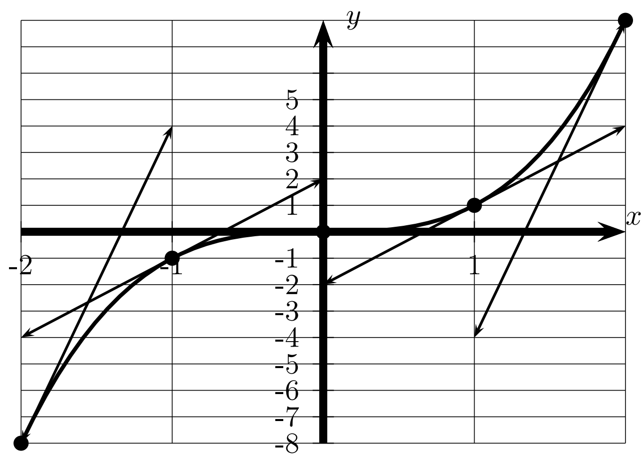
x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = ...}$

cas général : $\boxed{f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...}$

(d) pour $\boxed{f(x) = x^3}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$f'(-2) = ...$

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

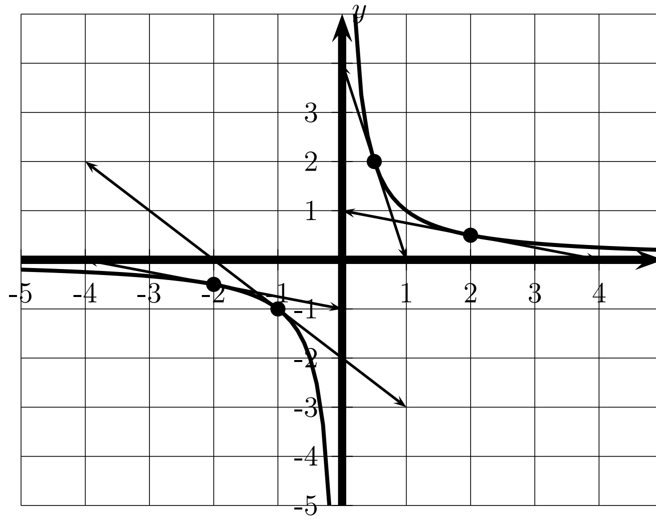
il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = ...}$

cas général : $\boxed{f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...}$

(e) pour $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$

$f'(-2) = ...$



x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$				

il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = ...}$

cas général : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = ...}$

(f) en utilisant la définition du nombre dérivé, retrouver algébriquement chacun des résultats précédents

(g) par observation des résultats ($f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$; $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$)
proposer des résultats pour :

i. $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = ...$

ii. $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = ...$

iii. $f(x) = x^n$ où n est un nombre entier positif $\Longrightarrow f'(x) = ...$

iv. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = ...$

v. $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ où n est un nombre entier positif $\Longrightarrow f'(x) = ...$

3.1.3 activité 2

activité 2 : *(dérivées du produit d'une fonction par un nombre, d'une somme de fonctions, d'un produit de fonctions, d'un quotient de fonctions)*

1. $\boxed{\text{Somme de fonctions dérivables}}$ $\boxed{f = u + v}$
   on admet que : $f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ *(u et v deux fonctions dérivables)*

   par exemple : $f(x) = x^3 + x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

   en Français : La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la ...

   en notations simplifiées : (u + v)' = ...

2. $\boxed{\text{Produit d'une fonction dérivable par un nombre réel}}$ $\boxed{f = ku}$
   on admet que : $f(x) = k \times u(x) \Longrightarrow f'(x) = k \times u'(x)$

   par exemple : $f(x) = 10x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

   en Français : La dérivée du produit d'une fonction par un réel est égale ...

   en notations simplifiées : (ku)' = ...

   (a) calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants *(sur le cahier)*

      i. $f(x) = x^{10} + x^3 + x^2 + 4x - 5$
      ii. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
      iii. $f(x) = 4x^{10} - 5x^3 + 10x^2 - 4x + 5$
      iv. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 7\sqrt{x}$
      v. $f(x) = 5x^2 + 3x - 4$
      vi. $f(x) = 10x^3 - 7x^2 + 5x - 7$
      vii. $f(x) = 4x - 5 + \dfrac{3}{x}$

3. $\boxed{\text{Produit de deux fonctions}}$ $\boxed{f = uv}$

   soient : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = x^3 \end{cases}$ et $f(x) = u(x) \times v(x)$

   (a) montrer que $f(x) = x^5$ et en déduire $f'(x)$
   (b) calculer $u'(x)$ et $v'(x)$ puis comparer $f'(x)$ et $u'(x) \times v'(x)$
   (c) conclure quand à une relation "intuitive" qui en fait est fausse
   (d) vérifier que la formule $(uv)' = u'v + uv'$ donne le bon résultat
   (e) donner une phrase en Français qui correspond à cette formule
   (la dérivée du produit de deux fonctions ...)
   (f) calculer la dérivée de $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ en utilisant cette dernière formule

4. $\boxed{\text{Quotient de deux fonctions}}$ $\boxed{f = \dfrac{u}{v}}$

   soient : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = x^3 \end{cases}$ et $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

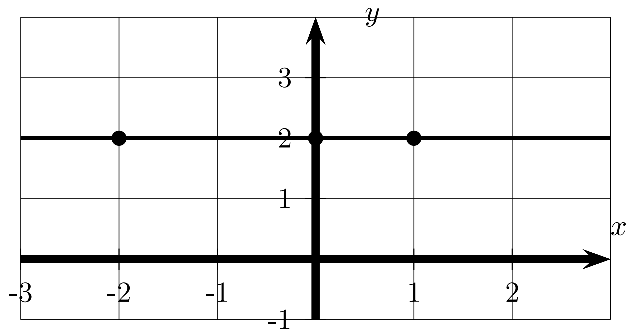
   (a) montrer que $f'(x)$ n'est pas égal à $\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$
   (b) montrer que la formule $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donne le bon résultat
   (c) donner une phrase en Français qui correspond à cette formule
   (la dérivée du quotient de deux fonctions ...)
   (d) calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{2x + 3}{2 - 4x}$ en utilisant cette dernière formule

3.2 corrigé activités

3.2.1 corrigé activité 1

corrigé activité 1 : *(dérivées des fonctions usuelles)*

(a) pour $\boxed{f(x) = 2}$, compléter et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



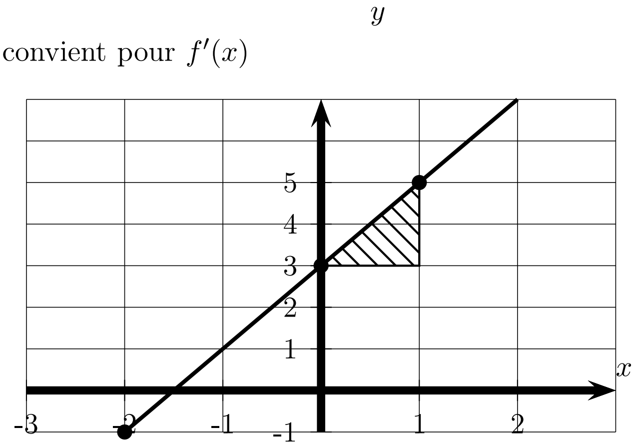
$f'(-2) = 0$ car la tangente est horizontale

$f'(1) = 0$ car la tangente est horizontale

quel que soit x on a $\boxed{f'(x) = 0}$

cas général : $\boxed{f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0}$

(b) pour $\boxed{f(x) = 2x + 3}$, compléter et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$f'(-2) = 2$ la tangente est la courbe

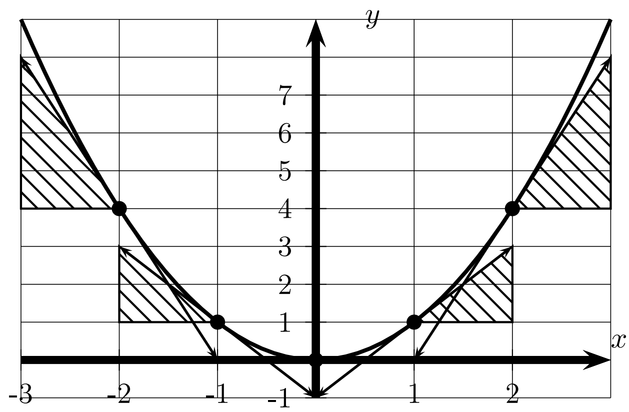
$f'(0) = 2$

$f'(1) = 2$

quel que soit x on a $\boxed{f'(x) = 2}$

cas général : $\boxed{f(x) = ax + b \Longrightarrow f'(x) = a}$

(c) pour $\boxed{f(x) = x^2}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$$f'(-2) = \frac{4-8}{-2-(-3)} = \frac{-4}{1} = -4$$

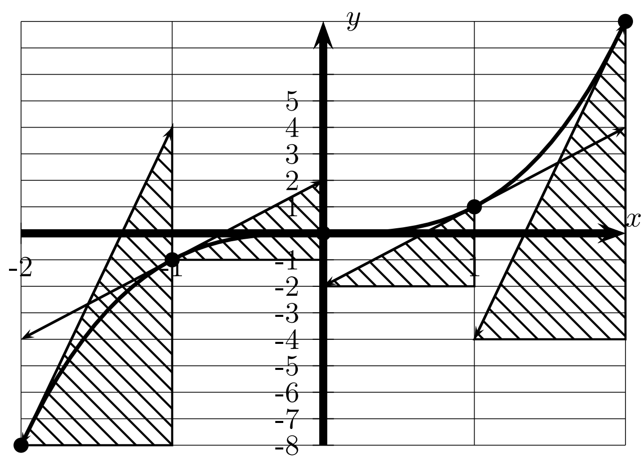
x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-4	-2	0	2	4

il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = 2x}$

cas général : $\boxed{f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x}$

(d) pour $\boxed{f(x) = x^3}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$



$$f'(-2) = \frac{4-(-8)}{-1-(-2)} = \frac{12}{1} = 12$$

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	12	3	0	3	12

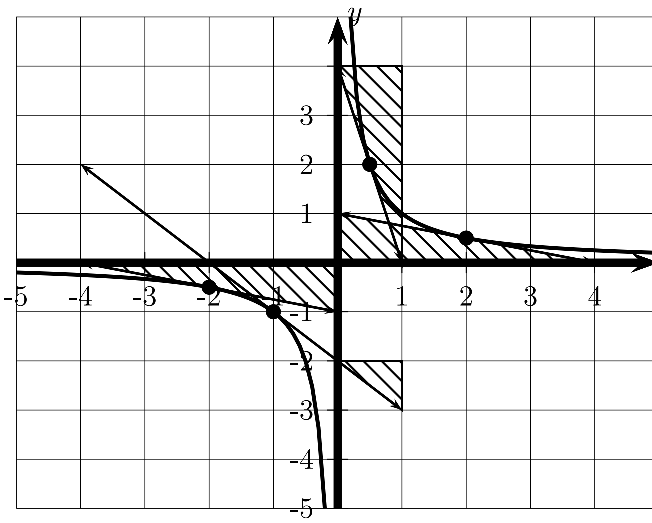
il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = 3x^2}$

cas général : $\boxed{f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2}$

(e) pour $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$, compléter le tableau et trouver une formule qui convient pour $f'(x)$

$f'(-2) = \dfrac{-1-0}{0-(-4)} = -\dfrac{1}{4}$



x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	$-\frac{1}{4}$

il semble que, quel que soit x , on a

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}}$

cas général : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}}$

(f) retrouvons les résultats précédents par le calcul :

i. pour $f(x) = 2$ montrons que $f'(x) = 0$

on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{2-2}{h} = 0$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ donc $\boxed{f'(x) = 0}$

ii. pour $f(x) = 2x+3$ montrons que $f'(x) = 2$

on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{[2(x+h)+3]-[2x+3]}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2$ donc $\boxed{f'(x) = 2}$

iii. pour $f(x) = x^2$ montrons que $f'(x) = 2x$

on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+0 = 2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x}$

iv. pour $f(x) = x^3$ montrons que $f'(x) = 3x^2$

on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \dfrac{(x+h)(x+h)^2-x^3}{h} = \dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2 + 3xh+h^2$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2+0+0 = 3x^2$ donc $\boxed{f'(x) = 3x^2}$

v. pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$ montrons que $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \dfrac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \dfrac{-h}{x(x+h)}h = \dfrac{-1}{x(x+h)}$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-1}{x(x+0)} = \frac{-1}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}}$

(g) par observation des résultats ($f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x;\ f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$) proposer des résultats pour :

i. $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$

ii. $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

iii. $f(x) = x^n$ où n est un nombre entier positif $\Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

iv. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

v. $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ où n est un nombre entier positif $\Longrightarrow f'(x) = -nx^{(-n-1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$

3.2.2 corrigé activité 2

corrigé activité 2 : *(dérivées du produit d'une fonction par un nombre ou d'une somme de fonction)*

(1) on admet que : $\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)}$ (u et v deux fonctions)
par exemple : $f(x) = x^3 + x^2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x$

(2) on admet que : $\boxed{f(x) = k \times u(x) \Longrightarrow f'(x) = k \times u'(x)}$
par exemple : $f(x) = 10x^3 \Longrightarrow f'(x) = 10 \times 3x^2 = 30x^2$

i. calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

A. $f(x) = x^{10} + x^3 + x^2 + 4x - 5 \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 10x^9 + 3x^2 + 2x + 4}$

B. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

C. $f(x) = 4x^{10} - 5x^3 + 10x^2 - 4x + 5$
$\Longrightarrow f'(x) = 4 \times 10x^9 - 5 \times 3x^2 + 10 \times 2x - 4 = \boxed{40x^9 - 15x^2 + 20x - 4}$

D. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 7\sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = 2 \times \dfrac{-1}{x^2} - 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{7}{2\sqrt{x}}}$

E. $f(x) = 5x^2 + 3x - 4 \Longrightarrow f'(x) = 5 \times 2x + 3 = \boxed{10x + 3}$

F. $f(x) = 10x^3 - 7x^2 + 5x - 7 \Longrightarrow f'(x) = 10 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 5 = \boxed{30x^2 - 14x + 5}$

G. $f(x) = 4x - 5 + \dfrac{3}{x} \Longrightarrow f'(x) = 4 + 3 \times \dfrac{-1}{x^2} = \boxed{4 - \dfrac{3}{x^2}}$

ii. soient : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = x^3 \end{cases}$ et $f(x) = u(x) \times v(x)$

A. $f(x) = u(x) \times v(x) = x^3 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$

donc $f'(x) = 5x^4$

B. $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 5x^4$

et $u'(x) \times v'(x) = 2x \times 3x^2 = 6x^{1+2} = 6x^3$

C. conclure quand à une relation "intuitive" qui en fait est fausse :

ici : $f(x) = u(x) \times v(x)$ et $f(x) \neq u'(x) \times v'(x)$

"la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées"

iii. soient : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = x^3 \end{cases}$ et $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$

d'une part : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

d'autre part : $\dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \dfrac{2x}{3x^2} = \dfrac{2}{3x}$

$\dfrac{2}{3x} \neq \dfrac{-1}{x^2}$ donc $f'(x)$ n'est pas égal à $\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$

"la dérivée d'un quotient n'est pas le quotients des dérivées"

3.3 à retenir

Définition 4 : *(fonction dérivable et fonction dérivée)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

(1) f est dérivable sur $I \Longleftrightarrow$ quel que soit $x_0 \in I$, f admet un nombre dérivé en x_0

(2) la fonction dérivée de f est notée f', elle associe à tout $x \in I$ le nombre $f'(x)$

Propriété 2 : *(dérivées usuelles)*

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I
La fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ est appelée "fonction dérivée de f
elle associe à tout $x \in I$ le nombre dérivé de f en x
il faut connaître le tableau suivant des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
0	0
1	0
2	0
-2	0
$\frac{1}{3}$	0
$\sqrt{2}$	0
$a \in \mathbb{R}$	0
x	1
$2x$	2
$-2x$	-2
$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}$
$\frac{ax}{b} = \frac{a}{b}x$	$\frac{a}{b}$
ax	a
$ax+b$	a
x^2	$2x$
ax^2	$2ax$
ax^2+bx+c	$2ax+b$
x^3	$3x^2$
ax^3	$3ax^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3}$	$\frac{-3}{x^4}$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$	$\frac{-2}{x^2}$
$\frac{-3}{x} = -3 \times \frac{1}{x}$	$\frac{3}{x^2}$
$\frac{a}{x} = a \times \frac{1}{x}$	$\frac{-a}{x^2}$
$\frac{a}{x^2} = a \times \frac{1}{x^2}$	$\frac{-2a}{x^3}$
$\frac{a}{x^3} = a \times \frac{1}{x^3}$	$\frac{-3a}{x^4}$
$\frac{a}{x^n} = a \times \frac{1}{x^n}$	$\frac{-na}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
lnx	$\frac{1}{x}$
$ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$cos(x)$	$-sin(x)$
$sin(x)$	$cos(x)$

Propriété 3 : *(opérations sur les dérivées)*

Soient u et v deux fonctions dérivables ayant pour dérivées respectives u' et v' il faut connaître le tableau suivant pour les opérations sur les dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	domaine de validité
$au\ (a \in \mathbb{R})$	au'	où u est définie
$u+v$	$u'+v'$	où u et v sont définies
$u-v$	$u'-v'$	où u et v sont définies
$u^n\ (n \in \mathbb{N})$	$nu^{n-1}u'$	où u est définie
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	où u est définie et $u \neq 0$
$\frac{1}{u^n}\ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$	où u est définie et $u \neq 0$
uv	$u'v+uv'$	où u et v sont définies
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	où u et v sont définies et $v \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	où u est définie et $u \geq 0$
lnu	$\frac{u'}{u}$	où u est définie et $u > 0$
e^u	$u'e^u$	où u est définie
$cos(u)$	$-u'sin(u)$	où u est définie
$sin(u)$	$u'cos(u)$	où u est définie

3.4 exercices

Exercice 5 : *(calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants avec a, b, c et d 4 réels)*

$f(x) = 1$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{2}{3}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \sqrt{2}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -\pi$	$f'(x) = ...$
$f(x) = a$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 4x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -10x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -0,8x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{x}{4}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -\dfrac{2x}{5}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{ax}{b}$ et $b \neq 0$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x + 8$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x - 7$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 0,3x + 4,1$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 5x - 10$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 5 - 4x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x^2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 0,5x^2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{10x^2}{5}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax^2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 3x^2 - 5x + 12$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -5x^2 + 10x - 12$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 0,25x^2 + 5,8x - 1,2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{2}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x^3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 0,5x^3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{10x^3}{5}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax^3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x - 7$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -10x^3 + 12x^2 - 7x + 8$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 0,25x^3 + 5,8x^2 - 1,2x - 12$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \dfrac{7}{6}x^3 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{7}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = ...$

Exercice 6 : *(donner le tableau de signes de $f'(x)$dans chaque cas)*

1.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = x - 5$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

2.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = 5 - x$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

3.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = 2x - 8$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

4.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = 8x - 2$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

5.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = 0,1x - 4,2$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

6.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = -0,25x - 5,5$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

7.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = \frac{2}{3}x - 12$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

8.

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x) = \frac{3}{4}x + \frac{16}{27}$	

calcul de l'annulation $\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$

Exercice 7 :

1. (a) soit $f'(x) = -x^2 - 4x + 21$ montrer que $f'(x) = (x-3)(-x-7)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $(x-3)$	
signe de $(-x-7)$	
signe de $f'(x)$	

calculs des l'annulations

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

2. (a) soit $f'(x) = 15x^2 - 19x + 6$ montrer que $f'(x) = (-3x+2)(-5x+3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $(-3x+2)$	
signe de $(-5x+3)$	
signe de $f'(x)$	

calculs des l'annulations

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

3. (a) soit $f'(x) = 80x^2 + 384x - 80$ montrer que $f'(x) = (4x+20)(-4+20x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $(4x+20)$	
signe de $(-4+20x)$	
signe de $f'(x)$	

calculs des l'annulations

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

4. (a) soit $f'(x) = -0,25x^2 - 6,1x - 2,4$ montrer que $f'(x) = (0,1x+2,4)(-2,5x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $(0,1x+2,4)$	
signe de $(-2,5x-1)$	
signe de $f'(x)$	

calculs des l'annulations

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

Exercice 8 :

1. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = x^2 + 4x - 21$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

2. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = -15x^2 + 19x - 6$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

3. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = 3x^2 + 10x + 80$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

4. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = -x^2 + 6x - 9$

valeur de x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = ... \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x... \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x... \end{cases}$$

Exercice 9 : *(calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants avec a, b, c et d 4 réels)*

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = \dfrac{2}{3}$
3. $f(x) = \sqrt{2}$
4. $f(x) = -\pi$
5. $f(x) = a$
6. $f(x) = x$
7. $f(x) = -x$
8. $f(x) = 4x$
9. $f(x) = -10x$
10. $f(x) = -0,8x$
11. $f(x) = \dfrac{x}{4}$
12. $f(x) = -\dfrac{2x}{5}$
13. $f(x) = ax$
14. $f(x) = \dfrac{ax}{b}$ et $b \neq 0$
15. $f(x) = x + 8$
16. $f(x) = -x - 7$
17. $f(x) = 0,3x + 4,1$
18. $f(x) = 5x - 10$
19. $f(x) = 5 - 4x$
20. $f(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$
21. $f(x) = ax + b$
22. $f(x) = x^2$
23. $f(x) = -x^2$
24. $f(x) = 0,5x^2$
25. $f(x) = \dfrac{10x^2}{5}$
26. $f(x) = ax^2$
27. $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$
28. $f(x) = -5x^2 + 10x - 12$
29. $f(x) = 0,25x^2 + 5,8x - 1,2$
30. $f(x) = \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{2}$
31. $f(x) = ax^2 + bx + c$
32. $f(x) = x^3$
33. $f(x) = -x^3$
34. $f(x) = 0,5x^3$
35. $f(x) = \dfrac{10x^3}{5}$
36. $f(x) = ax^3$
37. $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x - 7$
38. $f(x) = -10x^3 + 12x^2 - 7x + 8$
39. $f(x) = 0,25x^3 + 5,8x^2 - 1,2x - 12$
40. $f(x) = \dfrac{7}{6}x^3 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{7}$
41. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exercice 10 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$
3. $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{10}{x^4}$

Exercice 11 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = (5x - 10)^2$
2. $f(x) = (5 - 4x)^3$

Exercice 12 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 12}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{-5x^2 + 10x - 12}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(3x + 4)^2}$

Exercice 13 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$

Exercice 14 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$
2. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 4}$

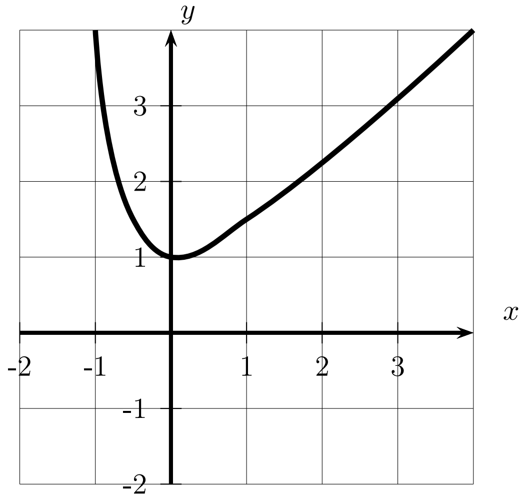
Exercice 15 :

calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

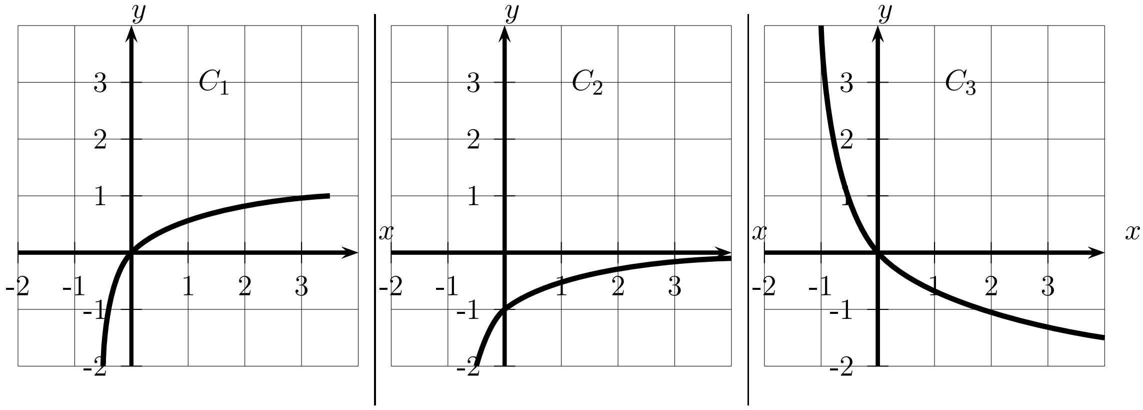
1. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 5}$
2. $f(x) = \dfrac{10x + 5}{5x - 3}$
3. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$

Exercice 16 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.



Laquelle des courbes ci dessous est la courbe de f' où f' est la dérivée de la fonction f ? (justifier)



3.5 corrigés exercices

Corrigé exercice 5 : *(calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants avec a, b, c et d 4 réels)*

$f(x) = 1$	$\boxed{f'(x) = 0}$
$f(x) = \frac{2}{3}$	$\boxed{f'(x) = 0}$
$f(x) = \sqrt{2}$	$\boxed{f'(x) = 0}$
$f(x) = -\pi$	$\boxed{f'(x) = 0}$
$f(x) = a$	$\boxed{f'(x) = 0}$

$f(x) = x$	$\boxed{f'(x) = 1}$
$f(x) = -x$	$\boxed{f'(x) = -1}$
$f(x) = 4x$	$\boxed{f'(x) = 4}$
$f(x) = -10x$	$\boxed{f'(x) = -10}$
$f(x) = -0,8x$	$\boxed{f'(x) = -0,8}$
$f(x) = \frac{x}{4}$	$\boxed{f'(x) = \frac{1}{4}}$
$f(x) = -\frac{2x}{5}$	$\boxed{f'(x) = -\frac{2}{5}}$
$f(x) = ax$	$\boxed{f'(x) = a}$
$f(x) = \frac{ax}{b}$ et $b \neq 0$	$\boxed{f'(x) = \frac{a}{b}}$
$f(x) = x + 8$	$f'(x) = 1 + 0 = \boxed{f'(x) = 1}$
$f(x) = -x - 7$	$f'(x) = -1 - 0 = \boxed{f'(x) = -1}$
$f(x) = 0,3x + 4,1$	$f'(x) = 0,3 + 0 = \boxed{f'(x) = 0,3}$
$f(x) = 5x - 10$	$f'(x) = 5 - 0 = \boxed{f'(x) = 5}$
$f(x) = 5 - 4x$	$f'(x) = 0 - 4 = \boxed{f'(x) = -4}$
$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$	$f'(x) = \frac{3}{4} - 0 = \boxed{f'(x) = \frac{3}{4}}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a + 0 = \boxed{f'(x) = a}$

$f(x) = x^2$	$\boxed{f'(x) = 2x}$
$f(x) = -x^2$	$\boxed{f'(x) = -2x}$
$f(x) = 0,5x^2$	$f'(x) = 0,5 \times 2x = 1x = \boxed{f'(x) = x}$
$f(x) = \frac{10x^2}{5}$	$f'(x) = \frac{10}{5} \times 2x = \boxed{f'(x) = 4x}$
$f(x) = ax^2$	$f'(x) = a \times 2x = \boxed{f'(x) = 2ax}$
$f(x) = 3x^2 - 5x + 12$	$f'(x) = 3 \times 2x - 5 + 0 = \boxed{f'(x) = 6x - 5}$
$f(x) = -5x^2 + 10x - 12$	$f'(x) = -5 \times 2x + 10 - 0 = \boxed{f'(x) = -10x + 10}$
$f(x) = 0,25x^2 + 5,8x - 1,2$	$f'(x) = 0,25 \times 2x + 5,8 - 0 = \boxed{f'(x) = 0,5x + 5,8}$
$f(x) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$	$f'(x) = \frac{7}{4} \times 2x - \frac{4}{3} + 0 = \boxed{f'(x) = 3,5x - \frac{4}{3}}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = a \times 2x + b + 0 = \boxed{f'(x) = 2ax + b}$

$f(x) = x^3$	$\boxed{f'(x) = 3x^2}$
$f(x) = -x^3$	$\boxed{f'(x) = -3x^2}$
$f(x) = 0,5x^3$	$f'(x) = 0,5 \times 3x^2 = \boxed{f'(x) = 1,5x^2}$
$f(x) = \frac{10x^3}{5}$	$f'(x) = \frac{10}{5} \times 3x^2 = \boxed{f'(x) = 6x^2}$
$f(x) = ax^3$	$f'(x) = a \times 3x^2 = \boxed{f'(x) = 3ax^2}$
$f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x - 7$	$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 15 \times 2x + 10 - 0 = \boxed{f'(x) = 9x^2 - 30x + 10}$
$f(x) = -10x^3 + 12x^2 - 7x + 8$	$f'(x) = -10 \times 3x^2 + 12 \times 2x - 7 + 0 = \boxed{f'(x) = -30x^2 + 24x - 7}$
$f(x) = 0,25x^3 + 5,8x^2 - 1,2x - 12$	$f'(x) = 0,25 \times 3x^2 + 5,8 \times 2x - 1,2 - 0 = \boxed{f'(x) = 0,75x^2 + 11,6x - 1,2}$
$f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}$	$f'(x) = \frac{7}{6} \times 3x^2 - \frac{1}{8} \times 2x + \frac{1}{2} - 0 = \boxed{f'(x) = 3,5x^2 - 0,25x - 0,5}$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c + 0 = \boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$

Corrigé exercice 6 : *(donner le tableau de signes de $f'(x)$dans chaque cas)*

1.

valeur de x	$-\infty$	5	$+\infty$
signe de $f'(x)=x-5$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$x-5=0 \Longleftrightarrow x=5$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=5 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<5 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>5 \end{cases}$$

2.

valeur de x	$-\infty$	5	$+\infty$
signe de $f'(x)=5-x$	$+$	0	-

calcul de l'annulation

$5-x=0 \Longleftrightarrow 5=x$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=5 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x>5 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x<5 \end{cases}$$

3.

valeur de x	$-\infty$	4	$+\infty$
signe de $f'(x)=2x-8$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$2x-8=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{8}{2}=4$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=4 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<4 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>4 \end{cases}$$

4.

x	$-\infty$	$\dfrac{2}{8}=0,125$	$+\infty$
$f'(x)=8x-2$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$8x-2=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{2}{8}$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=0,125 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<0,125 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>0,125 \end{cases}$$

5.

x	$-\infty$	42	$+\infty$
$0,1x-4,2$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$0,1x-4,2=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{4,2}{0,1}=42$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=42 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<42 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>42 \end{cases}$$

6.

x	$-\infty$	-22	$+\infty$
$f'(x)=-0,25x-5,5$	$+$	0	-

calcul de l'annulation

$-0,25x-5,5=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{5,5}{-0,25}=-22$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=-22 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x>-22 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x<-22 \end{cases}$$

7.

x	$-\infty$	18	$+\infty$
$f'(x)=\dfrac{2}{3}x-12$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$\dfrac{2}{3}x-12=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{12}{\frac{2}{3}}=12\times\dfrac{3}{2}=18$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=18 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<18 \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>18 \end{cases}$$

8.

x	$-\infty$	$-\dfrac{64}{81}$	$+\infty$
$f'(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{16}{27}$	-	0	$+$

calcul de l'annulation

$\dfrac{3}{4}x+\dfrac{16}{27}=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{-\frac{16}{27}}{\frac{3}{4}}=-\dfrac{16}{27}\times\dfrac{4}{3}=-\dfrac{64}{81}$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \text{ pour } x=-\dfrac{64}{81} \\ f'(x)<0 \text{ pour } x<-\dfrac{64}{81} \\ f'(x)>0 \text{ pour } x>-\dfrac{64}{81} \end{cases}$$

Corrigé exercice 7 :

1. (a) soit $f'(x) = -x^2 - 4x + 21$ montrer que $f'(x) = (x-3)(-x-7)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(x-3)(-x-7) = -x^2 - 7x + 3x + 21 = -x^2 - 4x + 21 = f'(x)$$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$	calculs des l'annulations
signe de $(x-3)$		-	|	-	0	$+$		$x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$
signe de $(-x-7)$		$+$	0	-	|	-		$-x - 7 = 0 \Longleftrightarrow -7 = x$
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	0	-		

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-7; 3\} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -7[\cup]3; +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-7; 3[\end{cases}$$

2. (a) soit $f'(x) = 15x^2 - 19x + 6$ montrer que $f'(x) = (-3x+2)(-5x+3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(-3x+2)(-5x+3) = 15x^2 - 9x - 10x + 6 = 15x^2 - 19x + 6 = f'(x)$$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$	calculs des l'annulations
signe de $(-3x+2)$		$+$	|	$+$	0	-		$-3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$
signe de $(-5x+3)$		$+$	0	-	|	-		$-5x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$		

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in \{\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]\frac{3}{5}; \frac{2}{3}[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[\end{cases}$$

3. (a) soit $f'(x) = 80x^2 + 384x - 80$ montrer que $f'(x) = (4x + 20)(-4 + 20x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$(4x + 20)(-4 + 20x) = -16x + 80x^2 - 80 + 400x = 80x^2 + 384x - 80 = f'(x)$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$		-5		0,2		$+\infty$
signe de $(4x + 20)$		-	0	+	|	+	
signe de $(-4 + 20x)$		-	|	-	0	+	
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

calculs des l'annulations

$4x + 20 = 0 \iff x = \frac{-20}{4} = -5$

$-4 + 20x = 0 \iff x = \frac{4}{20} = 0,2$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-5; 0,2\} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-5; 0,2[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -5[\cup]0,2; +\infty[\end{cases}$$

4. (a) soit $f'(x) = -0,25x^2 - 6,1x - 2,4$ montrer que $f'(x) = (0,1x + 2,4)(-2,5x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$(0,1x + 2,4)(-2,5x - 1) = -0,25x^2 - 0,1x - 6x - 2,4 = -0,25x^2 - 6,1x - 2,4 = f'(x)$

(b) compléter le tableau de signes de $f'(x)$

valeur de x	$-\infty$		-24		$-0,4$		$+\infty$
signe de $(0,1x + 2,4)$		-	0	+	|	+	
signe de $(-2,5x - 1)$		+	|	+	0	-	
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	

calculs des l'annulations

$0,1x + 2,4 = 0 \iff x = \frac{-2,4}{0,1} = -24$

$-2,5x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{-2,5} = -0,4$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x \in \{-24; -0,4\} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -24[\cup]-0,4; +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-24; -0,4[\end{cases}$$

Corrigé exercice 8 :

1. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = x^2 + 4x - 21$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -21 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 100 \quad \Delta > 0$ donc deux annulations

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + \sqrt{100}}{2 \times 1} = 3 \qquad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - \sqrt{100}}{2 \times 1} = -7$

valeur de x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = -7 \text{ ou } x = 3 \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-7; -3[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -7[\cup]3; +\infty[\end{cases}$

2. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = -15x^2 + 19x - 6$

$\begin{cases} a = -15 \\ b = 19 \\ c = -6 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \times (-15) \times (-6) = 1 \quad \Delta > 0$ donc deux annulations

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-19 + \sqrt{1}}{2 \times (-15)} = \dfrac{3}{5} \qquad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-19 - \sqrt{1}}{2 \times (-15)} = \dfrac{2}{3}$

valeur de x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	0	-	

$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = \dfrac{2}{3} \text{ ou } x = \dfrac{3}{5} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; \dfrac{3}{5}[\cup]\dfrac{2}{3}; +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{3}[\end{cases}$

3. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = 3x^2 + 10x + 80$

$\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \\ c = 80 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 3 \times 80 = -860 \quad \Delta < 0$ donc aucune annulation

valeur de x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	

$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = \text{aucune valeur} \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in \{\} \\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty; +\infty[\end{cases}$

4. (a) compléter le tableau de signes de $f'(x) = -x^2 + 6x - 9$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -9 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 0 \quad \Delta = 0$ donc une seule annulation

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2 \times (-1)} = 3$

valeur de x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	-	

$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ pour } x = 3 \\ f'(x) < 0 \text{ pour } x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ pour } x \in \{\} \end{cases}$

Corrigé exercice 9 :

(a) calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

i. $f(x) = 5x - 10$

$\boxed{f'(x) = 5}$

ii. $f(x) = 5 - 4x$

$\boxed{f'(x) = -4}$

iii. $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$

$\boxed{f'(x) = 6x - 5}$

iv. $f(x) = -5x^2 + 10x - 12$

$\boxed{f'(x) = -10x + 10}$

v. $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x - 7$

$\boxed{f'(x) = 9x^2 - 30x + 10}$

vi. $f(x) = -10x^3 + 12x^2 - 7x + 8$

$\boxed{f'(x) = -30x^2 + 24x - 7}$

vii. $f(x) = 5x - 10 + \dfrac{1}{x}$

$\boxed{f'(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2}}$

viii. $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{2}{x}$

$\boxed{f'(x) = -2 + \dfrac{2}{x^2}}$

ix. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-6}{x^3} - \dfrac{12}{x^4}}$

x. $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{10}{x^4}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{40}{x^5}}$

(b) calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants

i. $f(x) = (5x - 10)^2$

$\boxed{f'(x) = 50x - 100}$

ii. $f(x) = (5 - 4x)^3$

$\boxed{f'(x) = -12(5 - 4x)^2}$

iii. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 12}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-6x + 5}{(3x^2 - 5x + 12)^2}}$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{-5x^2 + 10x - 12}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{10x - 10}{(-5x^2 + 10x - 12)^2}}$

v. $f(x) = \dfrac{1}{(3x + 4)^2}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-6}{(3x + 4)^3}}$

vi. $f(x) = x\sqrt{x}$

$\boxed{f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}$

vii. $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$

$\boxed{f'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x}}}$

viii. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 5}}}$

ix. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 4}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{6x + 2}{2\sqrt{3x^2 + 2x + 4}}}$

x. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 5}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{22}{(2x + 5)^2}}$

xi. $f(x) = \dfrac{10x + 5}{5x - 3}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-55}{(2x + 5)^2}}$

xii. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{6x^2 - 6x + 3}{(2x - 1)^2}}$

Corrigé exercice 10 :

Corrigé exercice 11 :

Corrigé exercice 12 :

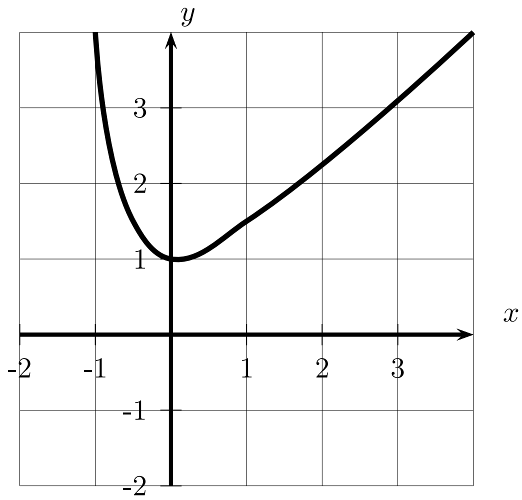
Corrigé exercice 13 :

Corrigé exercice 14 :

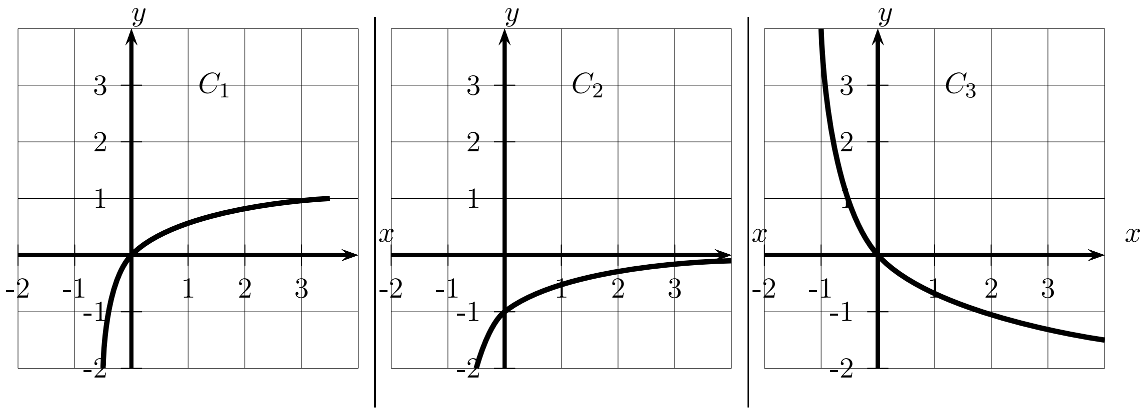
Corrigé exercice 15 :

Corrigé exercice 16 :

Soit la fonction f représentée ci dessous.



Seule C_1 peut-être la courbe de f'
En effet :
D'après la courbe de f, $f'(x)$ s'annule pour $x = 0$ (tangente horizontale en x = 0) donc $f'(0) = 0$ donc C_2 ne convient pas.
De plus, d'après la courbe de f, $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ donc C_3 ne convient pas.



4 signe de la dérivée et sens de variations

4.1 activités

4.1.1 Activité 0 : Variations de f et signe de f'

1.Généralités

Compléter les phrases ainsi que le graphique

- f une fonction de courbe représentative C_f

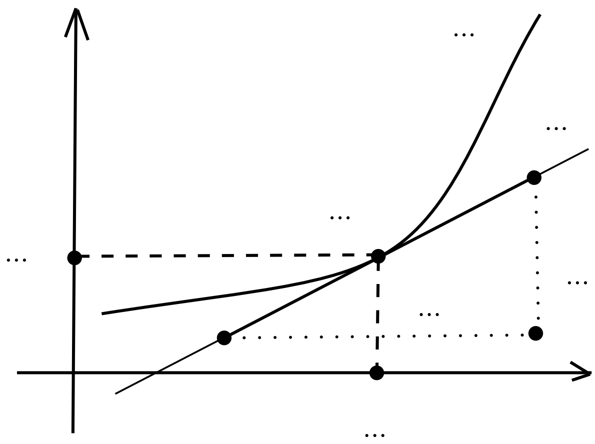
- $M(x;y) \in C_f$ un point de la courbe C_f

- x est l'... du point ...

- $f(x)$ est l'... du point ...

T_x est la d...

- $f'(x)$ est le ...



2. Lecture Graphique

1. Estimer le tableau de variations

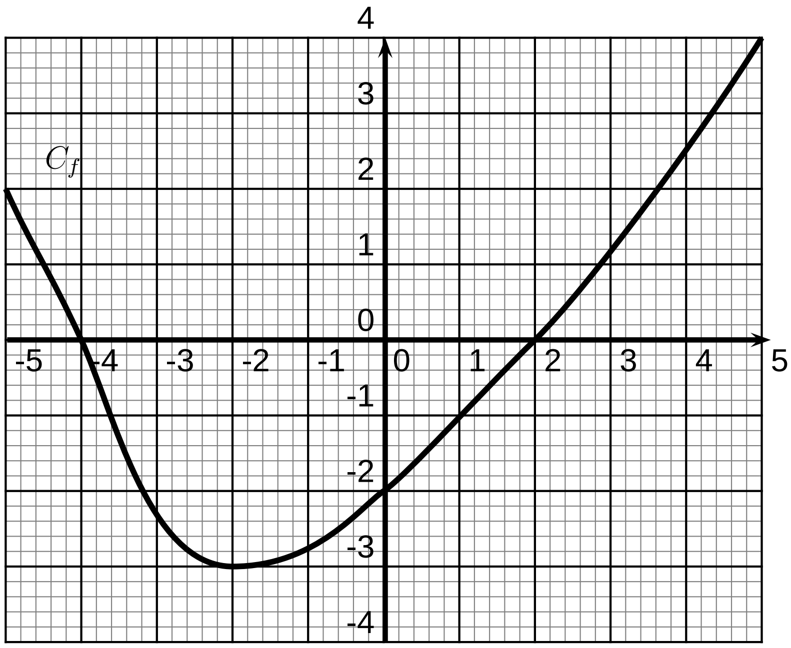
Valeur de x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

2. Estimer le tableau de signes

Valeur de x	
Signe de $f(x)$	

3. Estimer les extremums de f ci dessous
Maximum = ... pour $x =$ ...

Minimum = ... pour $x =$ ...



3. Lecture Graphique

1. Estimer le tableau de variations

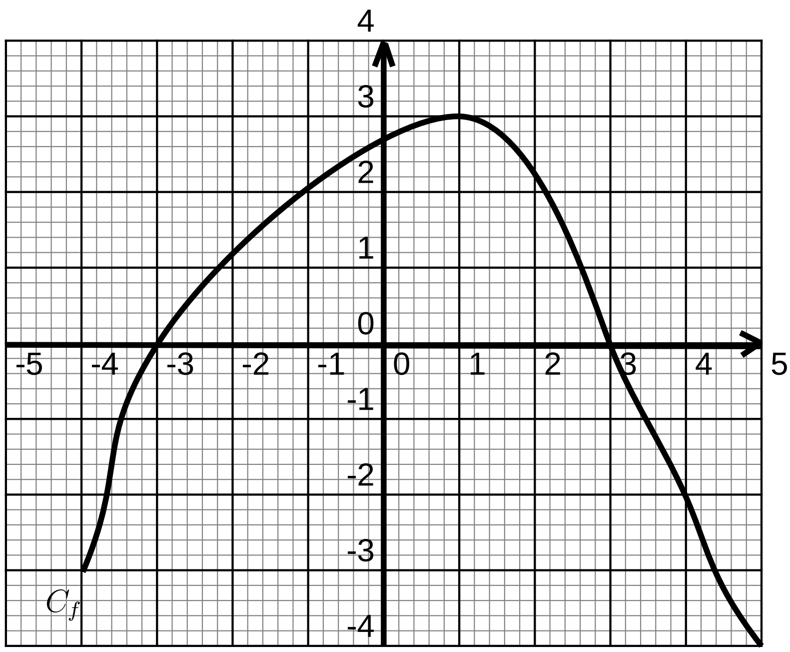
Valeur de x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

2. Estimer le tableau de signes

Valeur de x	
Signe de $f(x)$	

3. Estimer les extremums de f ci dessous
Maximum = ... pour $x =$ ...

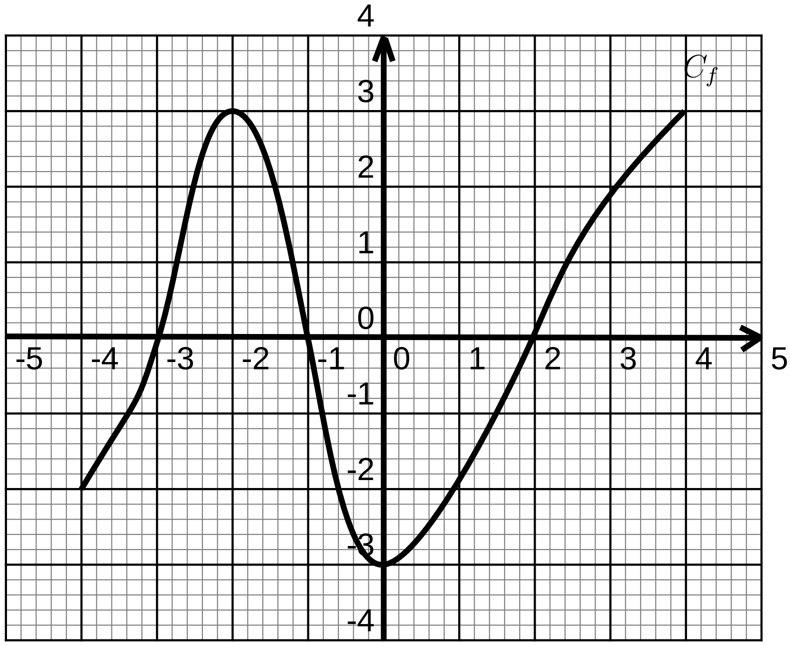
Minimum = ... pour $x =$ ...



4. Lecture Graphique

1. Estimer le tableau de variations

Valeur de x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	



2. Estimer le tableau de signes

Valeur de x	
Signe de $f(x)$	

3. Estimer les extremums de f ci dessous

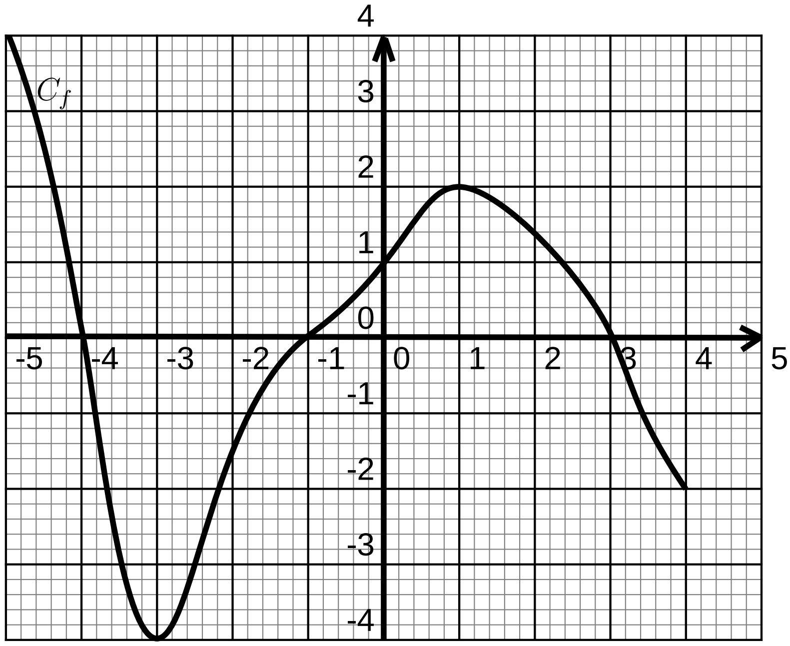
Maximum = ... pour $x =$ ...

Minimum = ... pour $x =$ ...

5. Lecture Graphique

1. Estimer le tableau de variations

...	
...	
...	



2. Estimer le tableau de signes

...	
...	

3. Estimer les extremums de f ci dessous

Maximum = ... pour $x =$ ...

Minimum = ... pour $x =$ ...

6. Bilan

Soit f une fonction définie pour $x \in]-\infty; +\infty[$ dérivable, et de fonction dérivée f'
Compléter les phrases

Quel que soit l'intervalle I,

1. La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si la fonction f' est ...

2. La fonction f est strictement décroissante sur I si et seulement si la fonction f' est ...

3. La fonction f est constante sur I si et seulement si la fonction f' est ...

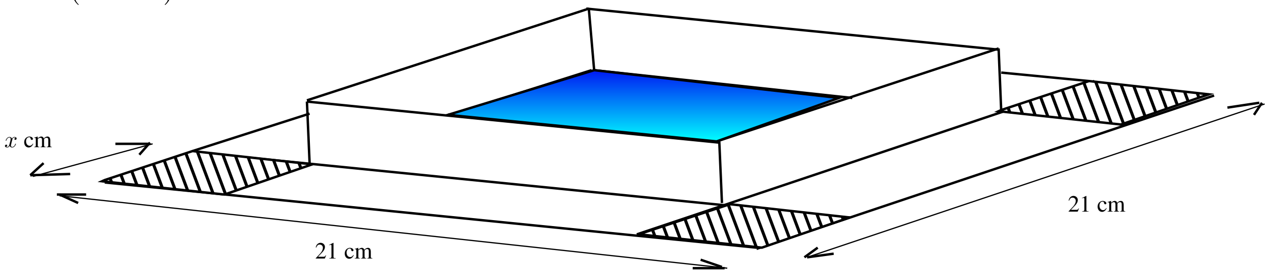
4.1.2 activité 1 : Second degré

1. soit la fonction de degré deux f définie sur $[-10\ ;\ 10]$ par $f(x) = 3x^2 - 30x + 1$
   (a) calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f
   (b) étudier l'annulation et le signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$
   (c) en déduire le tableau de variations et les les extremums de f sur $[-10\ ;\ 10]$
2. procéder de même pour $f(x) = -5x^2 + 40x - 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$
3. procéder de même pour $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 48x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$

4.1.3 activité 2 : Boite de plus grand volume

Boîte de plus grand volume

Problème : « D'une feuille faire une boite » :
D'une feuille carrée de coté 21 cm on enlève un carré de coté x cm à chaque coin, on obtient ainsi le patron d'un pavé droit(boite). On s'intéresse au volume V de la boite en fonction du coté des carrés enlevés.



1. Questions d'intuition : sans justifier, répondre par "vrai" ou "faux"

   (a) quand x varie, le volume de la boite reste le même : ...

   (b) si x augmente alors le volume de la boite diminue : ...

   (c) si x augmente alors le volume de la boite augmente : ...

   (d) pour une certaine valeur de x le volume de la boite est maximum : ...

2. Questions de calculs numériques :

   (a) compléter les lignes 2, 3, et 4 ci dessous *(en détaillant)*

   (b) utiliser un tableur pour obtenir automatiquement les valeurs des colonnes A à E pour x allant de 0 à 11 avec un pas de 1 *(compléter alors les lignes 7,10 et 13)* puis, commenter les valeurs de la ligne 11 *(donner les valeurs limites pour x)* : ...
   et obtenir le graphique associé au tableau *(points reliés par un segment)*

	A	B	C	D	E
1	x	hauteur	largeur	longueur	volume
2	0				
3	1				
4	2				
...	...	...	...	...	...
7	5				
...	...	...	...	...	...
10	8				
...	...	...	...	...	...
13	11				

Formules : A3 = ... ,B2 = ... ,C2 = ... ,D2 = ... ,E2 = ...

   (c) comment semble varier le volume quand x augmente ? : ...

   (d) les résultats induisent-ils l'existence d'une boite de volume maximal ? : ...

   (e) quel serait le volume maximal et pour quelle valeur de x ? : ...

3. <u>Questions fonctionnelles :</u>

(a) Préciser les valeurs possibles pour x sous la forme d'un intervalle : $I =$ ....

(b) Exprimer en fonction de x :

hauteur boite : $h(x) =$ .... ; largeur boite : $l(x) =$ ....

Longueur boite : $L(x) =$ .... ; Volume : $V(x) =$ ....

Expression développée de $V(x) =$ ....

(vérifier en utilisant un logiciel de calcul formel)

(c) calculer $V'(x)$

(d) étudier l'annulation et le signe de $V'(x)$ en fonction de x pour $x \in I$

(e) en déduire les variations de V sur I

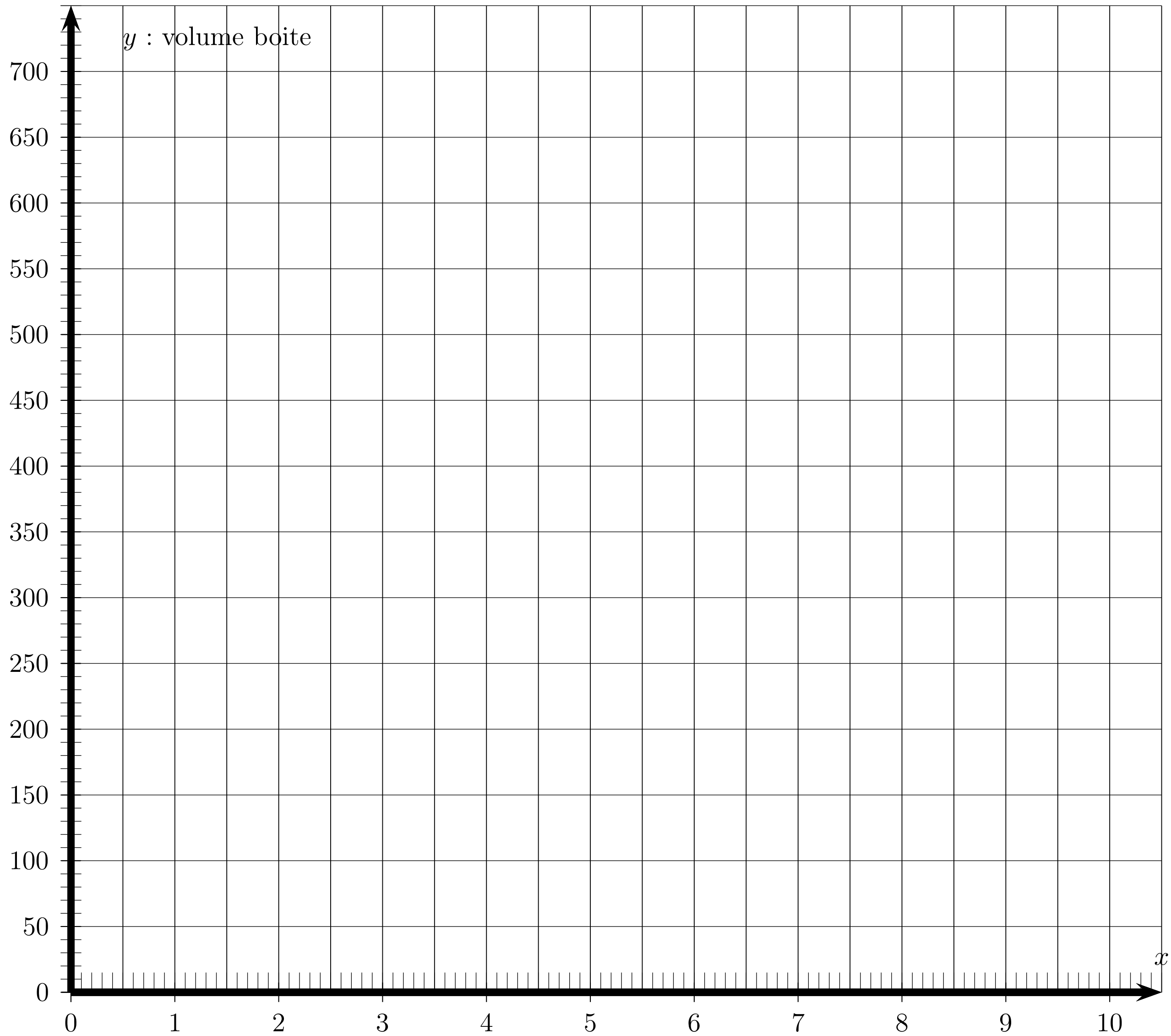
(f) préciser les extrémums de V sur I

(g) en déduire les dimensions de la boîte de volume maximal ainsi que ce volume maximal

(h) En utilisant votre calculatrice ou le tableur, compléter le tableau de valeurs suivant

x	0	1	2	3		4	5	6	7	8	9	10	10,5
$V(x)$		361	578				605			200			

(i) Construire la courbe représentative des variations du volume V en fonction de x



(j) essayer de déterminer la ou les valeurs possibles de x (à 10^{-1} près) qui donnent une boite de 500 cm^3 (*méthode libre !)*

4.2 corrigés activités

4.2.1 corrigé activité 1 : Second degré

1. soit la fonction de degré deux f définie sur $[-10\ ;\ 10]$ par $f(x) = 3x^2 - 30x + 1$

   (a) calcul de la dérivée : $f'(x) = ?$
   $f(x) = 3x^2 - 30x + 1$
   $f'(x) = 3 \times 2x - 30 + 0$
   $\boxed{f'(x) = 6x - 30}$

   (b) annulation de f' sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x) = 0$
   $6x - 30 = 0$

   $x = \dfrac{30}{6} = 5$

   $\boxed{\text{la dérivée s'annule pour } x = 5}$

   signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		5		10
signe de $f'(x) = 6x - 30$		-	0	$+$	

   (signe de "$a = 6$" à droite de l'annulation)

   (c) tableau de variations et extremums de f sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		5		10
signe de $f'(x) = 6x - 30$		-	0	$+$	
variations de f	601	$\searrow$	-74	$\nearrow$	1

   $f(-10) = 3 \times (-10)^2 - 30 \times (-10) + 1 = 601$

   sur $[-10\ ;\ 10]$:
   le maximum de f vaut 601 pour $x = -10$
   le minimum vaut -74 pour $x = 5$

2. $f(x) = -5x^2 + 40x - 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$

(a) calcul de la dérivée : $f'(x) = ?$

$f(x) = -5x^2 + 40x - 10$

$f'(x) = -5 \times 2x + 40 - 0$

$\boxed{f'(x) = -10x + 40}$

(b) annulation de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

$f'(x) = 0$

$-10x + 40 = 0$

$x = \dfrac{-40}{-10} = 4$

$\boxed{\text{la dérivée s'annule pour } x = 4}$

signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10 $\quad$ 4 $\quad$ 10
signe de $f'(x) = -10x + 40$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ -

(signe de "$a = -10$" à droite de l'annulation)

(c) tableau de variations et extremums de f sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10 $\quad$ 4 $\quad$ 10
signe de $f'(x) = -10x + 40$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ -
variations de f	-910 $\nearrow$ 70 $\searrow$ -110

$f(-10) = -5 \times (-10)^2 + 40 \times (-10) - 10 = -910$

sur $[-10\ ;\ 10]$:

le maximum de f vaut 70 pour $x = 4$

le minimum vaut -910 pour $x = 4$

3. procéder de même pour $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 48x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$

— calcul de $f'(x)$

$f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x$
$f'(x) = -4 \times 3x^2 - 12 \times 2x + 96$
$\boxed{f'(x) = -12x^2 - 24x + 96}$

— annulation de $f'(x)$

$f'(x) = 0$
$-12x^2 - 24x + 96 = 0$

$\Delta = (-24)^2 - 4 \times (-12) \times 96 = 5184$
$\Delta > 0$ donc il y a deux annulations

$$x = \frac{-(-24) + \sqrt{5184}}{2 \times (-12)} = \frac{96}{-24} = -4 \text{ ou } x = \frac{-(-24) - \sqrt{5184}}{2 \times (-12)} = \frac{-48}{-24} = 2$$

$\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -4 \ ou\ x = 2}$

— signe de $f'(x)$ et variations de f

valeur de x	-10		-4		2		$+10$
signe de $f'(x) = -12x^2 - 24x + 96$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	921	$\searrow$	-320	$\nearrow$	112	$\searrow$	-2119

$f(2) = -4 \times 2^3 - 12 \times 2^2 + 96 \times 2 = 112$

— sur $[-10\ ;\ 10]$:
le maximum de f vaut 921 pour $x = -10$
le minimum vaut -2119 pour $x = 10$

4.2.2 corrigé activité 2 : Boite de plus grand volume

4.3 à retenir

Propriété 4 : *(signe de f' et sens de variation de f)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f'
le sens de variation de f est en lien direct avec le signe de la dérivée f'

$$\begin{cases} \boxed{\text{f est strictement croissante}} \text{ sur } I \iff \forall x \in I,\ f'(x) > 0 \quad (f' \text{ strictement positive}) \\ \boxed{\text{f est strictement décroissante}} \text{ sur } I \iff \forall x \in I,\ f'(x) < 0 \quad (f' \text{ strictement négative}) \\ \boxed{\text{f est constante}} \text{ sur } I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0 \quad (f' \text{ nulle}) \end{cases}$$

(admis)

Remarque :
- Ceci permet de trouver graphiquement le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
- Ceci permet d'étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemples

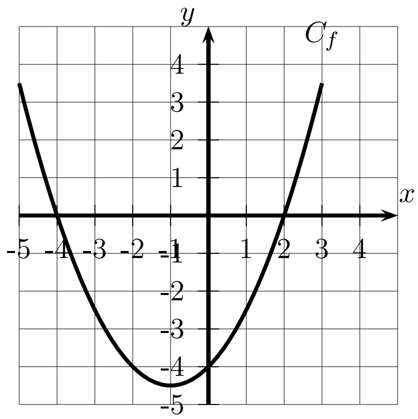
Pour la fonction f représentée ci contre on détermine graphiquement que :

x	-5 3
$f'(x)$	
$f(x)$	

$f'(x) = 0 \iff$

$f'(x) > 0 \iff$

$f'(x) < 0 \iff$



Soit g une fonction telle que $g' = f$ où f est la fonction ci dessus.
Donner le tableau de signes de g' ainsi que le tableau de variations de g

x	-5 3
$g'(x) = f(x)$	
$g(x)$	

corrigé exemple :

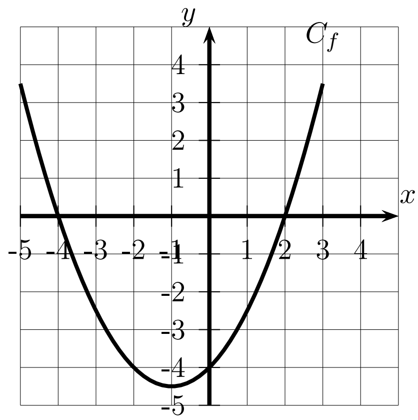
Pour la fonction f représentée ci contre
on détermine graphiquement que :

x	-5		-1		$+3$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$\simeq 3,5$	$\searrow$	$\simeq -4,5$	$\nearrow$	$\simeq 3,5$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{1\}$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]-1;3]$

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in [-5;-1[$



Soit g une fonction telle que $g' = f$ où f est la fonction ci dessus.
Donner le tableau de signes de g' ainsi que le tableau de variations de g

x	-5		-4		2		3
$g'(x) = f(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$g(x)$	?	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?

? par manque de données sur g

4.4 exercices

Exercice 17 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = -3x^2 + 30x + 10}$ sur l'intervalle $\boxed{[0;10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = -3x^2 + 30x + 10$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Binôme $(ax + b)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme

valeur de x	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	0	...

- Signe de $a = ...$ à droite

Annulation de $f'(x)$

- $... = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

3) Variations de f sur $[0;10]$

valeur de x	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	0	...
Variations de f			

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$

4) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Exercice 18 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = 4x^2 - 32x + 100}$ sur l'intervalle $\boxed{[0;10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = 4x^2 - 32x + 100$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Binôme $(ax + b)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme

valeur de x	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	0	...

- Signe de $a = ...$ à droite

Annulation de $f'(x)$

- $... = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

3) Variations de f sur $[0;10]$

valeur de x	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	0	...
Variations de f			

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$

4) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Exercice 19 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 10}$ sur l'intervalle $\boxed{[0;10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 10$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Factorisation de $f'(x)$

- Montrons que $f'(x) = (-2x + 6)(-3x + 21)$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = ...$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = ...$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = ...$

3) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Produit de deux Binômes $(ax + b)(cx + d)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme, et d'un produit

valeur de x	... ...	...	... ...
Signe de $(-2x + 6)$	...	...	...
Signe de $(-3x + 21)$	...	...	...
Signe de $f'(x)$	...	...	...

Annulations

- $-2x + 6 = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$
- $-3x + 21 = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

4) Variations de f sur $[0; 10]$

valeur de x	... ...	...	... ...
Signe de $f'(x)$	...	...	...
Variations de f			

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(10) = ...$
- $f(10) = ...$

5) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Exercice 20 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = -4x^3 + 48x^2 - 144x + 200}$ sur l'intervalle $\boxed{[0; 10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = -4x^3 + 48x^2 - 144x + 200$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Factorisation de $f'(x)$

- Montrons que $f'(x) = (4x - 8)(18 - 3x)$
- $(4x - 8)(18 - 3x) = ...$
- $(4x - 8)(18 - 3x) = ...$
- $(4x - 8)(18 - 3x) = ...$

3) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Produit de deux Binômes $(ax + b)(cx + d)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme, et d'un produit

valeur de x	...	...	...	...
Signe de $(18 - 3x)$	...	...	...	
Signe de $(4x - 8)$	...	...	...	
Signe de $f'(x)$	...	...	...	

Annulations

- $4x - 8 = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$
- $18 - 3x = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

4) Variations de f sur $[0; 10]$

valeur de x	...	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	...	...	
Variations de f				

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(10) = ...$
- $f(10) = ...$

5) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Exercice 21 : **Exemples d'études de fonctions du second degré**

(a) pour chacun des cas ci dessous
- calculer $f'(x)$
- étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$
- en déduire le tableau de variations de f

  i. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

  ii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$

(b) un artiste réalise et vend de petites créations sur le marché et remarque qu'en moyenne :
- s'il vend ses créations 90 € alors il en vend 10 par mois
- chaque baisse de prix de 1 € augmente le nombre de ventes mensuelles de 5 ventes
- chaque création lui coûte 40 €
- la location mensuelle de l'emplacement de ventes est de 600 €

  i. calculer le bénéfice mensuel réalisé par l'artiste

    A. s'il ne baisse pas son prix de vente

    B. s'il baisse son prix de 4 €

    C. s'il baisse son prix de 44 €

  ii. montrer que s'il baisse le prix de vente de x € alors le bénéfice mensuel est donné par :

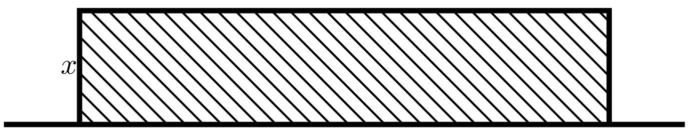
    A. $B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600$

    B. $B(x) = -5x^2 + 240x - 100$

  iii. étudier les variations de B sur $[-2\ ;\ 90]$

  iv. en déduire le prix de vente "idéal" (pour l'artiste) ainsi que le bénéfice maximal

Exercice 22 : (enclos de plus grande aire de périmètre donné)
on souhaite réaliser un enclos rectangulaire avec la totalité d'une corde de longueur 20 m
l'enclos est délimité par un mur sur un de ses cotés et par la totalité de la corde sur les trois autres cotés
On cherche les dimensions (longueur et largeur) de l'enclos afin que celui ci ait une aire maximale



on appelle x la longueur d'un des cotés perpendiculaire au mur

1. montrer que si $x = 2$ alors $Aire\ de\ l'enclos = 32m^2$
2. montrer que l'aire A de l'enclos est donnée en fonction de x par : $A(x) = -2x^2 + 20x$ pour $x \in [0; 10]$
3. étude des variations de A sur $[0\ ;\ 10]$
   (a) calculer $A'(x)$
   (b) étudier l'annulation et le signe de $A'(x)$ et en déduire le tableau de variations ainsi que les extremums de A sur $[0\ ;\ 10]$
   (c) en déduire la valeur de x qui donne l'aire maximale et donner cette aire maximale

Exercice 23 : **Exemples d'études de fonctions du troisième degré**

(a) pour chacun des cas ci dessous

— vérifier que $f'(x)$ est bien égal à ce qui est proposé

— étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$

— en déduire le tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

i. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x \\ f'(x) = -2(2x-4)(3x+12) \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

ii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -8x^3 + 60x^2 - 150x + 125 \\ f'(x) = -6(2x-5)^2 \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

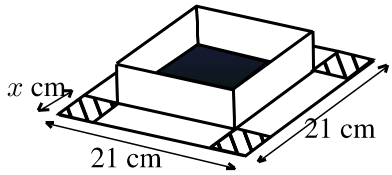
iii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \\ f'(x) = 9(x-1)^2 + 1 \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

Exercice 24 : *(Exemple d'étude d'une fonction du quatrième degré)* :

étudier les variations de la fonction définie par $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ pour $x \in [-10; 10]$

Exercice 25 : « D'une feuille faire une boite » :

D'une feuille carrée de coté 21 cm on enlève un carré de coté x cm à chaque coin, on obtient ainsi le patron d'un pavé droit. (boite) On s'intéresse au volume V de la boite en fonction de la longueur du coté des carrés enlevés. On cherche quelle valeur de x correspond à la boîte de plus grand volume ($V = l \times L \times h$)



1. montrer que si $x = 2$
   largeur de la boite $= L = 17$ et *longueur de la boite* $= l = 17$
   hauteur de la boite $= h = 2$
   volume de la boite $= V = 578cm^3$
2. montrer que si $x = 8$ alors $V = 200cm^3$
3. montrer qu'en fonction de x on a $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 441x$
4. étude des variations de V sur $[0\ ;\ 10,5]$
   (a) calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = -3(-2x+7)(2x-21)$
   (b) étudier l'annulation et le signe de $V'(x)$ et en déduire le tableau de variations ainsi que les extremums de V sur $[0\ ;\ 10,5]$
   (c) en déduire à $0,1$ cm près, la valeur de x qui donne le volume maximal et donner ce volume maximal à $1cm^3$ près

Exercice 26 : Le coût total de production, en euros, de x centaines de kg de produit est donné par :

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 100 \text{ pour } x \in [0 ; 10].$$

La recette des ventes est donnée par : recette = prix de vente unitaire×nombre de ventes = R(x)= $p_u \times x$
Le bénéfice est donné par : Bénéfice = recette - coût total = $B(x) = R(x) - C(x)$
La centaine de kg de produit est vendu 50 euros.

(a) Etude du bénéfice.

i. Montrer que le bénéfice est donné par $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 100$.

ii. Montrer que $B'(x) = (-3x + 18)(x + 2)$ et en déduire les variations de B sur $[0 ; 10]$.

iii. En déduire la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal et donner à un euro près ce bénéfice maximal

iv. Retrouver la courbe du coût et celle de la recette parmi celles données ci dessous et retrouver graphiquement le bénéfice maximal par deux méthodes. (expliquer)

(b) Intervalle de rentabilité.

i. Déduire du graphique ci dessous le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$ sur $[0 ; 10]$.

ii. Déterminer chacune d'elle à 10^{-2} près grâce à la calculatrice.

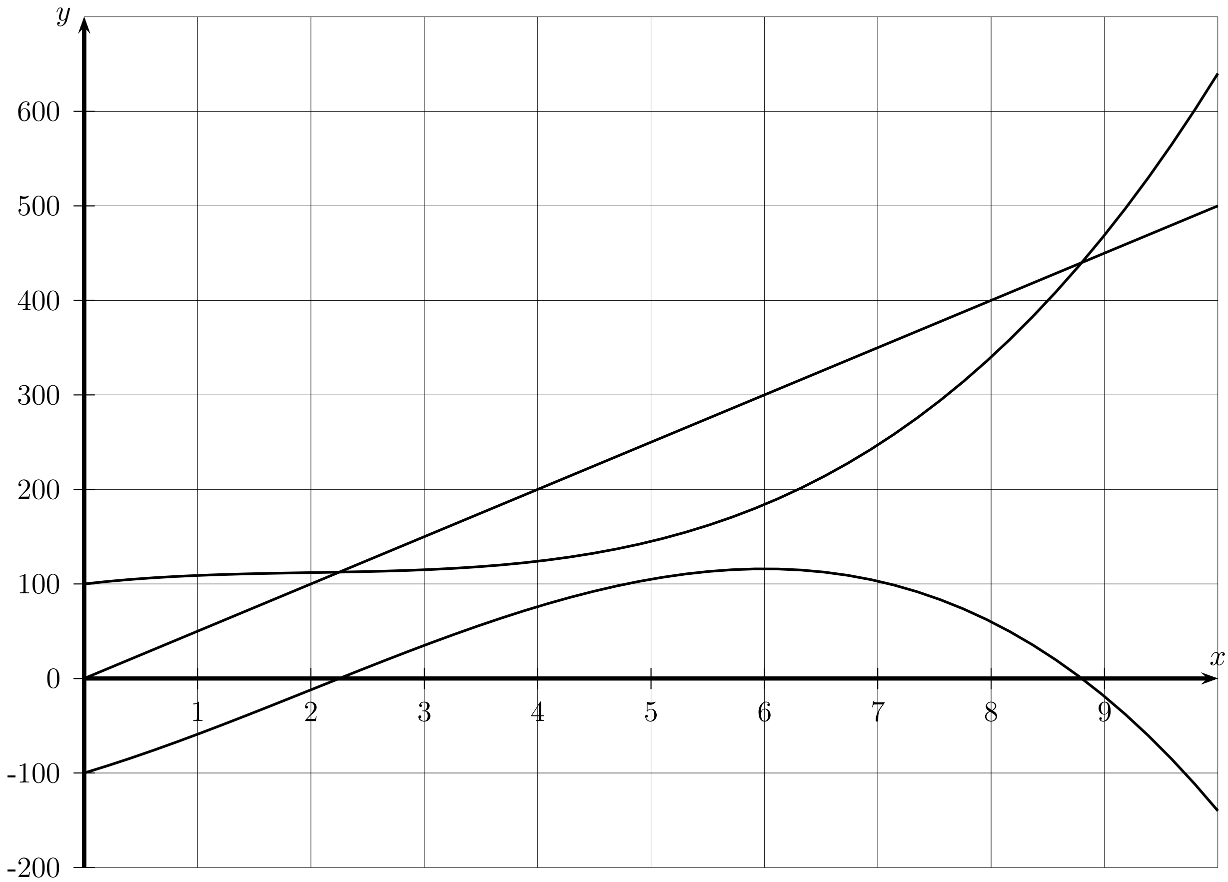
iii. En déduire le signe de $B(x)$ sur $[0 ; 10]$.

iv. En déduire les valeurs de la production qui donnent un bénéfice positif strict.

v. Retrouver l'intervalle de rentabilité graphiquement par deux méthodes.

(c) Prix minimal de vente.

Pour un prix de vente de a euros la centaine de kilos, la recette est donnée par $R(x) = ax$
Déterminer graphiquement la valeur minimale de a pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice.



Exercice 27 : étude de fonction rationnelle

ce mois ci, une centrale de distribution fournit de manière exclusive 120 magasins d' un département qui compte 150 points de ventes au total.
on suppose que dans ce département, en moyenne et chaque mois, il se crée 4 nouveaux points de ventes et que la centrale de distribution arrive à convaincre un de ces 4 nouveaux points de ventes d'être son fournisseur exclusif.

i. calculer selon les données ci dessus la proportion des points de ventes que « détient » la centrale ce mois ci ainsi que dans 30 ans.

ii. montrer que la proportion des points de ventes détenus par la centrale dans x mois est donnée par $p(x) = \dfrac{x+120}{4x+150}$ pour $x \geq 0$

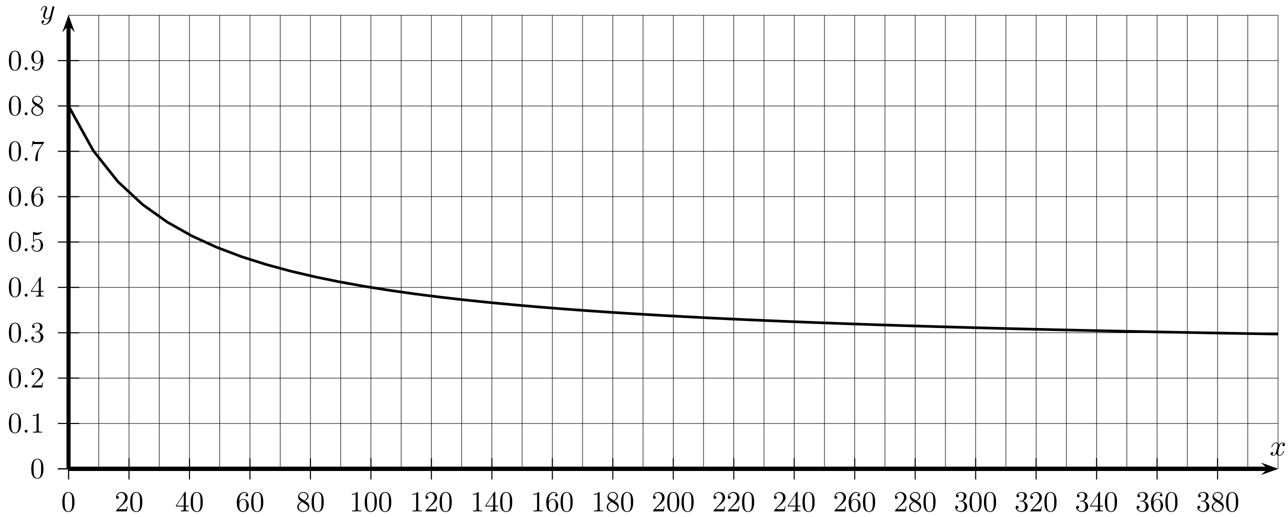
iii. étudier les variations de p sur $x \in [0; 360]$

iv. la centrale de distribution gagne t-elle ou perd-elle des points de ventes mensuellement ? (justifier)

v. dans combien de mois la centrale n'aurait-elle plus que 40% (puis 25%) des points de ventes ?

vi. que semble t-il pour le pourcentage quand x devient très grand ($x = 10000$ par exemple) ? donner une interprétation graphique.

Annexe : (courbe de p)



Exercice 28 : étude de fonction rationnelle

il y a actuellement 10000 personnes dans un stade dont 4000 femmes et 6000 hommes
on suppose qu'il part chaque minute 100 femmes et 100 hommes (sans aucune arrivée)

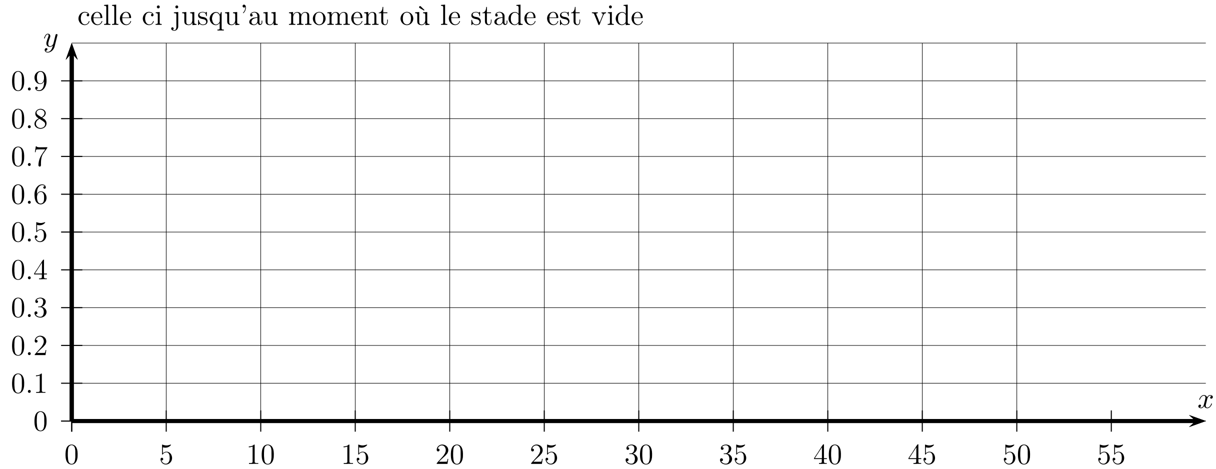
i. calculer la proportion d'hommes actuellement ainsi que dans une une demi-heure.

ii. montrer que la proportion d'hommes dans x mn est donnée par $h(x) = \dfrac{-x+60}{-2x+100}$ pour $0 \leq x \leq 40$

iii. étudier les variations de h sur $[0; 40]$

iv. commentez la "variation des hommes" dans le stade sur les premières 40 minutes de sortie du stade

v. tracer la courbe de h, pour la sortie des hommes du stade sur les premières 40 minutes de sortie et compléter celle ci jusqu'au moment où le stade est vide



Exercice 29 : **étude de fonction rationnelle**

(a) soit C la fonction définie par $C(x) = 6x^2 - 240x + 5400$ sur $[10; 90]$
soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ sur $[10; 90]$

i. montrer que pour la fonction f, on peut aussi écrire : $f(x) = 6x - 240 + \dfrac{5400}{x}$

ii. calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{6(x-30)(x+30)}{x^2}$

iii. en déduire les variations de f sur $[10; 90]$

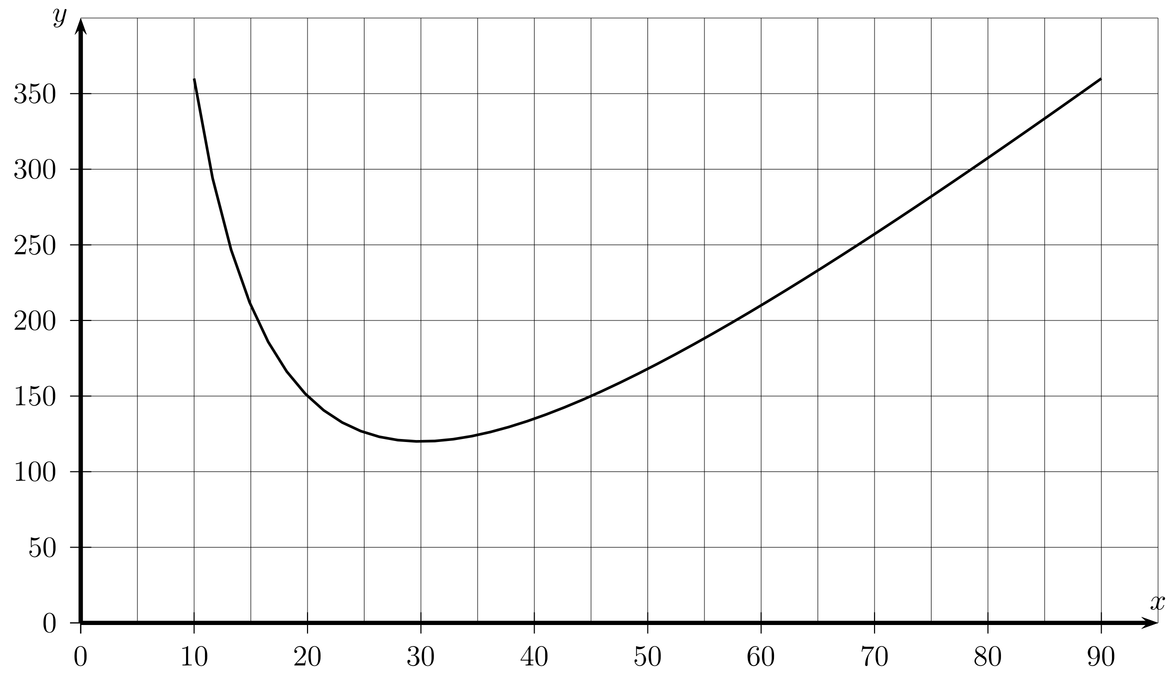
iv. en déduire les extremums de f sur $[10; 90]$

(b) Dans une entreprise
le coût total de production de q objets est donné en euros par $C(q) = 6q^2 - 240q + 5400$ pour $q \in [10; 90]$
le coût moyen unitaire pour la fabrique de q objets est noté $C_m(q)$

i. montrer que $C_m(q) = f(q)$ où f est la fonction de la partie précédente

ii. déduire de l'étude de f la valeur de la production pour laquelle le coût moyen unitaire est minimum ainsi que la valeur du coût unitaire associée

iii. retrouver ce résultat graphiquement ci dessous grâce à la courbe de f



(c) le prix de vente unitaire est de 150 € par objets

i. tracer dans le repère précédent la droite d'équation $y = 150$

ii. en déduire les valeurs de la production pour lesquelles le coût moyen de production par objet est strictement inférieur à 150 euros et en déduire l'intervalle de rentabilité.

iii. sous quel prix de vente unitaire ne faut-il pas descendre sous peine de ne pas pouvoir réaliser un bénéfice (positif) ?

iv. montrer que le bénéfice des ventes de x objets est donné par $B(x) = -6x^2 + 390x - 5400$ sur $[10; 90]$

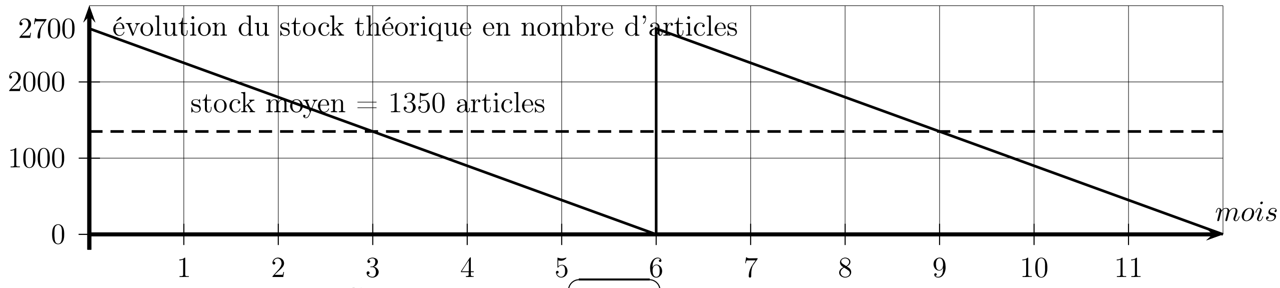
v. étudier les variations de B sur $[10; 90]$ et en déduire la production qui assure un bénéfice maximal

vi. est-ce la même production qui minimise le coût unitaire et qui maximise le bénéfice ? laquelle des deux options est préférable pour l'entreprise ?

vii. peut-on retrouver "simplement" le bénéfice maximal grâce au graphique ci dessus ?

Exercice 30 : **fonction rationnelle et modèle de Wilson - Coût de Passation, Coût de Possession**

(a) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à 5400 articles.
Le prix de chaque article est de 10 euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de 120 euros. *(frais de dossier, ...)*
Le coût de possession est de 16% du stock moyen en euros *(coût de stockage proportionnel au stock)*
On suppose les délais de réapprovisionnement nuls et une livraison immédiate.
On cherche le nombre de commandes idéal dans le sens ou il minimise le coût total constitué de la somme du coût de passation et du coût de possession.
Par exemple :
pour 2 commandes de $\dfrac{5400}{2} = 2700$ articles



le coût de passation est de $C_{pas} = 2 \times 120 = \boxed{240\text{ €}}$

stock moyen (en articles) : $S_{ma} = \dfrac{\dfrac{5400}{2} + 0}{2} = 1350$ articles

stock moyen (en €) : $S_m = 1350 \times 10 = \boxed{13500\text{ €}}$

le coût de possession est donné par : $C_{pos} = 16\%\ de\ S_m = \dfrac{16}{100} \times 13500 = \boxed{2160\text{ €}}$

le coût total pour 2 commandes est donc $C_T = C_{pos} + C_{pas} = 240 + 2160 = \boxed{2400\text{ €}}$

i. montrer que pour 3 commandes annuelles le coût total est de $C_T(3) = 1800$ €

ii. montrer que pour $x \geq 1$ commandes annuelles le coût total est donné par :
$C_T(x) = \dfrac{120x^2 + 4320}{x}$

iii. montrer que $C_T'(x) = \dfrac{120x^2 - 4320}{x^2}$ et que aussi $C_T'(x) = \dfrac{120(x-6)(x+6)}{x^2}$

iv. en déduire les variations de C_T sur $[1; 100]$

v. en déduire le nombre x_0 de commandes à choisir pour un coût total minimum et donner ce coût minimum

vi. comparer les coûts de passation et de possession dans le cas de x_0 commandes

(b) Pour une autre grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à $C = 6400$ articles.
Le prix de chaque article est de $p = 5$ €.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de $P = 100$ €.
Le coût de possession est de 10% du stock moyen en euros
Soit x le nombre de commandes dans l'année pour assurer la consommation prévisionnelle.

i. montrer que le coût total est donné par $C_T(x) = \dfrac{100x^2 + 1600}{x}$

ii. calculer $C_T'(x)$

iii. étudier le signe de $C_T'(x)$ et en déduire les variations de C_T sur $[1; 10]$
en déduire le nombre de commandes x_0 à choisir pour un coût total minimum et donner ce coût minimum

(c) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à C articles.
Le prix de chaque article est de p euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de P euros.
Le coût de possession est de $t\%$ du stock moyen en euros
Soit x le nombre de commandes dans l'année

i. montrer que le coût total est donné par $C_T(x) = Px + \dfrac{tCp}{200x}$

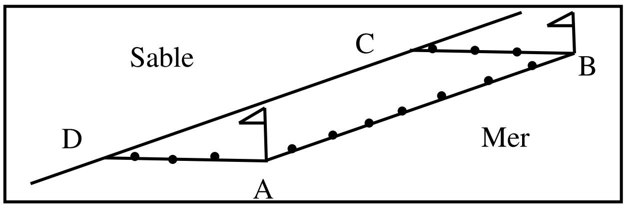
ii. montrer que $C_T'(x) = \dfrac{P(x - \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})(x + \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})}{x^2}$

iii. étudier le signe de $C_T'(x)$ et en déduire les variations de C_T
en déduire le nombre de commandes x_0 à choisir pour un coût total minimum

(d) à l'aide de la deuxième partie, retrouver le résultat trouvé à la première partie pour x_0 en prenant les bonnes valeurs de $t,\ C,\ P$ et p

Exercice 31 : **piscine d'aire donnée et de périmètre minimal**

Des animateurs doivent délimiter une piscine de mer de $100m^2$ pour les enfants d'une colonie



Ils utiliseront du "fil bouée"
La piscine $ABCD$ sera rectangulaire et il n'y aura pas de fil bouée sur le sable entre C et D
Ils cherchent à quelle distance $x = AD$ placer les bouées A et B pour que le longueur totale L de fil bouée utilisée soit minimale

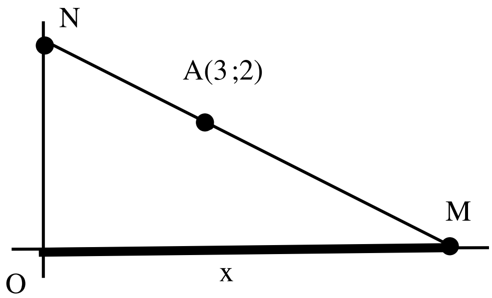
1. montrer que si $x = AD = 2$ alors $AB = 50$ et $L = 54$
2. calculer L si $x = 4$
3. montrer qu'en fonction de x, on a $L(x) = \dfrac{2x^2 + 100}{x}$
4. étude des variations de la fonction L pour $x \in]0; +\infty[$
   (a) calculer $L'(x)$
   (b) étudier l'annulation et le signe de $L'(x)$ et en déduire les variations de L sur $]0; +\infty[$
   (c) en déduire à $1cm$ près la longueur de fil bouée cherchée

Exercice 32 : **rectangle de périmètre minimal**

Parmi tous les rectangles d'aire 10 cm^2,
trouver les dimensions de celui qui a le plus petit périmètre,
et donner ce périmètre minimal

Exercice 33 : *(étude d'une fonction rationnelle)*

$A(3; 2)$
M d'abscisse $x > 3$ se déplace sur l'axe des abscisses
N est le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite (MA)
On cherche la position du point M qui permet de minimiser l'aire du triangle OMN

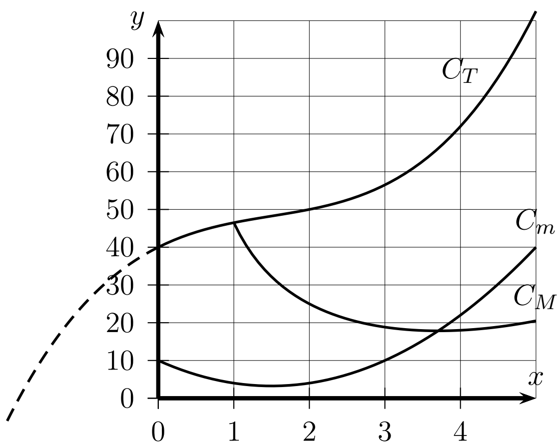


1. conjecturer la valeur de x cherchée grace à geogebra
2. démontrer la conjecture ci dessus par une étude de fonction
   (montrer que Aire$(OMN) = \dfrac{x^2}{x-3}$)

Exercice 34 : **fonction intermédiaire**

Une entreprise fabrique un certain objet.
On estime que le coût total de production C_T est donné en centaines d'euros en fonction du nombre x de centaines d'objets produits par : $C_T(x) = x^3 - 4,5x^2 + 10x + 40$ où $x \in [0;5]$
on cherche quelle est la valeur de la "production idéale" $x = x_0$

1. étude du coût total sur $[0;5]$
   (a) démontrer que le coût total est strictement croissant
   (b) à partir d'une visualisation de la courbe du coût total *(à la calculatrice)*, peut-on dire que le coût total augmente toujours "à la même vitesse" ? pour quelle valeur de x la vitesse semble t-elle la plus petite ?
2. étude du coût marginal
   le coût marginal $C_m(x)$ est, par définition, pour une production x donnée, égal à la variation du coût total pour une augmentation d'une unité de la production, soit, $C_m(x) = C_T(x+1) - C_T(x)$
   dans la pratique considère que l'on a : $C_m(x) = C'_T(x)$ *(car les deux valeurs sont en général relativement proches l'une de l'autre)* (C_m mesure la "vitesse de variation" du coût total)
   (a) montrer que $C_m(x) = 3x^2 - 9x + 10$
   (b) étudier les variations de C_m sur $[0;5]$
   (c) est-ce cohérent avec la courbe de C_m obtenue à la calculatrice ?
   (d) pour quelle production, une augmentation de la production d'une unité engendre t-elle la plus faible augmentation du coût total ?
3. étude du coût moyen sur $[1;5]$
   Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production et on le note généralement C_M avec $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$
   (a) soit la fonction (auxiliaire) f définie sur $[1;5]$ par $f(x) = 2x^3 - 4,5x^2 - 40$
      i. étudier les variations de f sur $[0;5]$ et donner son tableau de variations
      ii. on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1;5]$
      donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près
      iii. en déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0;5]$
   (b) montrer que $C'_M(x) = \dfrac{2x^3 - 4,5x^2 - 40}{x^2}$
   (c) déduire de l'étude de la fonction auxiliaire f précédente, l'annulation et le signe de $C'_M(x)$ ainsi que le tableau de variation de C_M sur $[1;5]$
   (d) quelle production donne le coût moyen minimal ?
   (e) est-ce cohérent avec la courbe de C_M obtenue à la calculatrice ?
   (f) montrer sur le graphique que : "la production qui minimise le coût moyen est celle pour laquelle le coût marginal est égal au coût moyen"



Exercice 35 :

Pour une entreprise qui produit et vend un produit chimique,
on dispose des données suivantes :
Coût unitaire d'achat du produit brut : 2 €/litre
Coût unitaire de traitement : 3 €/litre
Pour un prix unitaire de vente de 3 €/litre, par conditionnemment de 50 litres,
il y a alors 100 ventes par jour *(en moyenne)*
Chaque fois que le prix du litre est augmenté de 0,1 €, le conditionnement augmente de 10 litres et le nombre de ventes diminue de 1
On cherche alors le prix de vente qui permet d'obtenir le bénéfice maximal
On note x le nombre de fois que l'on augmente le prix de vente

1. Etude numérique :
   (a) compléter le tableau suivant

nombre d'augmentations x	0	50	80	x
prix de vente unitaire (€) $p(x)$				
conditionnement (litres) $l(x)$				
nombre de ventes $n(x)$				
volume des ventes (litres) $V(x)$				
chiffre d'affaire (k€) $R(x)$				
coût total *(achat + traitement)* (k€) $C(x)$				
Bénéfice (k€) $B(x)$				

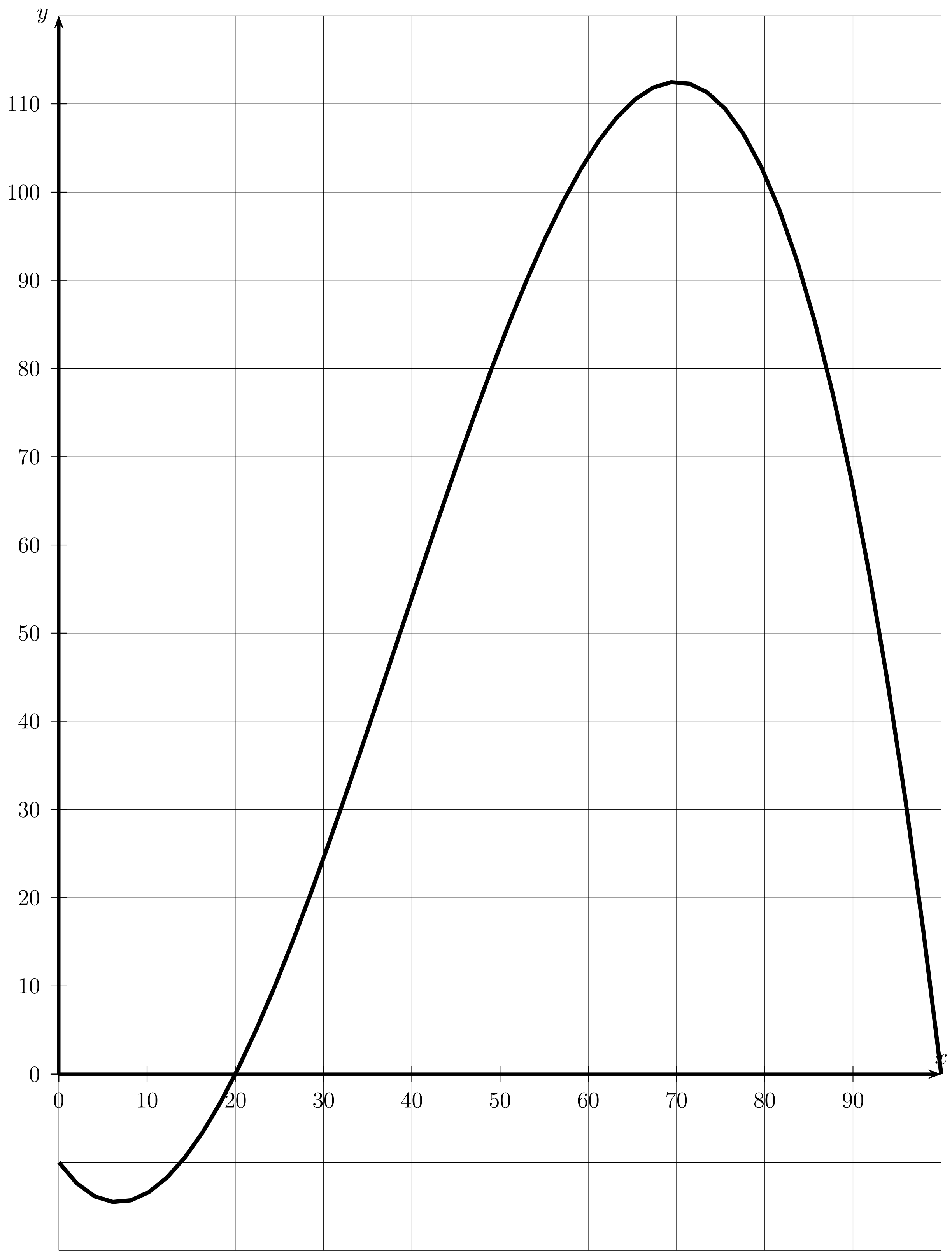
   (b) plus le prix de vente augmente et plus le bénéfice augmente : (vrai / faux / autre)

   ...

   (c) semble t-il exister un prix idéal ? : ...

2. Etude Algébrique
   (a) montrer que le bénéfice est donné en euros par $B(x) = (50 + 10x)(100 - x)(0,1x - 2)$
   (b) déterminer le signe de $B(x)$ en fonction de x et en déduire les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif (intervalle de rentabilité)
   (c) montrer que $B(x) = -x^3 + 115x^2 - 1400x - 10000$
   (d) calculer $B'(x)$
   (e) montrer que $B'(x) = (70 - x)(3x - 20)$
   (f) étudier l'annulation et le signe de $B'(x)$
   (g) en déduire les variations de B sur [0 ;100]
   (h) en déduire les extremums de B sur [0 ;100]
   (i) quel est alors le prix idéal de vente et quel est le bénéfice associé ?

3. Etude Graphique à partir de la courbe de B

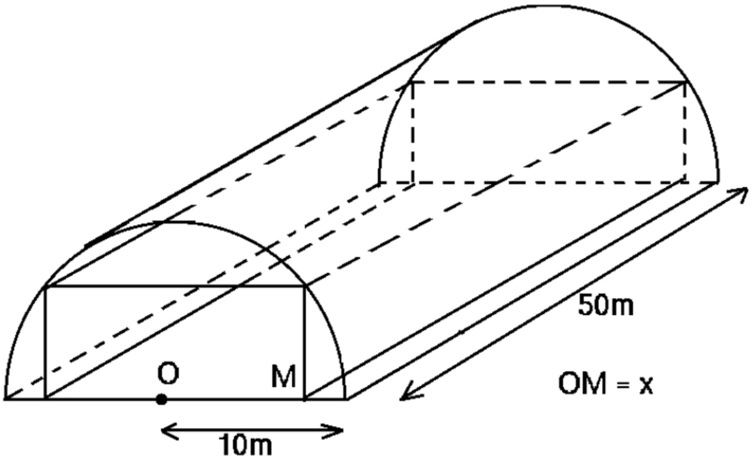


(a) retrouver l'intervalle de rentabilité graphiquement

(b) retrouver le bénéfice maximal graphiquement

(c) pour quels prix de ventes le bénéfice est-il d'au moins 100 000 € ?

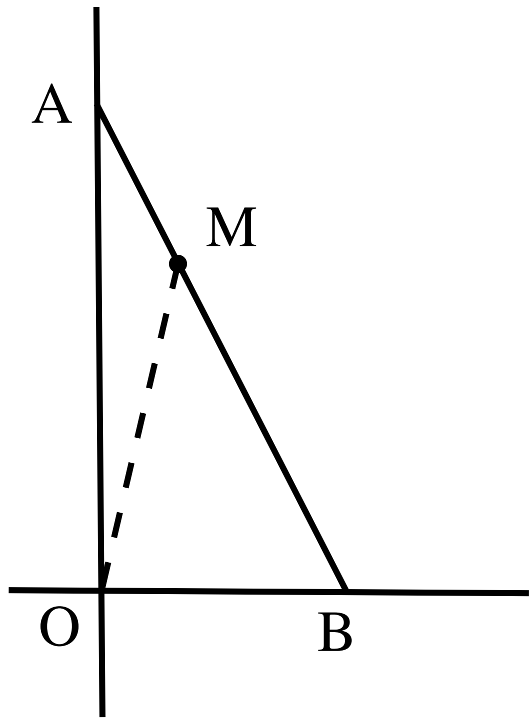
Exercice 36 : : *(volume maximal)*
Un architecte doit construire un hangar parallélépipédique *(pavé droit, type boite à chaussures)* de volume maximal sous une toîture déja construite.
Cette toîture est un demi tube de 50m de long et de 10m de rayon de centre O.
O est aussi le centre de la base du rectangle de face.
On cherche les dimensions de ce hangar "idéal" *(longueur = 50, hauteur = h = ?, largeur = l = ?)* ainsi que son volume V =?
On pose : x =OM
On cherche : la valeur de x qui convient
On en déduira alors : les dimensions h et l ainsi que le volume V cherché



On cherche x = ?
pour que le volume du pavé droit inscrit dans le demi tube de rayon 10 et de longueur 50 soit maximal

1. Exprimer l et h en fonction de x et préciser l'intervalle I des valeurs possibles pour x
2. Montrer que le volume du pavé droit est donné en fonction de x par : $V(x) = 100x\sqrt{100 - x^2}$
3. Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = \dfrac{-200x^2 + 10000}{\sqrt{100 - x^2}}$
4. Etudier le signe de $V'(x)$
5. En déduire le tableau de variations de V sur l'intervalle I
6. En déduire les réponses aux questions initiales.

Exercice 37 : : *($f = \sqrt{u}$)*



Placer dans un repère orthonormal d'origine O et d'unités 1cm les points $A(0;4)$ et $B(2;0)$ puis construire le segment $[AB]$

Un point $M(x;y)$ se déplace sur le segment $[AB]$ de A vers B

1. à l'oeil :
   trouver graphiquement la position de M pour laquelle la distance OM est minimale et donner les valeurs de ses coordonnées x_M et y_M ainsi que la distance OM à 0,1 près

2. par une étude de fonction :
   (a) montrer que $y = -2x + 4$
   (b) montrer que $OM = \sqrt{x^2 + (4-2x)^2}$
   (c) déduire du résultat précédent que $OM = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$
   (d) soit la fonction f définie pour $x \in [0;2]$ telle que $f(x) = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$
      i. montrer que $f'(x) = \dfrac{5x-8}{\sqrt{5x^2-16x+16}}$ *rappel :* $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
      ii. en déduire les variations de f sur $[0;2]$
   (e) en déduire les coordonnées exactes de M pour que OM soit minimale et donner cette valeur minimale
   (f) ce résultat est-il cohérent avec celui trouvé à l'oeil ?

4.5 corrigés exercices

Corrigé exercice 17 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = -3x^2 + 30x + 10}$ sur l'intervalle $\boxed{[0; 10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = -3x^2 + 30x + 10$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Binôme $(ax + b)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme

valeur de x	... ...
Signe de $f'(x) = ...$	... 0 ...

- Signe de $a = ...$ à droite

Annulation de $f'(x)$

- $... = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

3) Variations de f sur $[0; 10]$

valeur de x	... ...
Signe de $f'(x) = ...$	... 0 ...
Variations de f	

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$

4) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Corrigé exercice 18 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = 4x^2 - 32x + 100}$ sur l'intervalle $\boxed{[0; 10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = 4x^2 - 32x + 100$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Binôme $(ax + b)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme

valeur de x	... ...
Signe de $f'(x) = ...$	... 0 ...

- Signe de $a = ...$ à droite

Annulation de $f'(x)$

- $... = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

3) Variations de f sur $[0; 10]$

valeur de x	... ...
Signe de $f'(x) = ...$	... 0 ...
Variations de f	

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$

4) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Corrigé exercice 19 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 10}$ sur l'intervalle $\boxed{[0; 10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 10$
- $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 30 \times 2x + 126 + 0$
- $f'(x) = 6x^2 - 60x + 126$

2) Factorisation de $f'(x)$

- Montrons que $f'(x) = (-2x + 6)(-3x + 21)$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = (-2x) \times (-3x) + (-2x) \times (21) + (6) \times (-3x) + (6) \times (21)$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = 6x^2 - 42x - 18x + 126$
- $(-2x + 6)(-3x + 21) = 6x^2 - 60x + 126 = f'(x)$

3) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Produit de deux Binômes $(ax + b)(cx + d)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme, et d'un produit

valeur de x	0		3		7		10
Signe de $(-2x + 6)$		+	0	−	|	−	
Signe de $(-3x + 21)$		+	|	+	0	−	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

Annulations

- $-2x + 6 = 0$
- $-2x = -6$
- $x = \frac{-6}{-2}$
- $x = 3$
- $-3x + 21 = 0$
- $-3x = -21$
- $x = \frac{-21}{-3}$
- $x = 7$

4) Variations de f sur $[0; 10]$

valeur de x	0		3		7		10
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f	10	↗	172	↘	108	↗	270

- $f(0) = 2 \times 0^3 - 30 \times 0^2 + 126 \times 0 + 10$
- $f(0) = 10$
- $f(3) = 2 \times 3^3 - 30 \times 3^2 + 126 \times 3 + 10$
- $f(3) = 172$
- $f(7) = 2 \times 7^3 - 30 \times 7^2 + 126 \times 7 + 10$
- $f(7) = 108$
- $f(10) = 2 \times 10^3 - 30 \times 10^2 + 126 \times 10 + 10$
- $f(10) = 270$

5) Extremums de f

- Le maximum de f vaut 270 et est atteint pour $x = 10$
- Le minimum de f vaut 10 et est atteint pour $x = 0$

Corrigé exercice 20 :

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $\boxed{f(x) = -4x^3 + 48x^2 - 144x + 200}$ sur l'intervalle $\boxed{[0;10]}$ grâce à la dérivation

1) Calcul de la Dérivée : $f'(x) = ?$

- $f(x) = -4x^3 + 48x^2 - 144x + 200$
- $f'(x) = ...$
- $f'(x) = ...$

2) Factorisation de $f'(x)$

- Montrons que $f'(x) = (4x-8)(18-3x)$
- $(4x-8)(18-3x) = ...$
- $(4x-8)(18-3x) = ...$
- $(4x-8)(18-3x) = ...$

3) Annulation et Signe de $f'(x)$

- $f'(x)$ est un Produit de deux Binômes $(ax+b)(cx+d)$
- on utilise la règle du signe d'un Binôme, et d'un produit

valeur de x	...	...	...	...
Signe de $(18-3x)$	...	...	...	
Signe de $(4x-8)$	...	...	...	
Signe de $f'(x)$	...	...	...	

Annulations

- $4x - 8 = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$
- $18 - 3x = 0$
- ...
- ...
- $x = ...$

4) Variations de f sur $[0;10]$

valeur de x	...	...	...	...
Signe de $f'(x) = ...$	...	...	...	
Variations de f				

- $f(0) = ...$
- $f(0) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(...) = ...$
- $f(10) = ...$
- $f(10) = ...$

5) Extremums de f

- Le maximum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$
- Le minimum de f vaut ... et est atteint pour $x = ...$

Corrigé exercice 21 : **Exemples d'études de fonctions du second degré**

(a) i. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- $f'(x) = 2x - 4$
- Annulation de $f'(x)$: $2x - 4 = 0 \iff x = \dfrac{4}{2} = 2$
- variations de f et signe de $f'(x) = 2x - 4$: on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$ (signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+ (a =2)	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$

ii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$

- $f'(x) = -6x + 6$
- Annulation de $f'(x)$: $-6x + 6 = 0 \iff x = \dfrac{-6}{-6} = 1$
- variations de f et signe de $f'(x) = -6x + 6$: on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$ (signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	- (a =-6)	
$f(x)$	-∞	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-∞

$f(1) = -3 \times 1^2 + 6 \times 1 - 5 = -2$

(b) un artiste réalise et vend de petites créations sur le marché :

i. calculer le bénéfice mensuel réalisé par l'artiste

A. s'il ne baisse pas son prix de vente : $B(0) = 90 \times 10 - 40 \times 10 - 600 = 900 - 400 - 600 = \boxed{-100}$

B. s'il baisse son prix de 4 € :
$B(4) = (90 - 4) \times (10 + 5 \times 4) - 40(10 + 5 \times 4) - 600 = 86 \times 30 - 40 \times 30 - 600 = \boxed{780}$

C. s'il baisse son prix de 44 € :
$B(44) = (90 - 44) \times (10 + 5 \times 44) - 40(10 + 5 \times 44) - 600 = 46 \times 230 - 40 \times 230 - 600 = \boxed{780}$

ii. A. bénéfice = recette - coût total
bénéfice = prix de vente $\times$ nombre de ventes - coût unitaire $\times$ nombre de ventes - coût fixe
$\boxed{B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600}$

B. $B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600$ (on développe)
$B(x) = 900 + 450x - 10x - 5x^2 - 400 - 200x - 600$ donc $\boxed{B(x) = -5x^2 + 240x - 100}$

iii. étudier les variations de B sur $[-2; 90]$

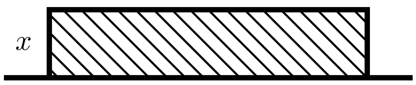
• $B'(x) = -10x + 240$
• Annulation de $f'(x)$: $-10x + 240 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-240}{-10} = 24$
• variations de B et signe de $B'(x) = -10x + 240$
on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$ (signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	-2		24		90
$B'(x) = -10x + 240$		$+$	0	- (a =-10)	
$B(x) = -5x^2 + 240x - 100$	-600	$\nearrow$	2780	$\searrow$	-19000

$B(24) = -5 \times 24^2 + 240 \times 24 - 100 = 2780$

iv. en déduire le prix de vent "idéal" (pour l'artiste) ainsi que le bénéfice maximal
bénéfice maximal = 2780 euros prix idéal $= 90 - 24 = 66$ euros

Corrigé exercice 22 : (enclos de plus grande aire de périmètre donné)

x 

on appelle x la longueur d'un des cotés perpendiculaire au mur

1. si $x = 2$ alors $largeur = 2,\ longueur = 20 - 2 \times 2 = 16\ donc\ Aire\ de\ l'enclos = 2 \times 16 = \boxed{32m^2}$
2. aire A en fonction de x par : $A(x) = x \times (20 - 2x) = \boxed{-2x^2 + 20x}$
3. variations de A sur $[0\ ;\ 10]$
• $A'(x) = -4x + 20$
• Annulation de $A'(x)$: $-4x + 20 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-20}{-4} = 5$
• variations de A et signe de $A'(x) = -4x + 20$
on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$
(signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	0		5		10
$A'(x) = -4x + 20$		$+$	0	- (a =-4)	
$A(x) = -2x^2 + 20x$	0	$\nearrow$	50	$\searrow$	0

$A(0) = -2 \times 0^2 + 20 \times 0 = 0$

$\begin{cases} \text{maximum} = 50 \text{ pour x} = 5 \\ \text{minimum} = 0 \text{ pour x} = 0 \text{ et x} = 10 \end{cases}$

4. la valeur de x qui donne l'aire maximale est $\boxed{x = 5}$ et $\boxed{\text{aire maximale} = 50m^2}$

Corrigé exercice 23 : Exemples d'études de fonctions du troisième degré

(a) pour chacun des cas ci dessous

— vérifier que $f'(x)$ est bien égal à ce qui est proposé

— étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$

— en déduire le tableau de variations de f sur $[-10; 10]$

i. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \boxed{f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x} \\ f'(x) = -2(2x-4)(3x+12) \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

— calcul de $f'(x)$

$f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x$

$f'(x) = -4 \times 3x^2 - 12 \times 2x + 96$

$\boxed{f'(x) = -12x^2 - 24x + 96}$

— développement et vérification

$-2(2x-4)(3x+12) = -2(6x^2 + 24x - 12x - 48)$

$-2(2x-4)(3x+12) = -2(6x^2 + 12x - 48)$

$-2(2x-4)(3x+12) = -12x^2 - 24x + 96$

$\boxed{-2(2x-4)(3x+12) = f'(x)}$

— annulation de $f'(x)$

$f'(x) = 0$

annulation avec la forme factorisée :

$-2(2x-4)(3x+12) = 0$

$(2x-4)(3x+12) = \dfrac{0}{-2} = 0$

$(2x-4) = 0$ ou $(3x+12) = 0$

$x = \dfrac{4}{2} = 2$ ou $x = \dfrac{-12}{3} = -4$

$\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 2}$

annulation avec le discriminant :

$f'(x) = 0$

$-12x^2 - 24x + 96 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-24)^2 - 4 \times (-12) \times 96 = 5184$

$\Delta > 0$ donc deux annulations

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) + \sqrt{5184}}{2 \times (-12)} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) - \sqrt{5184}}{2 \times (-12)} = 2$$

$\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 2}$

— signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-10; 10]$

x	-10		-4		2		$+10$
$f'(x) = -12x^2 - 24x + 96$		-	0	+	0	-	
$f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 96x$	1840	↘	-320	↗	112	↘	-4240

$f(2) = -4 \times 2^3 - 12 \times 2^2 + 96 \times 2 = 112$

ii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{l} f(x) = -8x^3+60x^2-150x+125 \\ f'(x) = -3(2x-5)^2 \quad \text{(à vérifier)} \end{array}\right.$

— calcul de $f'(x)$

$f(x) = -8x^3+60x^2-150x+125$
$f'(x) = -8\times 3x^2+60\times 2x-150+0$
$\boxed{f'(x) = -24x^2+120x-150}$

— développement et vérification

$-6(2x-5)^2 = -6(4x^2-2\times 2x\times 5+5^2)$
$-2(2x-4)(3x+12) = -6(4x^2-20x+25)$
$-2(2x-4)(3x+12) = -24x^2+120x-150$
$\boxed{-6(2x-5)^2 = f'(x)}$

— annulation de $f'(x)$

annulation de $f'(x)$ avec la forme factorisée :
$f'(x) = 0$
$-6(2x-5)^2 = 0$
$(2x-5)^2 = \dfrac{0}{-6} = 0$
$(2x-5)^2 = 0$
$2x-5 = 0$
$x = \dfrac{5}{2} = 2,5$
$\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2,5}$

annulation avec le discriminant :
$f'(x) = 0$
$-24x^2+120x-150 = 0$
$\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = 120^2-4\times(-24)\times 150 = 0$
$\Delta = 0$ donc une seule annulation

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(120)}{2\times(-24)} = 2.5$
$\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 5}$

— signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-10;10]$

x	$-\infty$		$2,5$		$+\infty$
$f'(x) = -24x^2+120x-150$		- $(a=-24)$	0	-$(a=-24)$	
$f(x) = -8x^3+60x^2-150x+125$	29125		$\searrow$		-16875

$f(-10) = -8\times(-10)^3+60\times(-10)^2-150\times(-10)+125 = 29125$

iii. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \\ f'(x) = 9(x-1)^2 + 1 \quad \text{(à vérifier)} \end{cases}$

— calcul de $f'(x)$

$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 10x - 3$
$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 10 - 0$
$\boxed{f'(x) = 9x^2 - 18x + 10}$

— développement et vérification

$9(x-1)^2 + 1 = 9(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) + 1$
$9(x-1)^2 + 1 = 9(x^2 - 2x + 1) + 1$
$9(x-1)^2 + 1 = 9x^2 - 18x + 9 + 1$
$9(x-1)^2 + 1 = 9x^2 - 18x + 10$
$\boxed{9(x-1)^2 + 1 = f'(x)}$

— annulation de $f'(x)$

annulation avec la forme canonique :
$f'(x) = 0$
$9(x-1)^2 + 1 = 0$
$(9(x-1)^2 = -1$
$(x-1)^2 = -\dfrac{1}{9}$
Aucune solution dans $\mathbb{R}$ car le carré d'un réel ne peut-être négatif strict
$\boxed{f'(x) \textit{ ne s'annule pas}}$

annulation avec le discriminant :
$f'(x) = 0$
$9x^2 - 18x + 10 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 10 = -36$
$\Delta < 0$ donc aucune annulation dans $\mathbb{R}$
$\boxed{f'(x) \textit{ ne s'annule pas}}$

— signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-10; 10]$

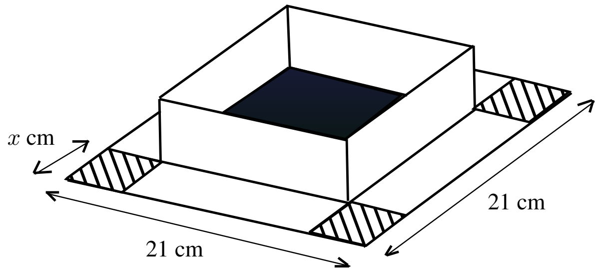
x	-10		$+10$
$f'(x) = 9x^2 - 18x + 10$		$+$	
$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 10x - 3$	-4003	$\nearrow$	2197

$f(10) = 3 \times 10^3 - 9 \times 10^2 + 10 \times 10 - 3 = 2197$

Corrigé exercice 24 : *(Exemple d'étude d'une fonction du quatrième degré)* :

étudier les variations de la fonction définie par $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ pour $x \in [-10; 10]$

Corrigé exercice 25 : « D'une feuille faire une boite » :
D'une feuille carrée de coté 21 cm on enlève un carré de coté x cm à chaque coin, on obtient ainsi le patron d'un pavé droit. (boite) On s'intéresse au volume V de la boite en fonction de la longueur du coté des carrés enlevés. On cherche quelle valeur de x correspond à la boîte de plus grand volume ($V = l \times L \times h$)



1. si $x = 2$
   $\textit{largeur de la boite} = L = 21 - 2 \times 4 = 17$ et $\textit{longueur de la boite} = l = 21 - 2 \times 2 = 17$
   $\textit{hauteur de la boite} = h = 2$
   $\textit{volume de la boite} = V = l \times L \times h = 17 \times 17 \times 2 = \boxed{578cm^3}$
2. si $x = 8$
   $\textit{largeur de la boite} = L = 21 - 2 \times 8 = 5$ et $\textit{longueur de la boite} = l = 21 - 2 \times 8 = 5$
   $\textit{hauteur de la boite} = h = 5$
   $\textit{volume de la boite} = V = l \times L \times h = 5 \times 5 \times 8 = \boxed{200cm^3}$
3. en fonction de x on a $V(x) = (21 - 2x)(21 - 2x)x = x(21 - 2x)^2$
   $V(x) = x(441 - 84x + 4x^2) = \boxed{4x^3 - 84x^2 + 441x}$
4. variations de V sur $[0\ ;\ 10,5]$
   • calcul de $V'(x)$
   $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 441x$
   $\boxed{V'(x) = 12x^2 - 168x + 441}$

   • annulation de $V'(x)$
   $V'(x) = 0$
   $12x^2 - 168x + 441 = 0$ (on utilise le discriminant)

   $\Delta = (-168)^2 - 4 \times 12 \times 441 = 7056$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux annulations

   $$x_1 = \frac{-(-168) + \sqrt{7056}}{2 \times 12} = 3,5 \text{ ou } x_2 = \frac{-(-168) - \sqrt{7056}}{2 \times 12} = 10,5$$
   $\boxed{V'(x) = 0 \iff x = 3,5 \ ou\ x = 10,5}$

   • signe de $V'(x)$ et variations de V

valeur de x	0		3,5		10,5
signe de $V'(x) = 12x^2 - 168x + 441$		+	0	-	
variations de $V(x)$	0	$\nearrow$	686	$\searrow$	0

   $V(3,5) = 4 \times 3,5^3 - 84 \times 3,5^2 + 441 \times 3,5 = 686$

5. la valeur de x qui donne le volume maximal est $\boxed{x = 3,5}$ et ce volume maximal est $\boxed{686cm^3}$

Corrigé exercice 26 :

Le coût total de production, en euros, de x centaines de kg de produit est donné par :

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 100 \text{ pour } x \in [0\ ;\ 10].$$

La recette des ventes est donnée par : recette = prix de vente unitaire×nombre de ventes = R(x)= $p_u \times x$
Le bénéfice est donné par : Bénéfice = recette - coût total = $B(x) = R(x) - C(x)$
La centaine de kg de produit est vendu 50 euros.

(a) Etude du bénéfice.

i. Montrer que le bénéfice est donné par $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 100$.

$B(x) = R(x) - C(x)$

$B(x) = 50x - (x^3 - 6x^2 + 14x + 100)$

$\boxed{B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 100}$

ii. Montrer que $B'(x) = (-3x + 18)(x + 2)$ et en déduire les variations de B sur $[0\ ;\ 10]$.
d'une part : *(on dérive)*

$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 100$

$\boxed{B'(x) = -3x^2 + 12x + 36}$

d'autre part : *(on développe)*

$(-3x + 18)(x + 2) = -3x^2 - 6x + 18x + 36$

$\boxed{(-3x + 18)(x + 2) = -3x^2 + 12x + 36}$

conclusion : *(on compare)*

$(-3x + 18)(x + 2) = B'(x)$

iii. En déduire la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal et donner à un euro près ce bénéfice maximal

x	0		6		10
$-3x+18$		+	0	-	
$x+2$		+	|	+	
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-100	$\nearrow$	116	$\searrow$	-140

annulations

$-3x + 18 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-18}{-3} = 6$

$x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2$ *(hors tableau)*

$f(6) = -6^3 + 6 \times 6^2 + 36 \times 6 - 100 = 116$

on a donc : $\boxed{B_{max} = 116 \text{ euros pour une production de } 600\ kg}$

iv. Retrouver la courbe du bénéfice et celle de la recette parmi celles données ci dessous et retrouver graphiquement le bénéfice maximal par deux méthodes. (expliquer)

On retrouve sur la courbe du bénéfice que $\boxed{B_{max} \simeq 116 \text{ euros pour } x \simeq 6}$

De même ; *le plus grand écart* entre la courbe de C et celle de R avec $R > C$ donne aussi $\boxed{B_{max} \simeq 116 \text{ euros pour}$

(b) Intervalle de rentabilité.

i. Déduire du graphique ci dessous le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$ sur $[0~;~10]$.
Il y a deux solutions $\boxed{\alpha \simeq 2,2 \text{ et } \beta \simeq 8,8}$

ii. Déterminer chacune d'elle à 10^{-2} près grâce à la calculatrice.
Grâce à la calculatrice.

x	2,25	2,26
$B(x)$	-0,0156	0,4624

donc $\boxed{\alpha \simeq 2,25 \text{ ou } 2,26}$ à 0,01 près.

x	8,79	8,8
$B(x)$	0,87	-0,032

donc $\boxed{\beta \simeq 8,79 \text{ ou } 8,8}$ à 0,01 près.

iii. En déduire le signe de $B(x)$ sur $[0~;~10]$.

x	0		α		β		10
$B(x)$		-	0	+	0	-	

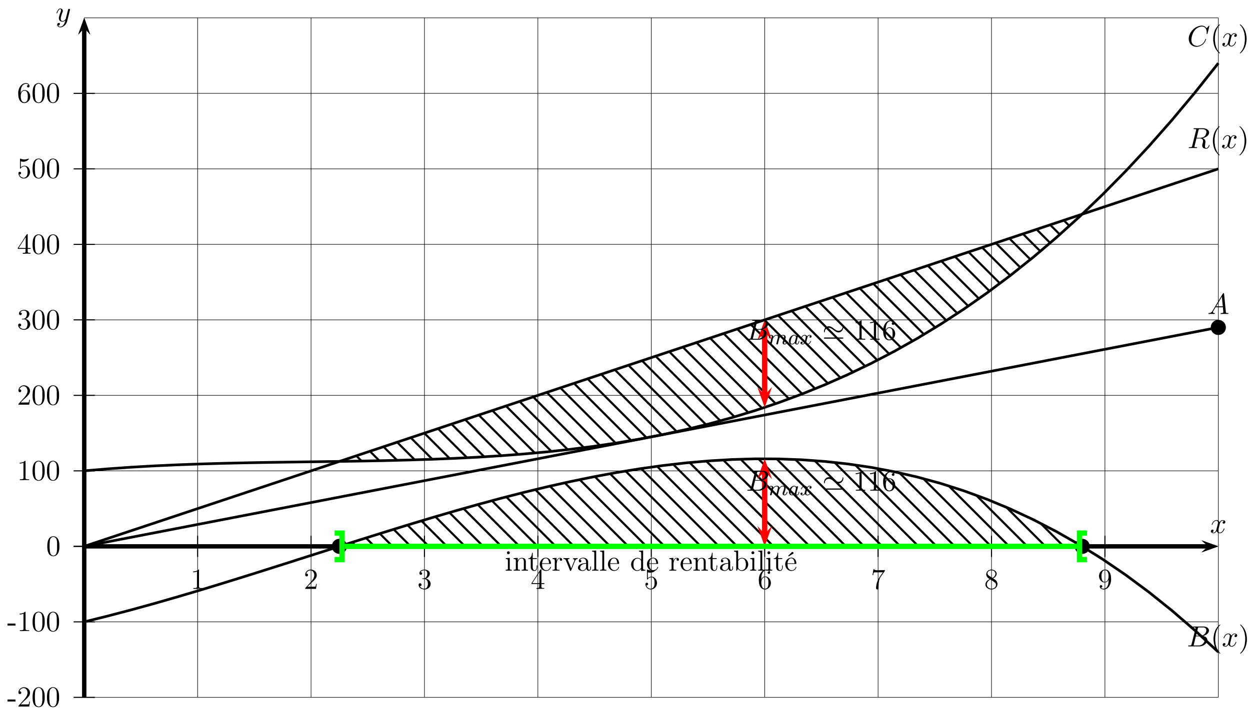
iv. En déduire les valeurs de la production qui donnent un bénéfice positif strict.
Les valeurs de la production qui donnent un bénéfice positif strict sont dans
$\boxed{\text{l'intervalle de rentabilité} =]2,26; 8,79[}$

v. Retrouver l'intervalle de rentabilité graphiquement par deux méthodes.
$\boxed{B > 0 \text{ pour }]\simeq 2,2~;~\simeq 8,8[}$.
$\boxed{R > C \text{ pour }]\simeq 2,2~;~\simeq 8,8[}$ *(courbe de R au dessus de celle de C).*

(c) Prix minimal de vente.

Pour un prix de vente de a euros la centaine de kilos, la recette est donnée par $R(x) = ax$
Déterminer graphiquement la valeur minimale de a pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice.
Graphiquement, la valeur minimale de a pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice est
$a \simeq \dfrac{290 - 0}{10 - 0} = 29$ avec $O(0;~0)$ et $A(10;~\simeq 290)$

soit $\boxed{a \simeq 29}$
car la droite d'équation $y = 29x$ est tangente à la courbe de C et la recette ne dépasse alors jamais le coût



Corrigé exercice 27 : **étude de fonction rationnelle**

ce mois ci, une centrale de distribution fournit de manière exclusive 120 magasins d' un département qui compte 150 points de ventes au total.
on suppose que dans ce département, en moyenne et chaque mois, il se crée 4 nouveaux points de ventes et que la centrale de distribution arrive à convaincre un de ces 4 nouveaux points de ventes d'être son fournisseur exclusif.

i. calculer selon les données ci dessus la proportion des points de ventes que « détient » la centrale ce mois ci ainsi que dans 30 ans.
_ce mois ci : $p = \dfrac{120}{150} = 0,8 = \boxed{80\%}$
_dans 30 ans ($30 \times 12 = 360$ mois) : $p = \dfrac{120+360}{150+4\times 360} = \dfrac{480}{1590} \simeq \boxed{30\%}$

ii. montrer que la proportion des points de ventes détenus par la centrale dans x mois est donnée par $p(x) = \dfrac{x+120}{4x+150}$ pour $x \geq 0$
_ dans x mois : $p(x) = \dfrac{120+x}{150+4x} = \boxed{\dfrac{x+120}{4x+150}}$

iii. étudier les variations de p sur $x \in [0; 360]$

$p = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow p' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec : $\begin{cases} u = x+120 \Longrightarrow u' = 1 \\ v = 4x+150 \Longrightarrow v' = 4 \end{cases}$

donc $p'(x) = \dfrac{1(4x+150) - 4(x+120)}{(4x+150)^2} = \boxed{\dfrac{-330}{(4x+150)^2}}$

Annulation, signe de $p'(x)$ et variations de p.

- $\dfrac{-330}{(4x+150)^2} = 0$ n'admet aucune solution car une fraction est nulle seulement si le numérateur est nul, or -330 n'est pas nul donc $\boxed{\text{la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x}}$.

- $-330 < 0$ et $(4x+150)^2 \geq 0$ donc $\dfrac{-330}{(4x+150)^2} < 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ 360]$

donc $\boxed{\text{la dérivée est négative stricte pour toute valeur de } x \in [0\ ;\ 360]}$

x	0		360
$p'(x)$		-	
$p(x)$	$0,8$	$\searrow$	$\simeq 0,3$

iv. la centrale de distribution $\boxed{\text{gagne des points de ventes mensuellement en effectif}}$ (+1 par mois)
la centrale de distribution $\boxed{\text{perd des points de ventes mensuellement en proportion}}$ car p est décroissante

v. dans combien de mois la centrale n'aurait-elle plus que 40% ? : Dans $\boxed{\text{100 mois}}$ (graphiquement)

pour 25% on procède algébriquement :

$p(x) = \dfrac{x+120}{4x+150} = 0,25$

$\Longleftrightarrow x + 120 = 0,25(4x+150)$

$\Longleftrightarrow x + 120 = x + 37,5$

$\Longleftrightarrow x - x = 37,5 - 120$

$\Longleftrightarrow 0x = -82,5$

ce qui n'est vrai pour aucune valeur de x
donc l'équation n'admet aucune solution

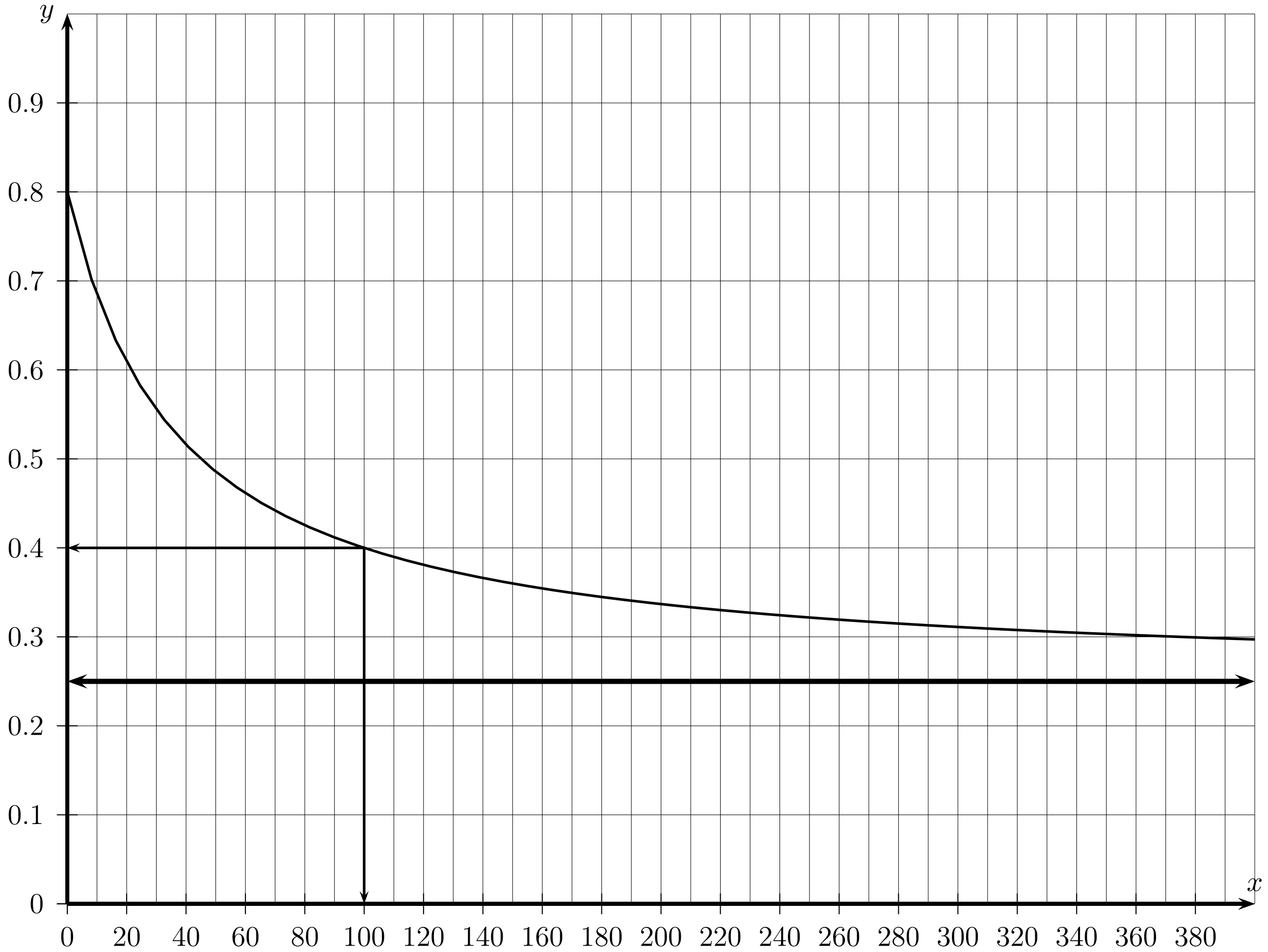
donc $\boxed{\text{la proportion n'atteindra jamais 25\%}}$

vi. quand x devient très grand ($x = 10000$ par exemple)
le pourcentage $\boxed{\text{semble se rapprocher de 25 \%}}$

interprétation graphique :
$\boxed{\text{la courbe de la fonction } p \text{ se rapproche d'une droite horizontale d'équation } y = 0,25}$

on dit que la droite d'équation $y = 0,25$ est une
$\boxed{\text{asymptote horizontale à la courbe de la fonction } p \text{ quand } x \text{ tend vers } \infty}$

Annexe : (courbe de p)



Corrigé exercice 28 : **étude de fonction rationnelle**

il y a actuellement 10000 personnes dans un stade dont 4000 femmes et 6000 hommes
on suppose qu'il part chaque minute 100 femmes et 100 hommes (sans aucune arrivée)

i. proportion d'hommes actuellement :

$$p = \frac{effectif\ hommes\ maintenant}{effectif\ total} = \frac{6000}{10000} = 0,6 = \boxed{60\%}$$

dans une une demi-heure $= p = \dfrac{6000 - 100 \times 30}{10000 - 200 \times 30} = \dfrac{3000}{4000} = \boxed{75\%}$

ii. proportion d'hommes dans x mn pour $0 \leq x \leq 40$:

$$h(x) = \frac{effectif\ hommes\ dans\ x\ mn}{effectif\ total\ dans\ x\ mn} = \frac{6000 - 100x}{10000 - 200x} = \frac{100(60 - x)}{100(100 - 2x)} = \boxed{\frac{-x + 60}{-2x + 100}}$$

iii. variations de h sur $[0; 40]$

$p = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow p' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec : $\begin{cases} u = -x + 60 \Longrightarrow u' = -1 \\ v = -2x + 100 \Longrightarrow v' = -2 \end{cases}$

donc

$$p'(x) = \frac{-1(-2x + 100) - (-2)(-x + 60)}{(-2x + 100)^2} = \boxed{\frac{20}{(-2x + 100)^2}}$$

Annulation, signe de $p'(x)$ et variations de p.

- $\dfrac{20}{(-2x + 100)^2} = 0$ n'admet aucune solution car une fraction est nulle seulement si le numérateur est nul, or 20 n'est pas nul donc $\boxed{\text{la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x}}$.

- $20 > 0$ et $(-2x + 100)^2 \geq 0$ donc $\dfrac{20}{(-2x + 100)^2} > 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ 40]$
donc $\boxed{\text{la dérivée est positive stricte pour toute valeur de } x \in [0\ ;\ 4]}$

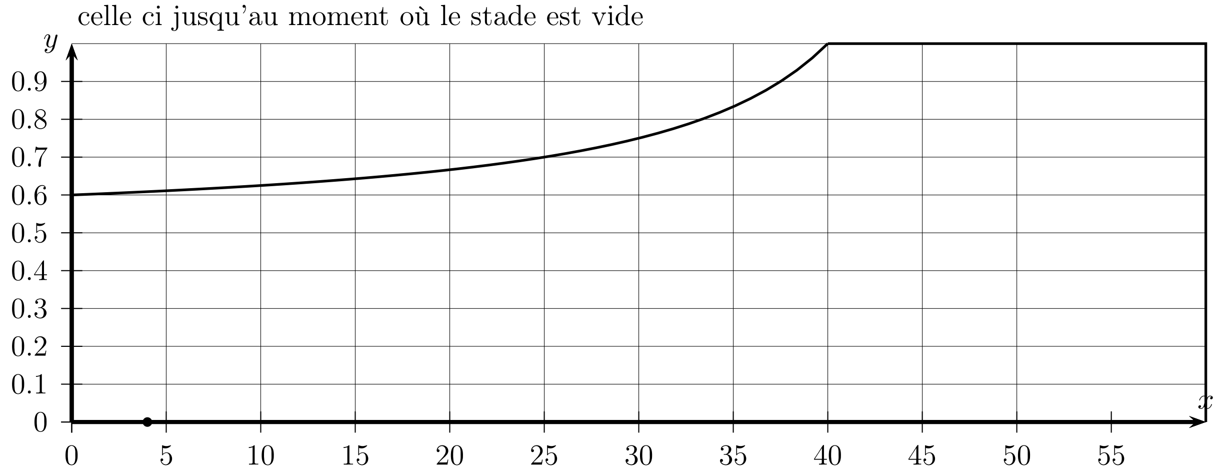
x	0	40
$p'(x)$	$+$	
$p(x)$	$0,6$ $\nearrow$	1

$p(0) = 0,6$

iv. "variation des hommes" dans le stade sur les premières 40 minutes du sortie du stade

$\boxed{\text{Le nombre d'hommes diminue mais la proportion d'hommes augmente}}$

v. tracer la courbe de h, pour la sortie des hommes du stade sur les premières 40 minutes de sortie et compléter celle ci jusqu'au moment où le stade est vide



Corrigé exercice 29 : **étude de fonction rationnelle**

(a) soit C la fonction définie par $C(x) = 6x^2 - 240x + 5400$ sur $[10; 90]$

soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ sur $[10; 90]$

i. pour la fonction f, on peut aussi écrire :

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{6x^2 - 240x + 5400}{x} = \frac{6x^2}{x} + \frac{-240x}{x} + \frac{5400}{x} = \boxed{6x - 240 + \frac{5400}{x}}$$

ii. $\boxed{f'(x) = 6 - \dfrac{5400}{x}}$

$$\frac{6(x-30)(x+30)}{x^2} = \frac{6(x^2 - 30^2)}{x^2} = \frac{6(x^2 - 900)}{x^2} = \frac{6x^2 - 5400}{x^2} = \frac{6x^2}{x^2} - \frac{5400}{x^2} = \boxed{6 - \frac{5400}{x^2}}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{6(x-30)(x+30)}{x^2}}$

iii. variations de f sur $[10; 90]$

$\begin{cases} 6 > 0 \\ x + 30 > 0 \ car \ x \in [10; 90] \\ x^2 > 0 \ en \ tans \ que \ car\acute{e} \end{cases}$ donc $\boxed{f'(x) \text{ est du signe de } x - 30}$

d'où le tableau :

x	10		30		40
$x - 30$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	360	$\searrow$	120	$\nearrow$	360

annulation

$x - 30 = 0 \Longleftrightarrow x = 30$

$f(10) = 6 \times 10 - 240 + \dfrac{5400}{10} = 360$

iv. extremums de f sur $[10; 90]$

$\boxed{\text{maximum} = 360 \text{ pour } x = 10 \text{ ou } x = 40}$

$\boxed{\text{minimum} = 120 \text{ pour } x = 30}$

(b) Dans une entreprise

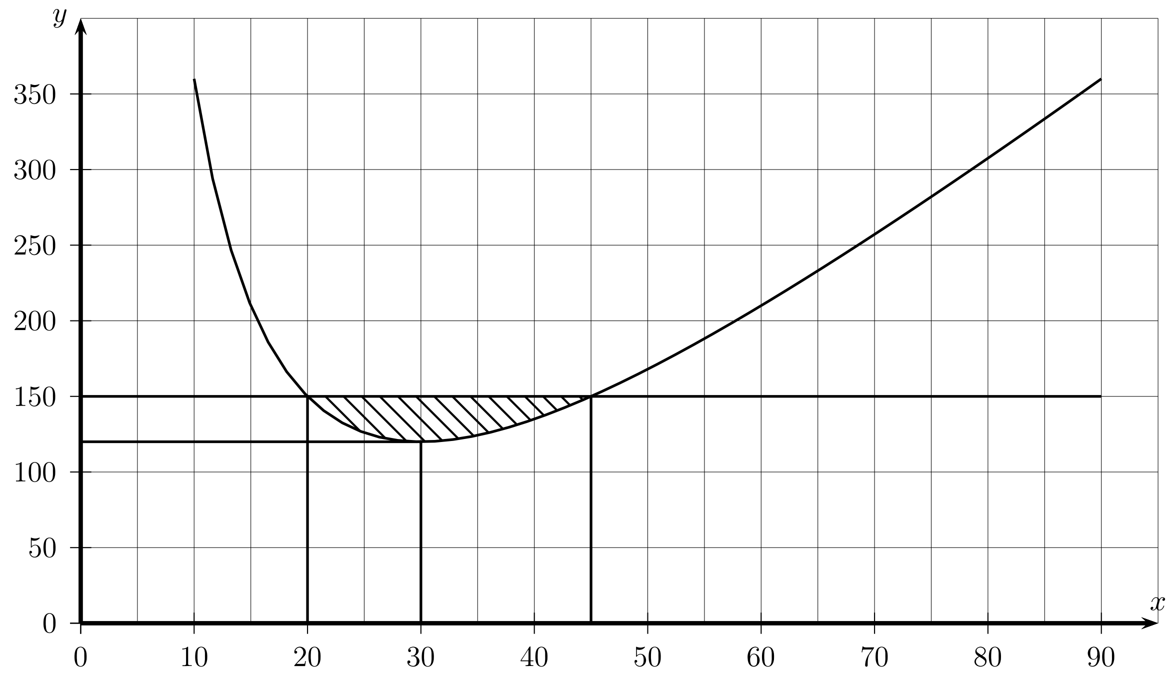
le coût total de production de q objets est donné en euros par $C(q) = 6q^2 - 240q + 5400$ pour $q \in [10; 90]$

le coût moyen unitaire pour la fabrique de q objets est noté $C_m(q)$

i. $\boxed{C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q} = f(q)}$ où f est la fonction de la partie précédente

ii. de l'étude de f, on déduit que la valeur de la production pour laquelle le coût moyen unitaire est minimum est de $\boxed{q = 30 \text{ objets}}$ pour coût unitaire associée de $\boxed{120 \text{ €}}$

iii. on retrouve ce résultat graphiquement ci dessous grâce à la courbe de f



(c) le prix de vente unitaire est de 150 € par objets

i. droite d'équation $y = 150$

ii. valeurs de la production pour lesquelles le coût moyen de production par objet est strictement inférieur à 150 euros et intervalle de rentabilité.
La production est rentable si et seulement si le coût unitaire est inférieur strict au prix de vente, ce qui donne : $\boxed{\text{entre 20 et 45 objets}}$ soit $\boxed{\text{Intervalle de rentabilité} =]20;45[}$

iii. il ne faut pas descendre le prix de vente unitaire sous $\boxed{120\text{ €}}$ sous peine de ne pas pouvoir réaliser un bénéfice (positif)

iv. bénéfice des ventes de x objets :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 150x - (6x^2 - 240x + 5400) = \boxed{-6x^2 + 390x - 5400}$$

v. variations de B sur $[10; 90]$ et production qui assure un bénéfice maximal
• $B'(x) = -12x + 390$
• Annulation de $B'(x)$: $-12x + 390 = 0 \iff x = \dfrac{-390}{-12} = 32,5$
• variations de f et signe de $B'(x) = -12x + 390$: on utilise la règle du signe du binôme $ax + b$
(signe de "a" à droite et de $-a$ à gauche)

x	10		32,5		40
$f'(x)$		+	0	- $(a = -12)$	
$f(x)$		$\nearrow$	937,5	$\searrow$	

$$B(32,5) = -6 \times 32,5^2 + 390 \times 32,5 - 5400 = 937,5$$

Le bénéfice est maximum pour une production de $\boxed{32,5 \text{ objets}}$

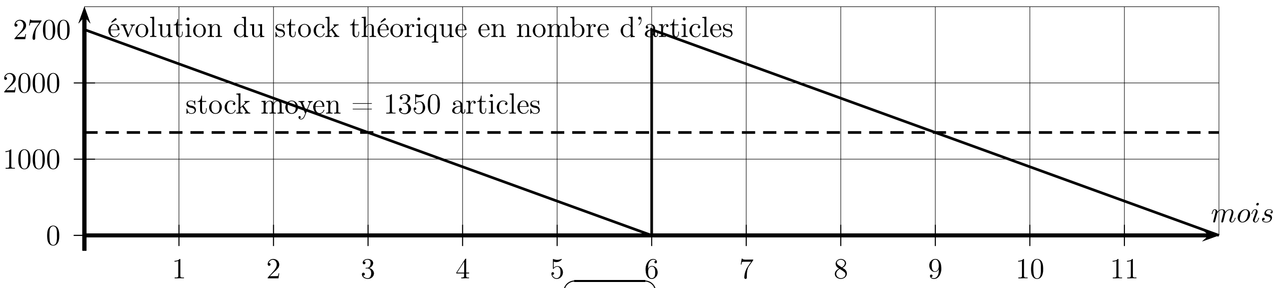
vi. $\boxed{\text{ce n'est pas la même production}}$ qui minimise le coût unitaire et qui maximise le bénéfice car $32,5 \neq 30$

$\boxed{\text{maximiser le bénéfice}}$ est préférable pour l'entreprise avec 32,5 objets

vii. peut-on retrouver "simplement" le bénéfice maximal grâce au graphique ci dessus ? $\boxed{\text{non}}$

Corrigé exercice 30 : **fonction rationnelle et modèle de Wilson - Coût de Passation, Coût de Possession**

(a) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à 5400 articles.
Le prix de chaque article est de 10 euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de 120 euros. *(frais de dossier, ...)*
Le coût de possession est de 16% du stock moyen en euros *(coût de stockage proportionnel au stock)*
On suppose les délais de réapprovisionnement nuls et une livraison immédiate.
On cherche le nombre de commandes idéal dans le sens ou il minimise le coût total constitué de la somme du coût de passation et du coût de possession.
Par exemple :
pour 2 commandes de $\dfrac{5400}{2} = 2700$ articles



le coût de passation est de $C_{pas} = 2 \times 120 = \boxed{240\text{ €}}$

stock moyen en articles : $S_{ma} = \dfrac{\dfrac{5400}{2} + 0}{2} = 1350$ articles , soit en euros : $S_m = 1350 \times 10 = \boxed{13500\text{ €}}$

le coût de possession est donné par : $C_{pos} = 16\%\ de\ S_m = \dfrac{16}{100} \times 13500 = \boxed{2160\text{ €}}$

le coût total pour 2 commandes est donc $C_T = C_{pas} + C_{pos} = 240 + 2160 = \boxed{2400\text{ €}}$

i. pour 3 commandes annuelles le coût total est de :

$$C_T(3) = C_{pas} + C_{pos} = 3 \times 120 + 0,16 \times \dfrac{\dfrac{5400}{3} \times 10 + 0}{2} = 360 + 0,16 \times 900 = \boxed{1800\text{ €}}$$

ii. pour $x \geq 1$ commandes annuelles le coût total est donné par :

$$C_T(x) = C_{pas} + C_{pos} = 120x + 0,16 \times \dfrac{\dfrac{5400}{x} + 0}{2} \times 10 = 120x + 0,16 \times \dfrac{54000}{2x} = 120x + \dfrac{4320}{x}$$

$$\boxed{C_T(x) = \dfrac{120x^2 + 4320}{x}}$$

iii. $C_T(x) = 120x + \dfrac{4320}{x}$

$$C'_T(x) = 120 - \dfrac{4320}{x^2} = \boxed{\dfrac{120x^2 - 4320}{x^2}}$$

de plus

$$\dfrac{120(x-6)(x+6)}{x^2} = \dfrac{120(x^2-36)}{x^2} = \dfrac{120x^2 - 4320}{x^2}$$

donc $\boxed{C'_T(x) = \dfrac{120(x-6)(x+6)}{x^2}}$

iv. on en déduit les variations de C_T sur $[0;100]$

$\begin{cases} 6 > 0 \\ x+6 > 0 \text{ } car \ x \in [1;100] \\ x^2 > 0 \ en \ tant \ que \ car\acute{e} \end{cases}$ donc $\boxed{C_T'(x) \text{ est du signe de } x-6}$

d'où le tableau :

x	1		6		100
$x-6$		-	0	+	
$C_T'(x)$		-	0	+	
$C_T(x)$	4440	$\searrow$	1440	$\nearrow$	12043,2

annulation
$x-6=0 \Longleftrightarrow x=6$

$C_T(6) = 120 \times 6 + \dfrac{4320}{6} = 1440$

v. $x_0 = 6$ de commandes donnent un coût total minimum de 1440 €

vi. comparons les coûts de passation et de possession dans le cas de x_0 commandes :

$$C_{pass} = 120 \times 6 = 720 \text{ et } C_{poss} = 0,16 \times \frac{\frac{5400}{6}+0}{2} \times 10 = 720 \text{ soit } \boxed{C_{pass} = C_{poss} = 720}$$

(b) Pour une autre grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à $C = 6400$ articles.
Le prix de chaque article est de $p = 5$ €.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de $P = 100$ €.
Le coût de possession est de 10% du stock moyen en euros
Soit x le nombre de commandes dans l'année pour assurer la consommation prévisionnelle.

i. $C_T(x) = C_{pas} + C_{pos} = 100x + 0,1 \times \dfrac{\frac{6400}{x}+0}{2} \times 5 = 100x + \dfrac{1600}{x} = \boxed{\dfrac{100x^2+1600}{x}}$

ii. $C_T'(x) = 100 - \dfrac{1600}{x^2} = \boxed{\dfrac{100x^2-1600}{x^2}}$

iii. Annulation de la dérivée (sur $[1;10]$) :

$C_T'(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{100x^2-1600}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{1600}{100} = 16 \Longrightarrow \boxed{x = 4 \text{ ou } x = -4}$

$x^2 > 0$ *en tant que caré* donc $\boxed{C_T'(x) \text{ est du signe du trinôme } 100x^2 - 1600}$

x	1		4		10
$100x^2-1600$		-	0	+	
$C_T'(x)$		-	0	+	
$C_T(x)$	1700	$\searrow$	800	$\nearrow$	1160

$C_T(4) = 100 \times 4 + \dfrac{1600}{4} = 800$

$\boxed{x_0 = 4 \text{ commandes}}$ donnent un coût total minimum de $\boxed{800 \text{ €}}$

(c) Pour une grande surface, relativement aux ventes d'un article,la consommation prévisionnelle annuelle est estimée à C articles.
Le prix de chaque article est de p euros.
Pour se réapprovisionner, le coût de passation d'une commande est de P euros. *(frais de dossier, ...)*
Le coût de possession est de $t\%$ du stock moyen en euros *(coût de stockage proportionnel au stock)*
Soit x le nombre de commandes dans l'année pour assurer la consommation prévisionnelle.

i. montrer que le coût total est donné par $C_T(x) = Px + \dfrac{tCp}{200x}$

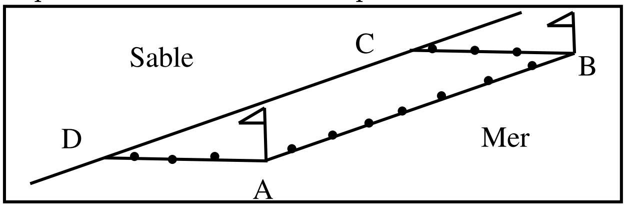
ii. montrer que $C'_T(x) = \dfrac{P(x - \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})(x + \sqrt{\dfrac{tCp}{200P}})}{x^2}$

iii. étudier le signe de $C'_T(x)$ et en déduire les variations de C_T
en déduire le nombre de commandes x_0 à choisir pour un coût total minimum

(d) à l'aide de la deuxième partie, retrouver le résultat trouvé à la première partie pour x_0 en prenant les bonnes valeurs de t, C, P et p

Corrigé exercice 31 : **piscine d'aire donnée et de périmètre minimal**

Des animateurs doivent délimiter une piscine de mer de $100m^2$ pour les enfants d'une colonie



1. si $x = AD = 2$ alors $AB = \dfrac{100}{2} = 50$ et $L = 2 + 2 + 50 = \boxed{54}$
2. $x = 4$ alors $AB = \dfrac{100}{4} = 25$ et $L = 4 + 4 + 25 = \boxed{33}$
3. en fonction de x, on a $L(x) = x + x + \dfrac{100}{x} = 2x + \dfrac{100}{x} = \dfrac{2x^2 + 100}{x}$
4. variations de la fonction L pour $x \in]0; +\infty[$
   - $L'(x) = 2 - \dfrac{100}{x^2} = \boxed{\dfrac{2x^2 - 100}{x^2}}$
   - Annulation de la dérivée (sur $]0; +\infty[$) :

   $L'(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2x^2 - 100}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{100}{2} = 50 \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{50} \text{ ou } x = -\sqrt{50}}$

   $x^2 > 0$ *en tant que caré* donc $\boxed{L'(x) \text{ est du signe du trinôme } 2x^2 - 100}$

x	0		$\sqrt{50}$		$+\infty$
$2x^2 - 100$		-	0	$+$	
$L'(x)$		-	0	$+$	
$L(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 28,28$	$\nearrow$	$+\infty$

   $L(\sqrt{50}) = 2 \times \sqrt{50} + \dfrac{100}{\sqrt{50}} \simeq 28,28$

5. à $1cm$ près la longueur de fil bouée cherchée est $\boxed{28,28m}$

Corrigé exercice 32 : **fonction intermédiaire**

1. étude des variations du coût total : $C_T(x) = x^3 - 4,5x^2 + 10x + 40$

   (a) $\boxed{C_T'(x) = 3x^2 - 9x + 10}$

   $C_T'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 9x + 10 = 0$

   $\Delta = -39 \qquad -39 < 0$ donc pas d'annulations dans $\mathbb{R}$

x	0		5
$C_T'(x)$		$+$	
$C_T(x)$	40	$\nearrow$	$102,5$

   donc $\boxed{\text{le coût total est strictement croissant}}$

   (b) à partir d'une visualisation de la courbe du coût total on peut dire que le coût total $\boxed{\text{n'augmente pas toujours "à la même vitesse"}}$, pour $\boxed{x \simeq 1,5}$ la vitesse semble la plus petite

2. étude des variations du coût marginal

   (a) $C_m(x) = C_T'(x)$ de plus $C_T'(x) = 3x^2 - 9x + 10$ donc $\boxed{C_m(x) = 3x^2 - 9x + 10}$

   (b) $\boxed{C_m'(x) = 6x - 9}$

   $C_m'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x - 9 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{9}{6} = 1,5$

   $6x-9$ est un binôme $(ax+b)$, on utilise la règle du signe du binôme *(signe de a à droite de l'annulation)*

x	0		$1,5$		5
$C_m'(x)$		-	0	$+$	
$C_m(x)$	10	$\searrow$	$3,25$	$\nearrow$	40

   (c) ce qui est cohérent avec la courbe de C_m obtenue à la calculatrice *(voir ci dessous)*

   (d) pour une production de $\boxed{x = 1,5}$ centaines, une augmentation de la production d'une unité engendre la plus faible augmentation du coût total car le coût marginal est le plus petit en $x = 1,5$

3. étude du coût moyen sur $[1;5]$

   $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$

   (a) soit la fonction (auxiliaire) f définie sur $[1;5]$ par $f(x) = 2x^3 - 4,5x^2 - 40$

   i. $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 9x}$

   $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 - 9x = 0 \Longleftrightarrow x(6x-9) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{9}{6} = 1,5$

x	1		$1,5$		5
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	-40	$\searrow$	-40	$\nearrow$	$97,5$

ii. on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1; 5]$

à l'aide de la calculatrice :

x	$3,7$	$3,71$
$f(x)$	$\simeq -0,29$	$\simeq 0,19$
comparaison à 0	< 0	> 0

donc $x_0 \simeq 3,7$ ou $3,71$ à 0,01 près

iii. tableau de signes de $f(x)$ sur $[1; 5]$

x	1		x_0		5
$f(x)$		-	0	+	

(b) $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x} = \dfrac{x^3 - 4,5x^2 + 10x + 40}{x}$

$C_M(x) = \dfrac{x^3}{x} - \dfrac{4,5x^2}{x} + \dfrac{10x}{x} + \dfrac{40}{x}$

$C_M(x) = x^2 - 4,5x + 10 + \dfrac{40}{x}$

$C'_M(x) = 2x - 4,5 + \dfrac{-40}{x^2}$

$\boxed{C'_M(x) = \dfrac{2x^3 - 4,5x^2 - 40}{x^2}} = \dfrac{f(x)}{x^2}$

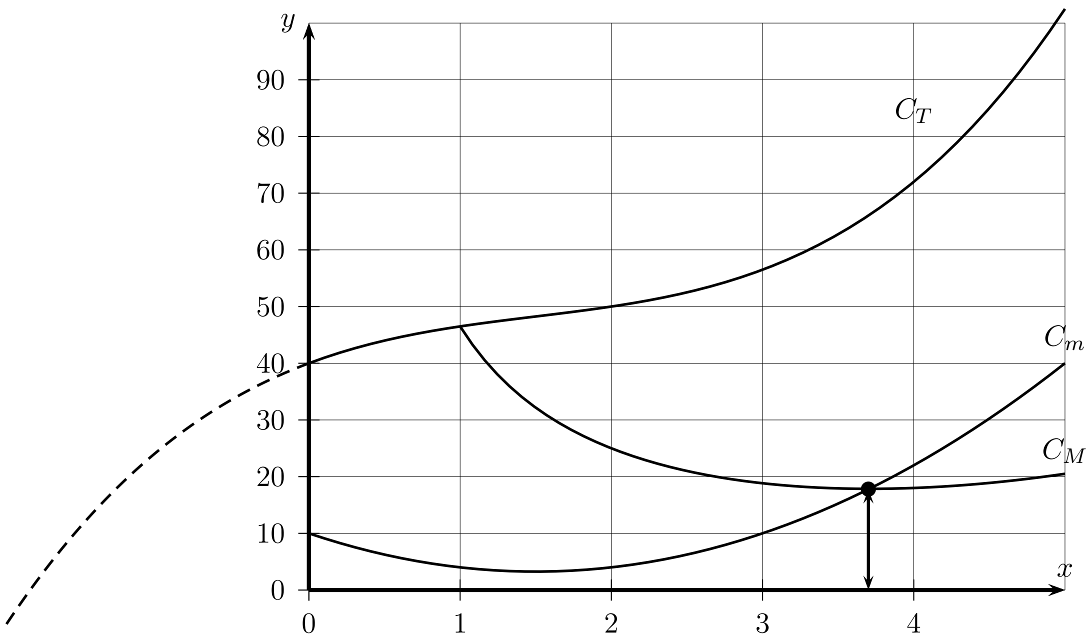
(c) $x^2 > 0$ en tant que carré donc $C'_M(x)$ est du signe de $f(x)$
d'où le tableau ci dessous

x	1		x_0		5
$C'_M(x)$		-	0	+	
$C_m(x)$	$46,5$	$\searrow$	$\simeq 17,85$	$\nearrow$	$20,5$

(d) une production de $\boxed{x \simeq 3,7}$ centaines donne le coût moyen minimal

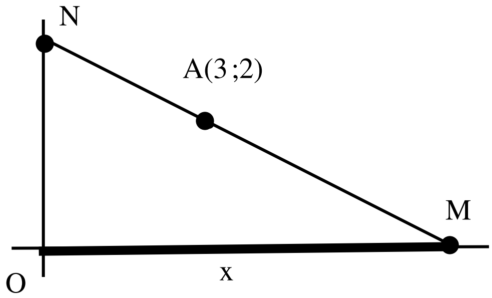
(e) $\boxed{\text{ce qui est cohérent}}$ avec la courbe de C_M obtenue à la calculatrice

(f) "la production qui minimise le coût moyen est celle pour laquelle le coût marginal est égal au coût moyen"
car $\boxed{\text{les deux courbes se coupent en } x = x_0 \simeq 3,7}$



Corrigé exercice 33 : *(étude d'une fonction rationnelle)*

$A(3;2)$
M d'abscisse $x > 3$ se déplace sur l'axe des abscisses
N est le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite (MA)
On cherche la position du point M qui permet de minimiser l'aire du triangle OMN



1. conjecturer la valeur de x cherchée grace à geogebra
2. démontrer la conjecture ci dessus par une étude de fonction
   (montrer que Aire$(OMN) = \dfrac{x^2}{x-3}$)

Corrigé exercice 34 :

Corrigé exercice 35 :

Corrigé exercice 36 :

Corrigé exercice 37 :

Corrigé exercice 38 :

Corrigé exercice 39 :

Corrigé exercice 40 :

Corrigé exercice 41 :

Pour une entreprise qui produit et vend un produit chimique,
on dispose des données suivantes :
Coût unitaire d'achat du produit brut : 2 €/litre
Coût unitaire de traitement et : 3 €/litre
Pour un prix unitaire de vente de 3 €/litre, par conditionnemment de 50 litres,
il y a alors 100 ventes par jour *(en moyenne)*
Chaque fois que le prix du litre est augmenté de 0,1 €, le conditionnement augmente de 10 litres et le nombre de ventes diminue de 1
On cherche alors le prix de vente qui permet d'obtenir le bénéfice maximal
On note x le nombre de fois que l'on augmente le prix de vente

1. Etude numérique :

 (a) compléter le tableau suivant

nb augment^o x	0	50	80	x
prix de vente unitaire $p(x)$ (€)	3 €	$3+0,1\times 50$ 8 €	$3+0,1\times 80$ 11 €	$3+0,1x$
conditionnement $l(x)$ (litres)	50 l	$50+10\times 50$ 550 l	$50+10\times 80$ 850 l	$50+10x$
nombre de ventes $n(x)$ (unités)	100 u	$100-50$ 50 u	$100-80$ 20 u	$100-x$
volume des ventes $V(x)$ (litres)	100×50 5000 l	50×550 27500 l	20×850 17000 l	$(50+10x)(100-x)$
chiffre d'affaire $R(x)$ (k€)	3×5000 15 k€	8×27500 220 k€	11×17000 187 k€	$(3+0,1x)(50+10x)(100-x)$
coût total *(achat + traitement)* $C(x)$ (k€)	5×5000 25 k€	5×27500 $137,5$ k€	5×17000 85 k€	$5(50+10x)(100-x)$
Bénéfice $B(x)$ (k€)	$15-25$ -10 k€	$220-137,5$ $82,5$ k€	$187-85$ 102 k€	$R(x)-C(x)$

 (b) plus le prix de vente augmente et plus le bénéfice augmente :
 cela semble vrai selon des valeurs ci dessus mais il est démontré ci dessous que c'est faux

 (c) semble t-il exister un prix idéal ? : $\boxed{\text{oui}}$

2. Etude Algébrique

 (a) Montrer que le bénéfice est donné en euros par $B(x)=(50+10x)(100-x)(0,1x-2)$

 (b) déterminer le signe de $B(x)$ en fonction de x et en déduire les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif (intervalle de rentabilité)

 (c) montrer que $B(x)=-x^3+115x^2-1400x-10000$

 (d) calculer $B'(x)$

 (e) montrer que $B'(x)=(70-x)(3x-20)$

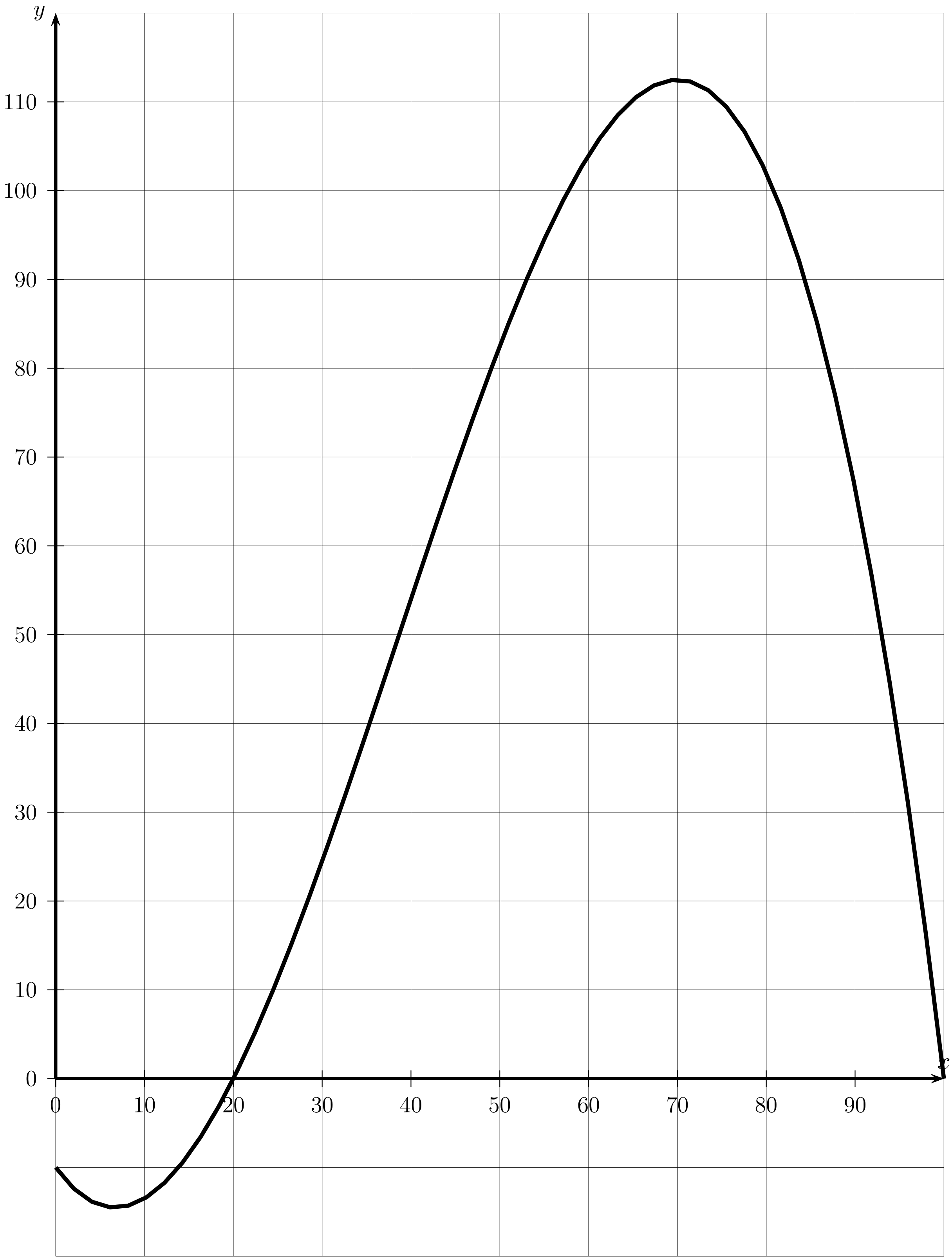
 (f) étudier l'annulation et le signe de $B'(x)$

 (g) en déduire les variations de B sur [0 ;100]

 (h) en déduire les extremums de B sur [0 ;100]

 (i) quel est alors le prix idéal de vente et quel est le bénéfice associé ?

3. Etude Graphique à partir de la courbe de B



(a) retrouver l'intervalle de rentabilité graphiquement

(b) retrouver le bénéfice maximal graphiquement

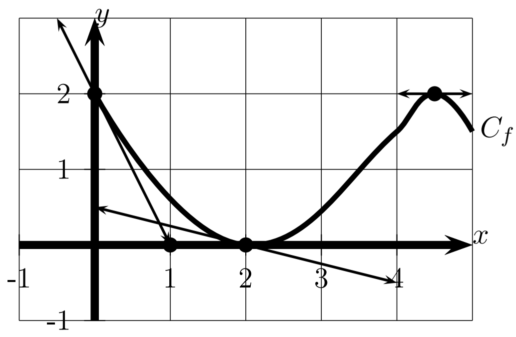
(c) pour quels prix de ventes le bénéfice est-il d'au moins 100 000 € ?

5 devoir maison

5.1 corrigé devoir maison 1

<u>exercice 1 :</u> (19 page 71)

1. par lecture graphique, on a :



$\boxed{f(0) = 2}$, $\boxed{f(2) = 0}$, $\boxed{f(4,5) = 2}$

$\boxed{f'(0) = \dfrac{0-2}{1-0} = -2}$, $\boxed{f'(2) = \dfrac{0-0.5}{2-0} = -0,25}$

$\boxed{f'(4,5) = 0}$ car la tangente est horizontale

2. équation de la tangente en $x_0 = 0$:
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ donc $\boxed{y = -2x + 2}$

équation de la tangente en $x_0 = 2$:
$y = f'(2)(x-2) + f(2)$ donc $y = -0,25(x-2) + 0$ soit $\boxed{y = -0,25x + 0,5}$

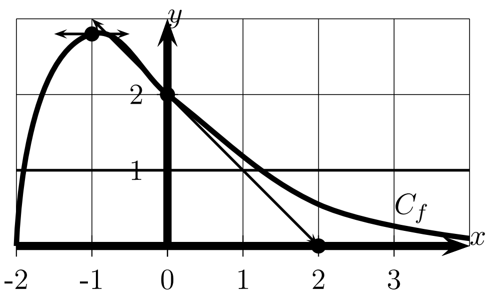
équation de la tangente en $x_0 = 0$:
$y = f'(4,5)(x-4,5) + f(4,5)$ donc $y = 0(x-4,5) + 2$ soit $\boxed{y = 2}$

3. tableau de variations complet de f :

valeur de x	0		$\simeq 2,3$		$4,5$		5
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
variations de $f(x)$	2	$\searrow$	$\simeq -0,1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1,5$

<u>exercice 2 :</u> (50 page 76)

1. par lecture graphique, on a :



(a) $f(x) = 1$ admet deux solutions x_1 et x_2
avec $\boxed{-2 \leq x_1 \leq -1,75}$ et $\boxed{1 \leq x_2 \leq 1,25}$

(b) $\boxed{f'(-1) = 0}$ car la tangente est horizontale

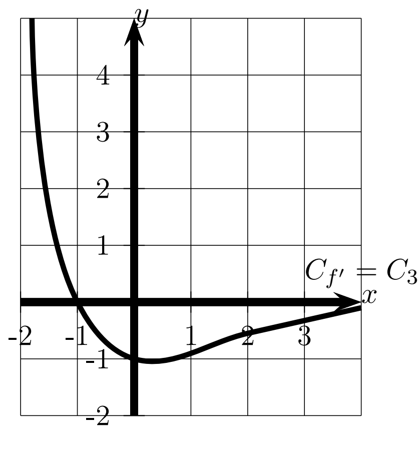
2. graphiquement :

(a) le coefficient directeur de la tangente T est $\boxed{f'(0) = \dfrac{0-2}{2-0} = -1}$

(b) $\boxed{f'(x) = 0 \text{ pour } x = -1}$, $\boxed{f'(x) > 0 \text{ pour } -2 \leq x < -1}$ et , $\boxed{f'(x) < 0 \text{ pour } -1 < x \leq 4}$

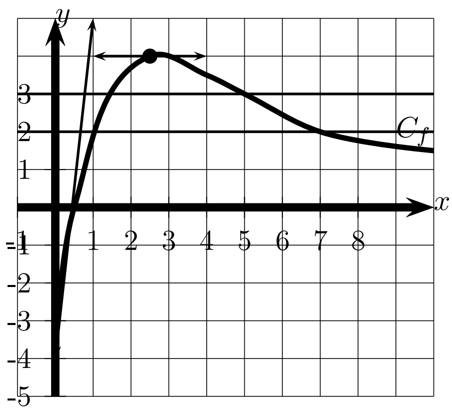
de plus $\boxed{f'(0) = \dfrac{0-2}{2-0} = -1}$

la seule courbe de f' qui convient est $\boxed{C_3}$



exercice 3 : (54 page 77)

par lecture graphique, on a :



1. $f(0) = -4$ donc $\boxed{f(0) = 0,5 \text{ est FAUX}}$
2. $f(x) = 2$ admet une solution unique dans $[5; 8]$ est $\boxed{\text{VRAI}}$ car c'est $x = 7$
3. deux nombres de $[0; 10]$ ont pour image 3 est $\boxed{\text{VRAI}}$, ce sont $x_1 \simeq 1,4$ et $x_2 = 5$
4. $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions dans $[0; 10]$: $S = [0; 0,5[$ est $\boxed{\text{VRAI}}$ car C_f est strictement en dessous de (Ox) pour $x \in [0; 0,5[$
5. $f'(0) = \dfrac{5-(-4)}{1-0} = 9$ est $\boxed{\text{VRAI}}$
6. $f'(2,5) = 0$ donc $f'(2,5) = 1$ est $\boxed{\text{FAUX}}$
7. $f'(5) > 0$ est $\boxed{\text{FAUX}}$ car f "décroît pour $x = 5$"

exercice 4 : (6.a.i polycopié)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$
   - $f'(x) = 2x - 4$
   - Annulation de $f'(x)$: $2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{4}{2} = 2$
   - variations de f et signe de $f'(x) = 2x - 4$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+ (a =2)	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$

exercice 5 : (6.b polycopié)

1. calculer le bénéfice mensuel réalisé par l'artiste
   (a) s'il ne baisse pas son prix de vente :
   $B(0) = 90 \times 10 - 40 \times 10 - 600 = 900 - 400 - 600 = -100$
   (b) s'il baisse son prix de 4 € :
   $B(4) = (90-4) \times (10 + 5 \times 4) - 40(10 + 5 \times 4) - 600 = 86 \times 30 - 40 \times 30 - 600 = 780$
   (c) s'il baisse son prix de 44 € :
   $B(44) = (90-44) \times (10 + 5 \times 44) - 40(10 + 5 \times 44) - 600 = 46 \times 230 - 40 \times 230 - 600 = 780$
2. montrer que s'il baisse le prix de vente de x € alors le bénéfice mensuel est donné par :
   (a) bénéfice = recette - coût total
   bénéfice = prix de vente × nombre de ventes - coût unitaire × nombre de ventes - coût fixe, soit $B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600$
   (b) $B(x) = (90 - x)(10 + 5x) - 40(10 + 5x) - 600$ (on développe)
   $B(x) = 900 + 450x - 10x - 5x^2 - 400 - 200x - 600 = -5x^2 + 240x - 100$
3. étudier les variations de B sur $[-2; 90]$
   - $B'(x) = -10x + 240$
   - Annulation de $f'(x)$: $-10x + 240 = 0 \Longleftrightarrow x = 24$

x	-2		24		20
$B'(x) = -10x + 240$		+	0	-	
$B(x)$	-600	$\nearrow$	2780	$\searrow$	-19000

$B(24) = -5 \times 24^2 + 240 \times 24 - 100 = 2780$

4. bénéfice maximal = 2780 euros et prix idéal $= 90 - 24 = 66$ euros

5.2 corrigé devoir maison 2

corrigé devoir maison

Exercice 1 : *(35 page 85)*
Equation de la tangente à la courbe de $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ en $a = -2$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{avec} \begin{cases} x_0 = -2 \\ \\ f(x_0) = f(-2) = 3 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) - 2 = 0 \\ \\ f'(x) = 6x + 5 \\ f'(x_0) = f'(-2) = 6 \times (-2) + 5 = -7 \end{cases}$$

soit : $y = f'(-2)[x - (-2)] + f(-2)$

donc : $y = -7(x + 2) + 0$

donc : $y = 7x - 14$ conclusion $\boxed{y = -7x - 14}$

Exercice 2 : *(24 page 84)*
Existence et valeur du nombre dérivé de $f(x) = x^3 + 1$ en $a = 2$

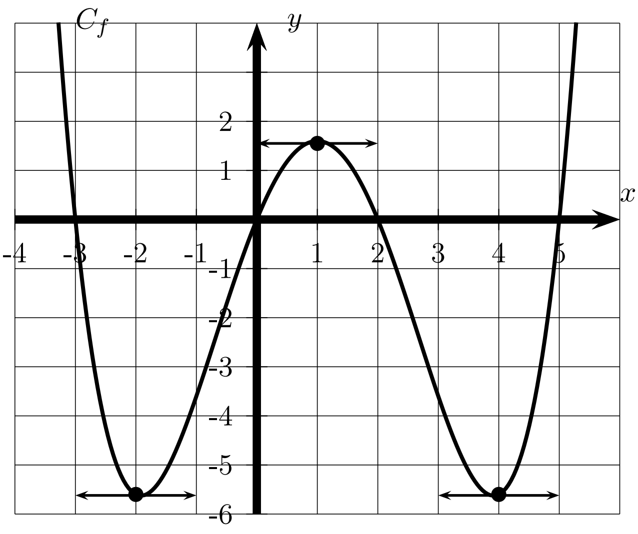
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{[(2+h)^3 + 1] - [2^3 + 1]}{h} = \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{(2+h)(2+h)^2 - 8}{h}$$

$$= \frac{2^3 + 3 \times 2^2 \times h + 3 \times 2 \times h^2 + h^3 - 8}{h} = 12 + 6h + h^2$$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 12 + 0 + 0 = 12$ donc $\boxed{f'(2) = 12}$

Exercice 3 *(polycopié)*
soit la fonction f dont on dispose de la courbe C_f pour $x \in [-3,25\ ;\ 5,25]$

(a) $\boxed{f(-2) \simeq -5,5}$ $\boxed{f(1) \simeq 1,5}$ $\boxed{f(4) \simeq -5,5}$



(b) $\boxed{f'(-2) = 0}$ $\boxed{f'(1) = 0}$ $\boxed{f'(4) = 0}$
car les tangentes sont horizontales

(c) $\boxed{f(-1) < 0}$ $\boxed{f'(-1) > 0}$ *(f croît)*
$\boxed{f(1,5) > 0}$ $\boxed{f'(1,5) < 0}$ *(f décroît)*
$\boxed{f(3) < 0}$ $\boxed{f'(3) < 0}$ *(f décroît)*

(d) i. $f(x) = 0 \iff \boxed{x \in \{-3;\ 0;\ 2;\ 5\}}$

ii. $f'(x) = 0 \iff \boxed{x \in \{-2;\ 1;\ 4\}}$

iii. $f(x) > 0 \iff \boxed{x \in\ [-3,25;\ -3[\ \cup\ ]0;\ 2[\cup]5;\ 5,25]}$

iv. $f'(x) > 0 \iff \boxed{x \in]-2;\ 1[\ \cup\ ]4;\ 5,25]}$

v. $f(x) < 0 \iff \boxed{x \in]-3;\ 0[\ \cup\ ]2;\ 5[}$

vi. $f'(x) < 0 \iff \boxed{x \in [-3,25;\ -2[\ \cup\ ]1;\ 4[}$

(e)

valeur de x	-3,25		-2		1		4		5,25
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
variations de $f(x)$	4	↘	-5,5	↗	1,5	↘	-5,5	↗	4

Exercice 3 : *(1 polycopié)*

(a) i. $\boxed{f(4)=3}$ et $f'(4)=\dfrac{3-6}{4-2}=\dfrac{-3}{2}=\boxed{-1,5}$ avec $H(2\ ;\ 6)$ et $C(4\ ;\ 3)$

ii. $\boxed{f(2)=5}$ et $\boxed{f'(2)=0}$ car la tangente est horizontale.

iii. $\boxed{f(0)=2}$ et $f'(0)=\dfrac{7-2}{2-0}=\dfrac{5}{2}=\boxed{2,5}$ avec $A(0\ ;\ 2)$ et $G(2\ ;\ 7)$

iv. $\boxed{f(-5)=4}$ et $f'(-5)=\dfrac{-2-4}{-3-(-5)}=\dfrac{-6}{2}=\boxed{-3}$ avec $E(-5\ ;\ 4)$ et $F(-3\ ;\ -2)$.

v. $\boxed{f(-2)=0}$ et $\boxed{f'(-2)=0}$ car la tangente est horizontale.

(b) équations des tangentes

i. en E : $y=f'(-5)(x-(-5))+f(-5)=-3(x+5)+4$ donc $\boxed{y=-3x-11}$

ii. en A : $\boxed{y=2,5x+2}$

iii. en B : $\boxed{y=5}$

iv. en C : $\boxed{y=-1,5x+9}$

(c) ensemble des solutions

i. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-2\}$

ii. $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-2; 2\}$

(d) tableau de signes de $f(x)$

valeur de x	-6		-2		5
signe de $f(x)$		+	0	+	

(e) tableau de signes de $f'(x)$ et variations de f

valeur de x	-6		-2		2		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

Exercice 4 : (tp geogebra)

1. avec le logiciel géogébra
   (a) (b)(c)(d)(e)(f) sur document geogebra
   (g) couper les propulseurs en $x = 0,25$ semble t-il permettre à la sonde de rejoindre la station ?
   $\boxed{\text{oui car la tangente en } x = 0,25 \text{ semble passer par } P}$

   (h) pour que la sonde atteigne la station il faut $\boxed{a \simeq 0,25}$ on a alors $\boxed{AP \simeq 3,1}$
2. algébriquement
   (a) en $x = 0,25$
   l'équation de la tangente est : $y = f'(0,25)(x - 0,25) + f(0,25) = 1,5(x - 0,25) + 1,4375$ *(voir corrigé premier exercice)*
   soit $\boxed{y = 1,5x + 1,0625}$ cette droite ne passe pas exactement par le point $P(2; 4)$
   car pour $x = 2$ on a $y = 1,5 \times 2 + 1,0625 = 4,0625 \neq 4$
   donc $\boxed{\text{la sonde ne passera pas exactement la station}}$
   on ne retrouve pas le résultat trouvé avec géogébra car un résultat graphique est $\boxed{\text{approché}}$
   (b) équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse a :
   $f'(x) = -2x + 2$ donc $f'(a) = -2a + 2$
   $y = f'(a)(x - a) + f(a) = (-2a + 2)(x - a) + (-a^2 + 2a + 1)$
   $y = -2ax + 2a^2 + 2x - 2a - a^2 + 2a + 1 = x(2 - 2a) + a^2 + 1$
   $\boxed{y = 2(1 - a)x + a^2 + 1}$
   (c) valeurs de a *(à 0,001 près)* pour que la tangente précédente passe par le point $P(2; 4)$
   il faut que $4 = 2(1 - a) \times 2 + a^2 + 1$
   $a^2 - 4a + 1 = 0$
   $\Delta = 12$ donc deux solutions $\boxed{x_1 \simeq 0,268}$ et $\boxed{x_2 \simeq 3,732}$

   les coordonnées des points de la parabole sont $\boxed{A_1(0,268; 1,464)}$ et $\boxed{A_2(3,732; -5,463)}$ on retrouve approximativement le résultat trouvé avec géogébra
   (d) pour quelle valeur de x les propulseurs de la sonde doivent-ils êtres coupés pour que la sonde atteigne la station orbitale ? $\boxed{x_1 \simeq 0,268}$
   (e) distance entre les points A et P
   $AP = \sqrt{(0,268 - 2)^2 + (1,464 - 4)^2} \simeq \boxed{3,1}$ on retrouve approximativement le résultat trouvé avec géogébra

6 évaluations

6.1 évaluation -1

Nom :

évaluation

1. compléter le tableau suivant :

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = 0$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -10$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \frac{1}{2}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 2x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -5x$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \frac{x}{3}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = \frac{2x}{5}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = ax\ (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^{2012}$	$f'(x) = ...$
$f(x) = x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x^2 + x - 1$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 3x^2 - 10x + 12$	$f'(x) = ...$
$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$	$f'(x) = ...$
$f(x) = 5x^3 - 20x^2 + 10x - 30$	$f'(x) = ...$

2. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ en 5 étapes
   (a) calcul de $f'(x)$
   (b) annulation de $f'(x)$
   (c) tableau de signes de $f'(x)$
   (d) tableau de variations de $f(x)$
   (e) extremums de $f(x)$
3. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = 10x^2 + 80x + 5$ en 5 étapes
   (a) calcul de $f'(x)$
   (b) annulation de $f'(x)$
   (c) tableau de signes de $f'(x)$
   (d) tableau de variations de $f(x)$
   (e) extremums de $f(x)$
4. (bonus) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 4$ pour la fonction du 2.

6.2 corrigé évaluation -1

corrigé évaluation

1. compléter le tableau suivant :

$f(x)$	$f'(x)$
0	$\boxed{0}$
3	$\boxed{0}$
-10	$\boxed{0}$
$\frac{1}{2}$	$\boxed{0}$
$a \in \mathbb{R}$	$\boxed{0}$
x	$\boxed{1}$
$2x$	$\boxed{2}$
$-5x$	$\boxed{-5}$
$\frac{x}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$
$\frac{2x}{5}$	$\boxed{\frac{2}{5}}$
$ax\ (a \in \mathbb{R})$	$\boxed{a}$
x^2	$\boxed{2x}$
x^3	$\boxed{3x^2}$
x^{2012}	$\boxed{2012x^{2011}}$
$-x^2+x-1$	$\boxed{-2x+1}$
$3x^2-10x+12$	$\boxed{6x-10}$
$-x^3+x^2-x+1$	$\boxed{-3x^2+2x-1}$
$5x^3-20x^2+10x-30$	$\boxed{15x^2-40x+10}$

2. étudier les variations de f définie sur $[-10;10]$ par $\boxed{f(x)=-5x^2+40x+10}$

   (a) calcul de la dérivée :
   $f(x)=-5x^2+40x+10$

   $f(x)=-5\times 2x+40+0$

   $\boxed{f'(x)=-10x+40}$

   (b) annulation de $f'(x)$ sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x)=0$

   $-10x+40=0$

   $-10x=-40$

   $x=\dfrac{-40}{-10}=\boxed{4}$

   (c) signe de $f'(x)$ sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		4		10
signe de $f'(x)=-10x+40$		$+$	0	-	

   (signe de "a = −10" à droite de l'annulation)

   (d) tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

x	-10		4		10
$f'(x)$		$+$	0	-	
f			90		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-890				-90

   $f(10)=-5\times 10^2+40\times 10+10=-90$

   (e) extremums :
   $\begin{cases} \text{maximum} = 90 \text{ pour x} = 4 \\ \text{minimum} = \text{-890 pour x} = \text{-10} \end{cases}$

3. étudier les variations de f définie sur $[-10;10]$ par $\boxed{f(x)=10x^2+80x+5}$

   (a) calcul de la dérivée :
   $f(x)=10x^2+80x+5$
   $f'(x)=10\times 2x+80+0$
   $\boxed{f'(x)=20x+80}$

   (b) annulation de $f'(x)$ sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x)=0$
   $20x+80=0$

   $20x=-80$

   $x=\dfrac{-80}{20}=\boxed{-4}$

   (c) signe de $f'(x)$ sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		-4		10
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	

   (signe de "a = 20" à droite de l'annulation)

   (d) tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

x	-10		-4		10
$f'(x)$		-	0	$+$	
f	205				1805
		$\searrow$		$\nearrow$	
			-155		

   $f(10)=10\times 10^2+80\times 10+5=1805$

   (e) extremums :
   $\begin{cases} \text{maximum} = 1805 \text{ pour x} = 10 \\ \text{minimum} = \text{-155 pour x} = \text{-4} \end{cases}$

6.3 évaluation 0

Nom :

évaluation

1. compléter le tableau suivant : (10 points)

$f(x)$	$f'(x)$
0	
3	
-10	
$\frac{1}{2}$	
$a \in \mathbb{R}$	
x	
$2x$	
$-5x$	
$\frac{x}{3}$	
$\frac{2x}{5}$	
$ax \ (a \in \mathbb{R})$	
x^2	
x^3	
x^{2012}	
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	
$\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{x^3}$	
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	
$\sqrt{x}$	
$3x^2 - 10x + 12$	
$5x^3 - 20x^2 + 10x - 30$	

2. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ (5 points)
3. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$ (5 points)

6.4 évaluation 1

Nom :

évaluation

1. compléter le tableau suivant : (10 points)

$f(x)$	$f'(x)$
0	
3	
-10	
$\frac{1}{2}$	
$a \in \mathbb{R}$	
x	
$2x$	
$-5x$	
$\frac{x}{3}$	
$\frac{2x}{5}$	
$ax \ (a \in \mathbb{R})$	
x^2	
x^3	
x^{2012}	
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	
$\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{x^3}$	
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$	
$\sqrt{x}$	
$3x^2 - 10x + 12$	
$5x^3 - 20x^2 + 10x - 30$	

2. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ (5 points)
3. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = 10x^2 + 80x + 5$ (5 points)

6.5 corrigé évaluation 1

corrigé évaluation 1

1. compléter le tableau suivant :

$f(x)$	$f'(x)$
0	$\boxed{0}$
3	$\boxed{0}$
-10	$\boxed{0}$
$\frac{1}{2}$	$\boxed{0}$
$a \in \mathbb{R}$	$\boxed{0}$
x	$\boxed{1}$
$2x$	$\boxed{2}$
$-5x$	$\boxed{-5}$
$\frac{x}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$
$\frac{2x}{5}$	$\boxed{\frac{2}{5}}$
$ax\ (a \in \mathbb{R})$	$\boxed{a}$
x^2	$\boxed{2x}$
x^3	$\boxed{3x^2}$
x^{2012}	$\boxed{2012x^{2011}}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\boxed{nx^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\boxed{\frac{-1}{x^2}}$
$\frac{1}{x^2}$	$\boxed{\frac{-2}{x^3}}$
$\frac{1}{x^3}$	$\boxed{\frac{-3}{x^4}}$
$\frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$	$\boxed{\frac{-n}{x^{n+1}}}$
$\sqrt{x}$	$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
$3x^2 - 10x + 12$	$\boxed{6x - 10}$
$5x^3 - 20x^2 + 10x - 30$	$\boxed{15x^2 - 40x + 10}$

2. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $\boxed{f(x) = -5x^2 + 40x + 10}$

   (a) calcul de la dérivée :
   $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ donc $\boxed{f'(x) = -10x + 40}$

   (b) annulation de f' sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x) = 0$
   $-10x + 40 = 0$ donc $x = \frac{-40}{-10} = \boxed{4}$
   signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		4		10
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	

   (signe de "a = −10" à droite de l'annulation)

   (c) tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

x	-10		4		10
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	-890	$\nearrow$	90	$\searrow$	-90

   $f(10) = -5 \times 10^2 + 40 \times 10 + 10 = -90$

3. étudier les variations de f définie sur $[-10; 10]$ par $\boxed{f(x) = 10x^2 + 80x + 5}$

   (a) calcul de la dérivée :
   $f(x) = 10x^2 + 80x + 5$ donc $\boxed{f'(x) = 20x + 80}$

   (b) annulation de f' sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x) = 0$
   $20x + 80 = 0$ donc $x = \frac{-80}{20} = \boxed{-4}$
   signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		-4		10
signe de $f'(x)$		-	0	$+$	

   (signe de "a = 20" à droite de l'annulation)

   (c) tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

x	-10		-4		10
$f'(x)$		-	0	$+$	
f	205	$\searrow$	-155	$\nearrow$	1805

   $f(10) = 10 \times 10^2 + 80 \times 10 + 5 = 1805$

6.6 évaluation 2

évaluation

Nom :

<u>exercice 1 :</u> */11*

la fonction f est définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$

1. calculer $f'(x)$ */1*
2. vérifier que $f'(x) = -3(x-2)(3x+12)$ */2*
3. étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$ */3* */2*
4. donner le tableau de variations de f sur $[-5;5]$ */2*
5. donner les extremums de f sur $[-5;5]$ */1*

<u>exercice 2 :</u> */9*

la fonction f est définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 1$

1. calculer $f'(x)$ */1*
2. vérifier que $f'(x) = 6(x-1)^2 + 1$ */1,5*
3. étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$ */2* */1,5*
4. donner le tableau de variations de f sur $[-10;10]$ */2*
5. donner les extremums de f sur $[-10;10]$ */1*

6.7 corrigé évaluation 2

corrigé exercice 1 : la fonction f est définie sur $[-5;5]$ par $\boxed{f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5}$

1. $f'(x) = -3 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 72 + 0 = \boxed{-9x^2 - 18x + 72}$
2. $-3(x-2)(3x+12) = -3(3x^2 + 12x - 6x - 24) = -3(3x^2 + 6x - 24) = -9x^2 - 18x + 72 = \boxed{f'(x)}$
3. annulation et signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-5;5]$:
   $f'(x) = 0$
   $-9x^2 - 18x + 72 = 0$ (avec le discriminant et $a = -9,\ b = -18,\ c = 72$)
   $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} = (-18)^2 - 4 \times (-9) \times 72 = 2916$
   $\boxed{\Delta > 0 \text{ donc deux annulations}}$
   $\boxed{x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} = \dfrac{-(-18)+\sqrt{2916}}{2 \times (-9)} = -4$
   $\boxed{x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} = \dfrac{-(-18)-\sqrt{2916}}{2 \times (-9)} = 2$
   $\boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -4 \ ou\ x = 2}$
   pour le signe de $-9x^2 - 18x + 72$ on utilise le $\boxed{\text{règle du signe d'un trinôme}}$
   (signe de $a = -9$ à l'extérieur des annulations)

valeur de x	-5		-4		2		$+5$
signe de $f'(x) = -9x^2 - 18x + 72$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$	-205	$\searrow$	-235	$\nearrow$	89	$\searrow$	-235

   $f(5) = -3 \times 5^3 - 9 \times 5^2 + 72 \times 5 + 5 = -235$
4. extremums de f sur $[-5;5]$
   $\boxed{\text{maximum} = 89 \text{ pour } x = 2}$ et $\boxed{\text{minimum} = -235 \text{ pour } x = -4 \text{ ou } x = 5}$

corrigé exercice 2 :

la fonction f est définie sur $[-10;10]$ par $\boxed{f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 1}$

1. $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 7 - 0 = \boxed{6x^2 - 12x + 7}$
2. $f'(x) = 6(x-1)^2 + 1 = 6(x^2 - 2x + 1) + 1 = 6x^2 - 12x + 6 + 1 = 6x^2 - 12x + 7 = \boxed{f'(x)}$
3. annulation et signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-10;10]$:
   $f'(x) = 0$
   $6x^2 - 12x + 7 = 0$ (avec le discriminant et $a = 6,\ b = -12,\ c = 7$)
   $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} = (-12)^2 - 4 \times 6 \times 7 = -24$
   $\boxed{\Delta < 0 \text{ donc aucune annulation dans } \mathbb{R}}$
   pour le signe de $6x^2 - 12x + 7$ on utilise le $\boxed{\text{règle du signe d'un trinôme}}$
   (signe de $a = 6$ pour toute valeur de x)

valeur de x	-10		10
signe de $f'(x) = 6x^2 - 12x + 7$		+	
variations de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 1$	-2671	$\nearrow$	1469

   $f(10) = 2 \times 10^3 - 6 \times 10^2 + 7 \times 10 - 1 = 1469$
4. extremums de f sur $[-10;10]$
   $\boxed{\text{minimum} = -2671 \text{ pour } x = -10}$ et $\boxed{\text{maximum} = 1469 \text{ pour } x = 10}$

6.8 évaluation 3

nom, prénom : ...

<u>Exercice 1 :</u> *(compléter les tableaux suivants)*

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
$a \in \mathbb{R}$		$\mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[$
x		$\mathbb{R}$
$ax\ (a \in \mathbb{R})$		$\mathbb{R}$
x^2		$\mathbb{R}$
x^3		$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ sauf 0)
$\frac{1}{x^2}$		$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^3}$		$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$		$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}^{+*} =]0;\ +\infty[$

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
$au\ (a \in \mathbb{R})$		D_u
$u+v$		$Du \cap D_v$
$u-v$		$Du \cap D_v$
$u^n\ (n \in \mathbb{N})$		Du
$\frac{1}{u}$		Du^*
$\frac{1}{u^n}\ (n \in \mathbb{N})$		Du^*
uv		$Du \cap D_v$
$\frac{u}{v}$		$Du \cap D_v^*$
$\sqrt{u}$		Du^+

<u>Exercice 2 :</u> *(Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas)*

1. $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{10}{3x^2} + 5\sqrt{x}$

2. $f(x) = 4(3x+5)^{10}$

3. $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$

4. $f(x) = x\sqrt{x}$

5. $f(x) = \frac{10x-5}{3x+7}$

6.9 corrigé évaluation 3

6.10 évaluation 4

nom, prénom : ...

Exercice 1 :

étudier les variations de f définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ par la dérivation et en déduire le maximum de f et la valeur de x associée

Exercice 2 :

étudier les variations de f définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$ par la dérivation et en déduire le maximum de f et la valeur de x associée

Exercice 3 :

étudier les variations de f définie sur $[1;100]$ par $f(x) = \dfrac{60x^2 + 2160}{x}$ par la dérivation et en déduire le minimum de f et la valeur de x associée

6.11 corrigé évaluation 4

6.12 évaluation 5

évaluation dérivation

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{9x+4}$ pour $x \in [5\ ;\ 17]$

1. Etudier les variations de f et donner le tableau de variations complet
2. Donner la valeur du maximum de f ainsi que la valeur de x associée.

Exercice 2 :

1. Soit la fonction g définie par : $g(x) = 2x^3 - 6x^2 - 100$ pour $x \in [0\ ;\ 8]$

   (a) Etudier les variations de g et donner le tableau de variations complet
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2\ ;\ 8]$ *(bonus)*
   (c) Déterminer grâce au tableau de valeurs de la calculatrice la valeur de α à l'unité près
   (d) Que vaut $g(5)$?
   (e) Donner le tableau de signes de g.

2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 40x + 100}{x}$ pour $x \in [1\ ;\ 8]$

   (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) Déduire du 1. le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
   (c) déterminer les extrémums de f sur $[1\ ;\ 8]$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ pour $2 \leq x \leq 10$

1. Etudier le sens de variation de f
2. Déterminer une équation de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2
3. Déterminer les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèles à l'axe des abscisses.
4. Peut-on trouver des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

6.13 corrigé évaluation 5

corrigé exercice 1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{9x+4}$ pour $x \in [5\ ;\ 17]$

1. Etude du sens de variation de f.
   (a) Calcul de $f'(x)$
   $f = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec : $\begin{cases} u = 3x+1 \Longrightarrow u' = 3 \\ v = 9x+4 \Longrightarrow v' = 9 \end{cases}$
   donc $f'(x) = \dfrac{3(9x+4) - 9(3x+1)}{(9x+4)^2} = \boxed{\dfrac{3}{(9x+4)^2}}$
   (b) Annulation, signe de $f'(x)$ et variations de f.
   • $\dfrac{3}{(9x+4)^2} = 0$ n'admet aucune solution car une fraction est nulle seulement si le numérateur est nul, or 3 n'est pas nul donc la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x.
   • $3 > 0$ et $(9x+4)^2 \geq 0$ donc $\dfrac{3}{(9x+4)^2} > 0$ pour tout $x \in [5\ ;\ 17]$, donc la dérivée est positive stricte pour toute valeur de $x \in [5\ ;\ 17]$

x	5		17
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{16}{49}$	$\nearrow$	$\frac{52}{157}$

2. Le maximum de f vaut $\dfrac{52}{157}$ pour $x = 17$.

corrigé exercice 2

1. Soit la fonction g définie par : $g(x) = 2x^3 - 6x^2 - 100$ pour $x \in [0\ ;\ 8]$
   a. Etude des variations de g.
      i. $g'(x) = 6x^2 - 12x$ *(trinôme)*.
      ii. Annulation et signe de g' et variations de g.
      $g'(x) = 6x^2 - 12x = 0 \Longleftrightarrow x(6x - 12) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{12}{6} = 2$.

x	0		2		8
$g'(x)$	0	-	0	+	
$g(x)$	-100	$\searrow$	-108	$\nearrow$	540

      $g(0) = 2 \times 0^3 - 12 \times 0^2 - 100 = -100$

   b. L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2\ ;\ 8]$.
   En effet :
   $$\begin{cases} \bullet\ g(2) = -108 \text{ et } -108 < 0 \\ \bullet\ g(8) = 540 \text{ et } 540 > 0 \\ \bullet\ f \text{ est continue sur } [2;8] \text{ en tant que fonction polynômiale de degré 3} \\ \bullet\ f \text{ est strictement croissante sur } [2;8] \end{cases}$$
   Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2\ ;\ 8]$.

   c. le tableau de valeurs de la calculatrice permet de déterminer que $\alpha = 5$

   d. $g(5) = 2 \times 5^3 - 6 \times 5^2 - 100 = 0$ donc $\alpha = 5$

   e. D'où le tableau de signes de g.

x	0		5		8
$g(x)$		-	0	+	

2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 6x + 40 + \dfrac{100}{x}$ pour $x \in]0\ ;\ 8]$
   a. $f'(x) = 2x - 6 - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 6x - 100}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. On déduit du 1. le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	1		5		8
$g(x)$		-	0	+	
x^2	0	+		+	
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$		-	0	+	
$g(x)$	135	$\searrow$	55	$\nearrow$	68,5

   c. le minimum de f vaut 55 pour x = 2

corrigé exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ pour $x \in [2; 10]$

1. Sens de variation de f.

   a. Calcul de $f'(x)$.

   On reconnaît que f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   avec : $\begin{cases} u = x^2 - 3x + 6 \Longrightarrow u' = 2x - 3 \\ v = x - 1 \Longrightarrow v' = 1 \end{cases}$

   donc $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 6) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

   b. Annulation et signe de $f'(x)$, variations de f.

   On utilise un tableau de signes avec utilisation de la règle du signe de $ax^2 + bx + c$ pour le numérateur et utilisation du fait qu'un carré soit positif ou nul pour le dénominateur.

   Annulations de $x^2 - 2x - 3$: $\Delta = 16 > 0$ donc deux solutions qui sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

   Annulations de $(x-1)^2$: $(x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

x	2		3		8
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{76}{9}$

   $f(3) = \dfrac{3^2 - 3 \times 3 + 6}{3 - 1} = 3$

2. Equation de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

   $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

   avec : $f'(2) = \dfrac{2^2 - 2 \times 2 - 3}{(2-1)^2} = -3$

   et :$f(2) = \dfrac{2^2 - 3 \times 2 + 6}{2 - 1} = 4$

   donc : $y = -3(x-2) + 4$

   d'où : $y = -3x + 10$

3. Abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèles à l'axe des abscisses.

   Ce sont les valeurs d'annulation de f' soit $x = -1$ ou $x = 3$.

4. Points de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

   Il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = 1$ car le coefficient directeur de la droite en question est $a = 1$.

   $f'(x) = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 1 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1$

   $\Longleftrightarrow -3 = 1$ ce qui conduit à une absurdité.

   Conclusion : l'équation $f'(x) = 1$ n'admet aucune solution et par conséquent il n'y a aucun points de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

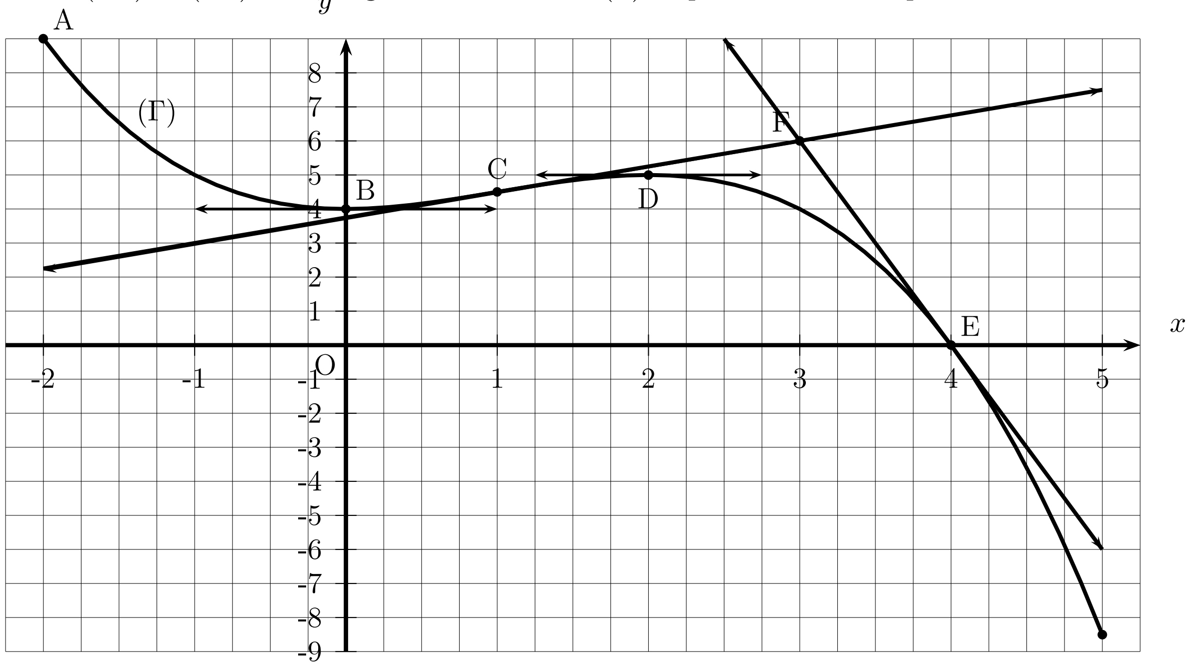
6.14 évaluation 6

nom et prénom : ...

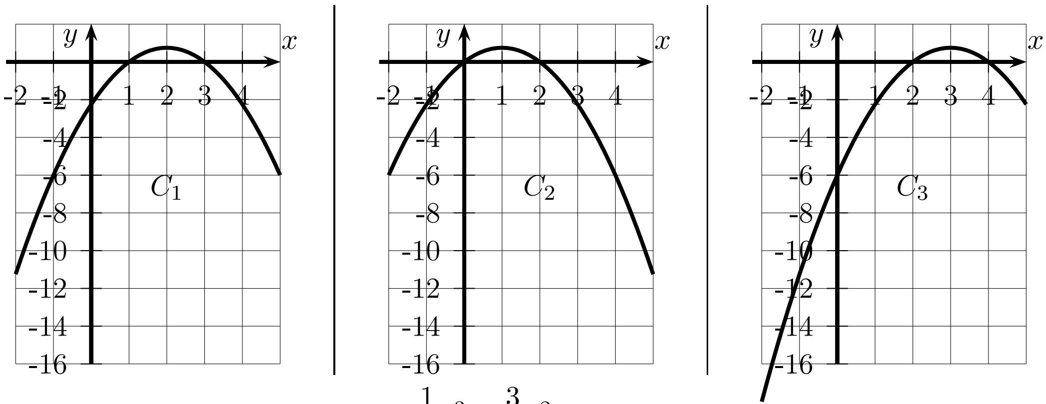
évaluation

Exercice 1 : *(lecture graphique)*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$
La courbe (Γ) représentative de la fonction f est donnée ci dessous.
Elle passe par les points $A(-2\ ;\ 9)$, $B(0\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ 4{,}5)$, $D(2\ ;\ 5)$ et $E(4\ ;\ 0)$.
En chacun des points B et D, la tangente la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3\ ;\ 6)$.
Les droites (CF) et (EF) sont tangentes à la courbe (Γ) respectivement aux points C et E.

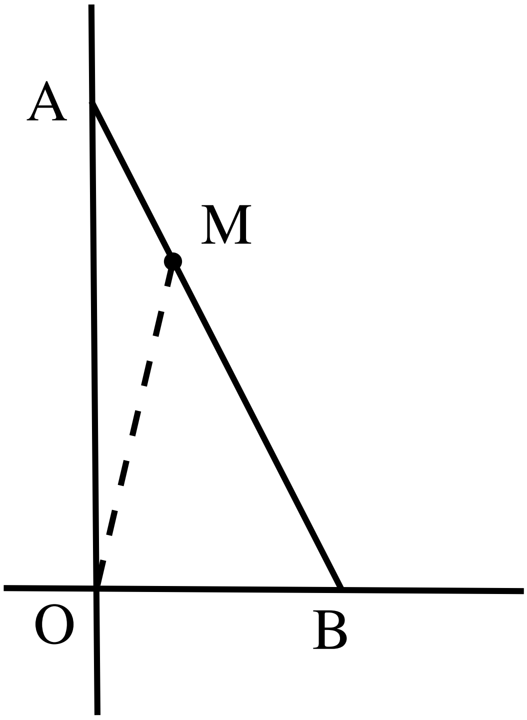


1. A l'aide des informations précédentes et de la courbe :
   (a) déterminer les valeurs de $f(0), f(1), f(2), f(4)$.
   (b) déterminer les valeurs de $f'(0), f'(1), f'(2), f'(4)$
   (c) déterminer les équations des tangente à (Γ) respectivement aux points D et E.
   (d) déterminer le tableau de variation complet de f sur $[-2\ ;\ 5]$ *(signe de $f'(x)$ compris).*
   (e) Laquelle des courbes C_1, C_2 ou C_3 suivantes peut-être la courbe de la fonction f' ? *(justifier)*



2. On considère maintenant que $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 4$
   (a) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 5]$.
   (b) Y a t-il cohérence entre les résultats graphiques et algébriques ?

Exercice 2 : *(étude de fonction)*



Placer dans un repère orthonormal d'origine O et d'unités 1cm les points $A(0;4)$ et $B(2;0)$ puis construire le segment $[AB]$

Un point $M(x;y)$ se déplace sur le segment $[AB]$ de A vers B

1. à l'oeil :

   trouver graphiquement la position de M pour laquelle la distance OM est minimale et donner les valeurs de ses coordonnées x_M et y_M ainsi que la distance OM à 0,1 près

2. par une étude de fonction :

   vous admettrez *(sans le démontrer)* que l'équation de la droite (AB) est $y = -2x + 4$

   (a) montrer que $OM = \sqrt{x^2 + (4-2x)^2}$

   (b) déduire du résultat précédent que $OM = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$

   (c) soit la fonction f définie pour $x \in [0;2]$ telle que $f(x) = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$

      i. montrer que $f'(x) = \dfrac{5x-8}{\sqrt{5x^2 - 16x + 16}}$ *rappel :* $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

      ii. en déduire les variations de f sur $[0;2]$

   (d) en déduire les coordonnées exactes de M pour que OM soit minimale et donner cette valeur minimale

   (e) ce résultat est-il cohérent avec celui trouvé à l'oeil ?

Exercice 3 : *(calcul de dérivée)*

Calculer $f'(x)$ dans chaque cas

1. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x} + 5x^5$
2. $f(x) = \dfrac{10x^2 + 1000}{x + 10}$
3. $f(x) = (10-2x)\sqrt{10x-25}$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{100-30x}{\sqrt{10x-25}}$

6.15 corrigé évaluation 6

Exercice 1 :

1. A l'aide des informations précédentes et de l'annexe 1, on a :

   a. $\boxed{f(0) = 4}$ $\boxed{f(1) = 4,5}$ $\boxed{f(2) = 5}$ $\boxed{f(4) = 0}$.

   b. $\boxed{f'(0) = 0}$ car la droite tangente à la courbe est horizontale en $x = 0$

   $f'(1) =$ coefficient directeur de la tangente à la courbe en x = 1.
   $f'(1) =$ coefficient directeur "a" de la droite (CF), $a = \dfrac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \dfrac{6 - 4,5}{3 - 1} = \boxed{0,75}$

   $\boxed{f'(2) = 0}$ car la droite tangente à la courbe est horizontale en $x = 2$.

   $f'(4) =$ coefficient directeur de la tangente à la courbe en x = 4.
   $f'(4) =$ coefficient directeur "a" de la droite (EF), $a = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{6 - 0}{3 - 4} = \boxed{-6}$

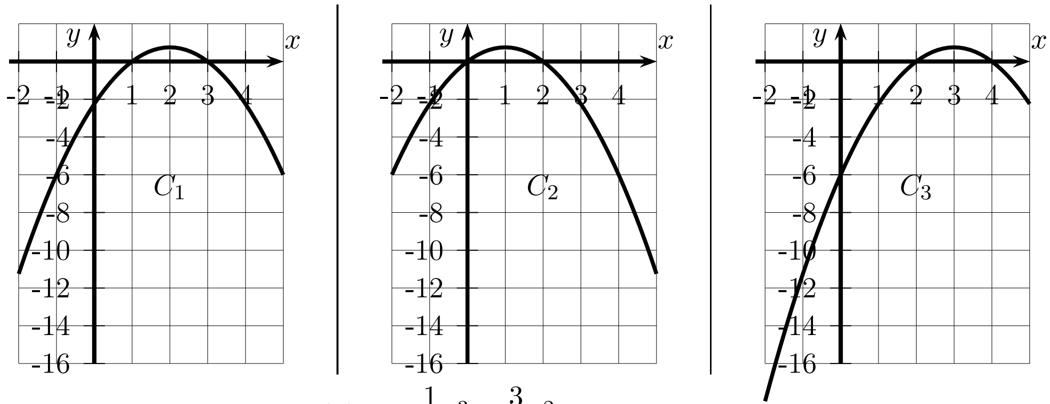
   Equations de la tangente à (Γ) en D :
   $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 0(x - 2) + 5$ $\boxed{y = 5}$

   Equations de la tangente à (Γ) en E :
   $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = -6(x - 4) + 0$ $\boxed{y = -6x + 24}$

   d. le tableau de variation complet de f sur $[-2 ; 5]$.

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	9	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	-8,5

   e. Seule C_2 peut-être la courbe de la fonction f' car c'est la seule pour laquelle $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$



2. On considère maintenant que $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 4$

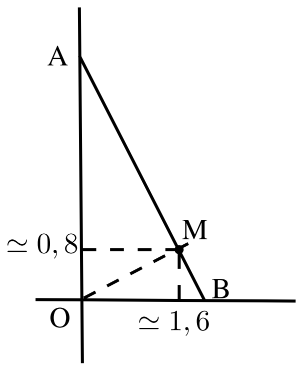
   a. $f'(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{6}{4}x = -0,75x^2 + 1,5x$
   Annulation de f' : $-0,75x^2 + 1,5x = 0 \Longleftrightarrow x(-0,75x + 1,5) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{-1,5}{-0,75} = 2$
   variations de f et signe de $f'(x) = -0,75x^2 + 1,5x$: on utilise la règle du signe du trinôme

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	9	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	-8,5

   b. On constate qu'il y a cohérence entre les résultats graphiques et algébriques.

Exercice 2 : *(étude de fonction)*

1. à l'oeil :
   graphiquement, la position de M pour laquelle la distance OM est minimale est telle que :
   $\boxed{x_M \simeq 1,6}$, $\boxed{y_M \simeq 0,8}$ et $\boxed{OM \simeq 1,8}$ à 0,1 près



2. par une étude de fonction :
   (a) $OM = \sqrt{(y_M - y_O)^2 + (x_M - x_O)^2}$

   $OM = \sqrt{[(-2x+4) - 0]^2 + (x-0)^2}$

   $\boxed{OM = \sqrt{x^2 + (4-2x)^2}}$ *(C.Q.F.D.)*

   (b) on développe :
   $OM = \sqrt{x^2 + (4-2x)^2} = \sqrt{x^2 + 16 - 16x + 4x^2} = \boxed{\sqrt{5x^2 - 16x + 16}}$ *(C.Q.F.D.)*

   (c) pour $x \in [0;2]$, $f(x) = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$

   i. $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{10x - 16}{2\sqrt{5x^2 - 16x + 16}} = \underbrace{\dfrac{5x - 8}{\sqrt{5x^2 - 16x + 16}}}_{C.Q.F.D.}$ avec $\begin{cases} u(x) = 5x^2 - 16x + 16 \\ u'(x) = 10x - 16 \end{cases}$

   ii. d'où les variations de f sur $[0;2]$:
   $f'(x)$ est du signe du numérateur $5x - 8$ car le dénominateur est positif *(en tant que racine carrée)*

x	2	1,6	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	4 ↘	$f(1,6) \simeq 1,8$	↗ 2

   $5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{5} = 1,6$

   $f(0) = \sqrt{5 \times 0^2 - 16 \times 0 + 16} = 4$

   (d) pour que OM soit minimale il faut $\boxed{M(1,6;0,8)}$ et la valeur minimale est $\boxed{\simeq 1,8}$

   (e) ce résultat est cohérent avec celui trouvé à l'oeil

Exercice 3 : *(calcul de dérivée)*

1. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x} + 5x^5$

   $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{-4}{x^2} + 25x^4 = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x^2} + 25x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{10x^2 + 1000}{x + 10}$ $\qquad (\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   $f'(x) = \dfrac{20x(x+10) - (10x^2 + 1000) \times 1}{(x+10)^2} = \boxed{\dfrac{10x^2 + 200x - 1000}{(x+10)^2}}$

3. $f(x) = (10 - 2x)\sqrt{10x - 25}$ $\qquad (uv)' = u'v + uv'$ $\qquad$ ($10x - 25 > 0$ pour que f soit définie)

   $f'(x) = -2\sqrt{10x - 25} + (10 - 2x) \times \dfrac{10}{2\sqrt{10x - 25}} = -2\sqrt{10x - 25} + \dfrac{5(10 - 2x)}{\sqrt{10x - 25}}$

   $f'(x) = \dfrac{-2(\sqrt{10x - 25})^2}{\sqrt{10x - 25}} + \dfrac{5(10 - 2x)}{\sqrt{10x - 25}} = \dfrac{-2(10x - 25) + 5(10 - 2x)}{\sqrt{10x - 25}}$

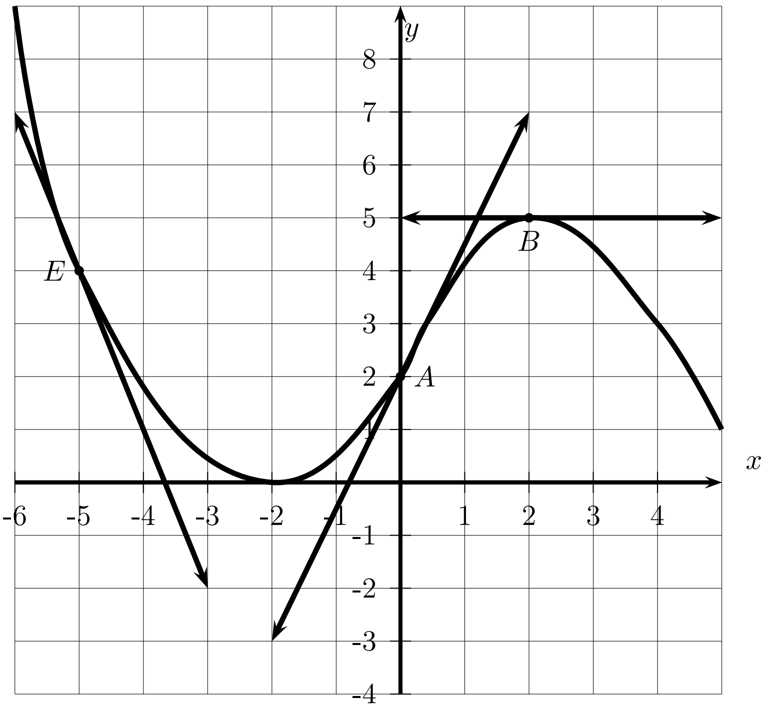
   $f'(x) = \dfrac{-20x + 50 + 50 - 10x}{\sqrt{10x - 25}} = \boxed{\dfrac{100 - 30x}{\sqrt{10x - 25}}}$ *(C.Q.F.D.)*

6.16 évaluation 7

nom et prénom : ...

évaluation

Exercice 1 : *(lecture graphique)*
Soit la fonction f représentée ci dessous sur $[-6;5]$.
Les tangentes à la courbe en E, A et B, C sont aussi représentées



1. Lire
   (a) $f(-5)$ et $f'(-5)$
   (b) $f(0)$ et $f'(0)$
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$

2. donner les équations des droites tangentes à la courbe en $x_0 = -5$ et en $x_0 = 2$
3. donner l'ensemble S des solutions de
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f'(x) = 0$
4. donner le tableau de signes de $f(x)$ sur $[-6;5]$
5. donner le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f sur $[-6;5]$

   (en un seul tableau)

Exercice 2 : *(compléter les tableaux suivants)*

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
$a \in \mathbb{R}$		$\mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[$
x		$\mathbb{R}$
$ax\ (a \in \mathbb{R})$		$\mathbb{R}$
x^2		$\mathbb{R}$
x^3		$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ sauf 0)
$\dfrac{1}{x^2}$		$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^3}$		$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$		$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}^{+*} =]0;\ +\infty[$

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
$au\ (a \in \mathbb{R})$		D_u
$u + v$		$Du \cap D_v$
$u - v$		$Du \cap D_v$
$u^n\ (n \in \mathbb{N})$		Du
$\dfrac{1}{u}$		Du^*
$\dfrac{1}{u^n}\ (n \in \mathbb{N})$		Du^*
uv		$Du \cap D_v$
$\dfrac{u}{v}$		$Du \cap D_v^*$
$\sqrt{u}$		Du^+

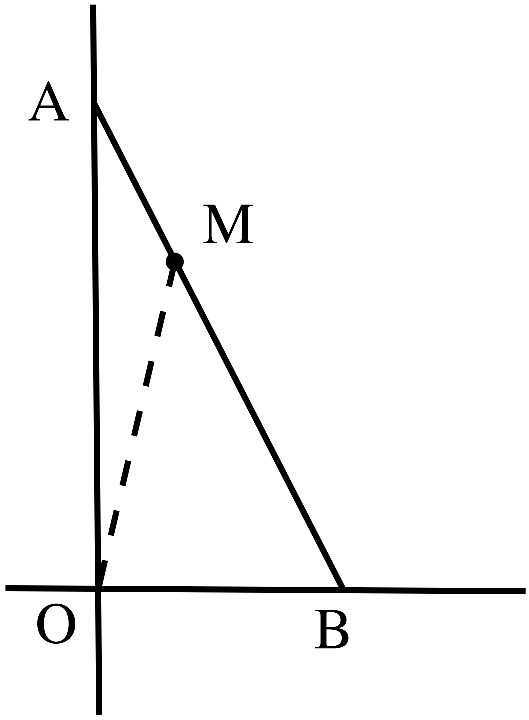
Exercice 3 :
étudier les variations de f définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ par la dérivation et en déduire le maximum de f et la valeur de x associée

Exercice 4 :
étudier les variations de f définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$ par la dérivation et en déduire le maximum de f et la valeur de x associée

Exercice 5 :

étudier les variations de f définie sur $[1;100]$ par $f(x)=\dfrac{60x^2+2160}{x}$ par la dérivation et en déduire le minimum de f et la valeur de x associée

Exercice 6 : *(étude de fonction en Bonus)*



Placer dans un repère orthonormal d'origine O et d'unités 1cm les points $A(0;4)$ et $B(2;0)$ puis construire le segment $[AB]$
Un point $M(x;y)$ se déplace sur le segment $[AB]$ de A vers B

1. à l'oeil :

   trouver graphiquement la position de M pour laquelle la distance OM est minimale et donner les valeurs de ses coordonnées x_M et y_M ainsi que la distance OM à 0,1 près

2. par une étude de fonction :

   vous admettrez *(sans le démontrer)* que l'équation de la droite (AB) est $y=-2x+4$

   (a) montrer que $OM=\sqrt{x^2+(4-2x)^2}$

   (b) déduire du résultat précédent que $OM=\sqrt{5x^2-16x+16}$

   (c) soit la fonction f définie pour $x\in[0;2]$ telle que $f(x)=\sqrt{5x^2-16x+16}$

      i. montrer que $f'(x)=\dfrac{5x-8}{\sqrt{5x^2-16x+16}}$ *rappel :* $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

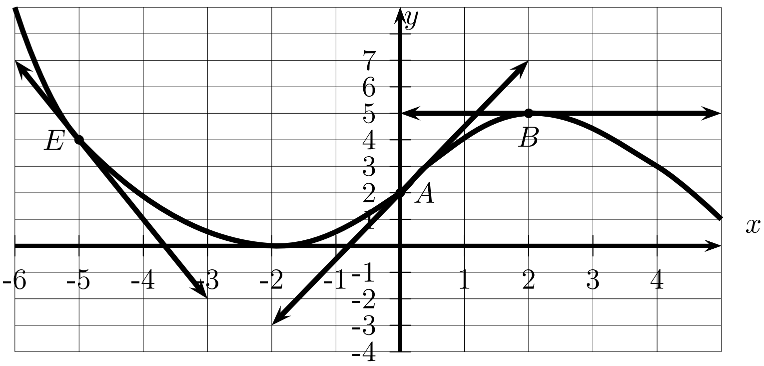
      ii. en déduire les variations de f sur $[0;2]$

   (d) en déduire les coordonnées exactes de M pour que OM soit minimale et donner cette valeur minimale

   (e) ce résultat est-il cohérent avec celui trouvé à l'oeil ?

6.17 corrigé évaluation 7

Corrigé exercice 1 : *(lecture graphique)*



1. Lire
   (a) $f(-5) = 4$

   $$f'(-5) = \frac{-2-4}{-3-(-5)} = \frac{-6}{2} = -3$$
   avec $E(-5;4)$ et $F(-3;-2)$.

   (b) $f(0) = 2$

   $$f'(0) = \frac{7-2}{2-0} = \frac{5}{2} = 2,5$$
   avec $A(0;2)$ et $G(2;7)$.

   (c) $f(2) = 5$
   $f'(2) = 0$ car tangente horizontale.

2. équations des tangentes
   (a) en $x_0 = -5$:
   $y = f'(-5)(x-(-5)) + f(-5)$ donc $y = -3(x+5)+4$ donc $\boxed{y = -3x - 11}$

   (b) en B : $\boxed{y = 5}$ tangente horizontale

3. ensemble des solutions
   (a) $f(x) = 0 \iff x \in \{-2\}$

   (b) $f'(x) = 0 \iff x \in \{-2; 2\}$

4. tableau de signes de $f(x)$

valeur de x	-6		-2		5
signe de $f(x)$		+	0	+	

5. tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f

valeur de x	-6		-2		2		5
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x)$	9	↘	0	↗	5	↘	1

Exercice 2 : *(compléter les tableaux suivants)*

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
$a \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[$
x	1	$\mathbb{R}$
ax $(a \in \mathbb{R})$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ sauf 0)
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^3}$	$\frac{-3}{x^4}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0;\ +\infty[$

$f(x)$	$f'(x)$	domaine
au $(a \in \mathbb{R})$	au'	D_u
$u+v$		$u'+v'$ $Du \cap D_v$
$u-v$	$u'-v'$	$Du \cap D_v$
u^n $(n \in \mathbb{N})$	$nu^{n-1}u'$	Du
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	Du^*
$\frac{1}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$	Du^*
uv	$u'v+uv'$	$Du \cap D_v$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$Du \cap D_v^*$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Du^+

Exercice 3 :

1. calcul de la dérivée :
   $f(x) = -5x^2 + 40x + 10$ donc
   $\boxed{f'(x) = -10x + 40}$

2. annulation de f' sur $[-10\ ;\ 10]$
   $f'(x) = 0$
   $-10x + 40 = 0$ donc $x = \dfrac{-40}{-10} = \boxed{4}$
   signe de f' sur $[-10\ ;\ 10]$

valeur de x	-10		4		10
signe de $f'(x)$		+	0	-	

(signe de "$a = -10$" à droite de l'annulation)

3. tableau de variations de f sur $[-10\ ;\ 10]$

x	-10		4		10
$f'(x)$		+	0	-	
f	-890	$\nearrow$	90	$\searrow$	-90

$f(10) = -5 \times 10^2 + 40 \times 10 + 10 = -90$
le maximum vaut 90 pour $x = 4$

Exercice 4 :

étudier les variations de f définie sur $[-5; 5]$ par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$ par la dérivation et en déduire le maximum de f et la valeur de x associée

(a) $f'(x) = -3 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 72 + 0 = \boxed{-9x^2 - 18x + 72}$

(b) annulation et signe de $f'(x)$ et variations de f sur $[-5; 5]$:
$f'(x) = 0 \iff -9x^2 - 18x + 72 = 0$ (avec le discriminant et $a = -9,\ b = -18,\ c = 72$)
$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} = (-18)^2 - 4 \times (-9) \times 72 = 2916 \boxed{\Delta > 0 \text{ donc 2 annulations}}$
$\boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} = \dfrac{-(-18) + \sqrt{2916}}{2 \times (-9)} = -4$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} = \dfrac{-(-18) - \sqrt{2916}}{2 \times (-9)} = 2$
$\boxed{f'(x) = 0 \iff x = -4 \text{ ou } x = 2}$
pour le signe de $-9x^2 - 18x + 72$ on utilise le $\boxed{\text{règle du signe d'un trinôme}}$
(signe de $a = -9$ à l'extérieur des annulations)

valeur de x	-5		-4		2		$+5$
signe de $f'(x) = -9x^2 - 18x + 72$		-	0	+	0	-	
variations de $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$	-205	$\searrow$	-235	$\nearrow$	89	$\searrow$	-235

$f(5) = -3 \times 5^3 - 9 \times 5^2 + 72 \times 5 + 5 = -235$

(c) extremums de f sur $[-5; 5]$
$\boxed{\text{maximum} = 89 \text{ pour } x = 2}$

Exercice 5 :

étudier les variations de f définie sur $[1; 100]$ par $f(x) = \dfrac{60x^2 + 2160}{x}$ par la dérivation et en déduire le minimum de f et la valeur de x associée

(a) $f'(x) = \dfrac{120x \times x - (60x^2 + 2160) \times x}{x^2} = \boxed{\dfrac{60x^2 - 2160}{x^2}}$

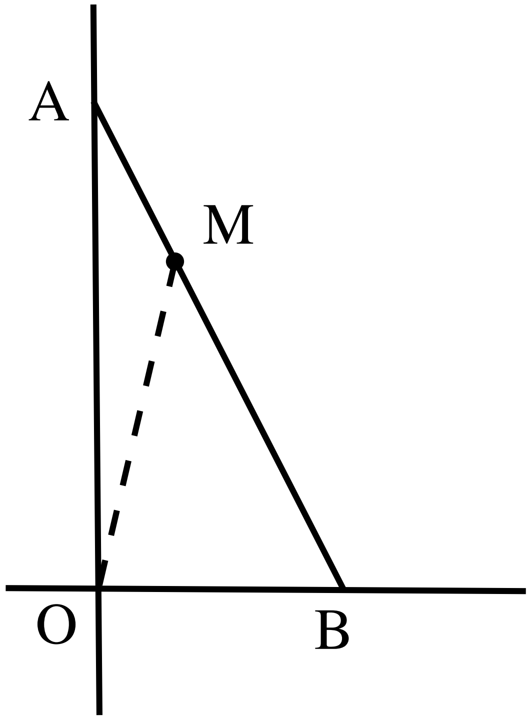
(b) x^2 est positif donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $60x^2 - 2160$ qui est un trinôme avec deux annulations $x_1 = -\sqrt{\dfrac{2160}{60}} = -6$ et $x_2 = \sqrt{\dfrac{2160}{60}} = 6$

d'où le tableau :

x	1		6		100
$f'(x)$		-	0	+	
f	2220	$\nearrow$	720	$\searrow$	$6021,6$

et le minimum de f vaut 720 pour $x = 6$

Exercice 6 : *(étude de fonction en Bonus)*



Placer dans un repère orthonormal d'origine O et d'unités 1cm les points $A(0;4)$ et $B(2;0)$ puis construire le segment $[AB]$
Un point $M(x;y)$ se déplace sur le segment $[AB]$ de A vers B

1. à l'oeil :

   trouver graphiquement la position de M pour laquelle la distance OM est minimale et donner les valeurs de ses coordonnées x_M et y_M ainsi que la distance OM à 0,1 près

2. par une étude de fonction :

   vous admettrez *(sans le démontrer)* que l'équation de la droite (AB) est $y = -2x + 4$

   (a) montrer que $OM = \sqrt{x^2 + (4 - 2x)^2}$

   (b) déduire du résultat précédent que $OM = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$

   (c) soit la fonction f définie pour $x \in [0;2]$ telle que $f(x) = \sqrt{5x^2 - 16x + 16}$

      i. montrer que $f'(x) = \dfrac{5x - 8}{\sqrt{5x^2 - 16x + 16}}$ *rappel :* $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

      ii. en déduire les variations de f sur $[0;2]$

   (d) en déduire les coordonnées exactes de M pour que OM soit minimale et donner cette valeur minimale

   (e) ce résultat est-il cohérent avec celui trouvé à l'oeil ?

6.18 évaluation 8

Nom :

évaluation degré 3

Exercice 1 : Calculer $f'(x)$ dans chaque cas en détaillant les calculs si possible

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
2. $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - x + 3$

Exercice 2 :
Pour une entreprise qui produit et vend un produit pharmaceutique liquide conditionné en bidons, on dispose des données suivantes :
Coût unitaire d'achat du produit brut : 20 €/litre
Coût unitaire de traitement : 30 €/litre
Pour un prix unitaire de vente de 30 €/litre, par conditionnemment de bidons de 5 litres, il y a alors 100 bidons vendus
Chaque fois que le prix de vente du litre est augmenté de 1 €, la contenance des bidons augmente de 1 litre et le nombre de bidons vendus diminue de 1 unité
On cherche alors le prix de vente qui permet d'obtenir le bénéfice maximal
On note x le nombre de fois que l'on augmente le prix de vente de 1€

nombre d'augmentations de 1€ x	0	10	70	x
prix de vente du litre *(€)* $p(x)$	30			
conditionnement *(litres)* $l(x)$	5			
nombre de ventes *(bidons)* $n(x)$	100			
volume des ventes *(litres)* $V(x)$	500			
chiffre d'affaire *(k€)* $R(x)$	15			
coût total *(k€)* *(achat + traitement)* $C(x)$	25			
Bénéfice (k€) $B(x)$	-10			

1. Etude numérique :
   (a) compléter le tableau ci dessus en détaillant les calculs
   (b) plus le prix de vente augmente et plus le bénéfice semble augmenter : (vrai / faux)
   (c) semble t-il exister un prix qui maximise le bénéfice ?

2. Etude Algébrique
   (a) montrer que le bénéfice est donné en euros par $B(x) = (x + 5)(100 - x)(x - 20)$
   (b) montrer que le bénéfice est donné en euros par $B(x) = -x^3 + 115x^2 - 1400x - 10000$
   (c) calculer $B'(x)$
   (d) montrer que $B'(x) = (70 - x)(3x - 20)$
   (e) recopier et compléter le tableau de signes suivant en détaillant les calculs des annulations

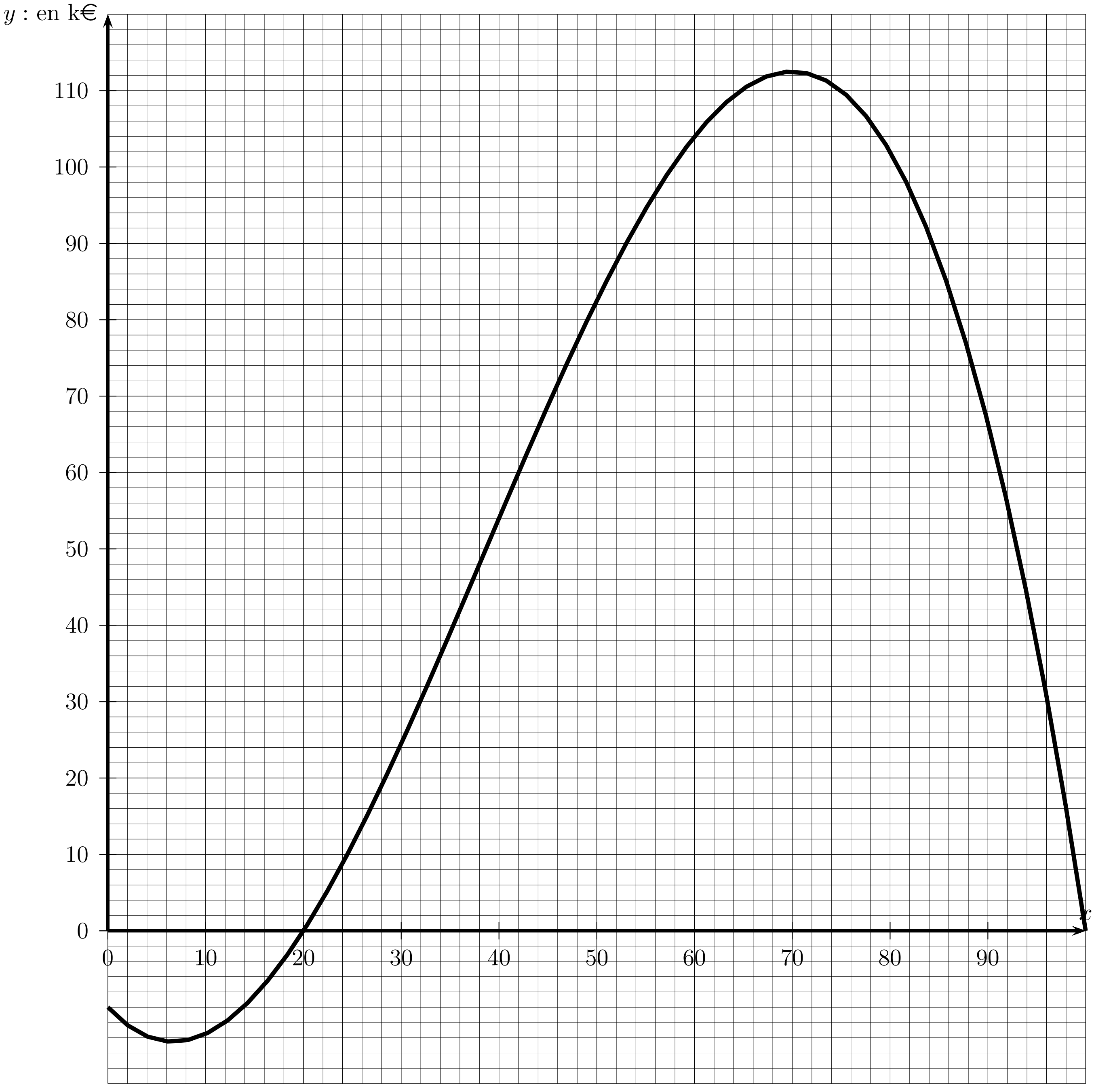
valeur de x	$0 \qquad\qquad\qquad 100$
signe de $(70-x)$	
signe de $(3x-20)$	
signe de $B'(x)$	

(f) en déduire le tableau de variations complet de B sur [0 ;100]

(g) en déduire les extremums de B sur [0 ;100] à l'unité près *(valeur des extrémums et valeurs de x associées)*

(h) pour l'entreprise, quel est alors le prix de vente idéal du litre et quel est le bénéfice associé ?

3. Etude Graphique à partir de la courbe de B



à partir de la courbe de B ci dessus *(tracés apparents)*

(a) trouver le bénéfice maximal graphiquement ainsi que la valeur du prix de vente associé

(b) trouver les valeurs du prix de vente unitaire qui donnent un bénéfice positif strict

(c) pour quels prix de ventes le bénéfice est-il d'au moins 42 000 € ?

6.19 corrigé évaluation 8

Exercice 1 : Calculer $f'(x)$ dans chaque cas en détaillant les calculs si possible

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
   $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2x + 1}$

2. $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - x + 3$
   $f(x) = -2 \times 3x^2 + 10 \times 2x - 1 + 0$
   $\boxed{f'(x) = -6x^2 + 20x - 1}$

Exercice 2 :

nombre d'augmentations de 1€ x	0	10	70	x
prix de vente du litre *(€)* $p(x)$	30	$30{+}10 = 40$	$30 + 70 = 100$	$30 + x$
conditionnement *(litres)* $l(x)$	5	$5 + 10 = 15$	$5 + 70 = 75$	$5 + x$
nombre de ventes *(bidons)* $n(x)$	100	100 - 10 $= 90$	100 - 70 $= 30$	$100 - x$
volume des ventes *(litres)* $V(x)$	500	$15 \times 90 = 1350$	$75 \times 30 = 2250$	$(x + 5)(100 - x)$
chiffre d'affaire *(k€)* $R(x)$	15	$\dfrac{40 \times 1350}{1000} = 54$	$\dfrac{100 \times 2250}{1000} = 225$	$p(x) \times V(x)$
coût total *(k€)* *(achat + traitement)* $C(x)$	25	$\dfrac{50 \times 1350}{1000} = 67,5$	$\dfrac{50 \times 2250}{1000} = 112,5$	$50 \times V(x)$
Bénéfice (k€) $B(x)$	-10	$54 - 67,5 = -13,5$	$225 - 112,5 = 112,5$	$R(x) - C(x)$

1. Etude numérique :
   (a) tableau ci dessus
   (b) plus le prix de vente augmente et plus le bénéfice semble augmenter : $\boxed{\text{faux}}$ puisqu'il diminue de -10 à -13,5
   (c) semble t-il exister un prix qui maximise le bénéfice : $\boxed{\text{oui}}$

2. Etude Algébrique
   (a) $B(x) = R(x) - C(x)$
   $B(x) = (30 + x)(x + 5)(100 - x) - 50(x + 5)(100 - x)$
   $B(x) = (30 + x - 50)(x + 5)(100 - x)$
   $\boxed{B(x) = (x - 20)(x + 5)(100 - x)}$ CQFD

   (b) $B(x) = (x + 5)(100 - x)(x - 20)$
   $B(x) = (100x - x^2 + 500 - 5x)(x - 20)$
   $B(x) = (-x^2 + 95x + 500)(x - 20)$
   $B(x) = -x^3 + 20x^2 + 95x^2 - 190x + 500x - 10000$
   $\boxed{B(x) = -x^3 + 115x^2 - 1400x - 10000}$ CQFD

   (c) $B'(x) = -3x^2 + 115 \times 2x - 1400 - 0$
   $\boxed{B'(x) = -3x^2 + 230x - 1400 - 0}$

(d) $(70-x)(3x-20) = 210x - 1400 - 3x^2 + 20x = -3x^2 + 230x - 1400 = B'(x)$ CQFD

(e)

valeur de x	0	$\frac{20}{3}$	70	100
signe de $(70-x)$	$+$	0	$-$ |	$-$
signe de $(3x-20)$	$-$	|	$-$ 0	$+$
signe de $B'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$

annulations

$70 - x = 0 \Longleftrightarrow x = 70$

$3x - 20 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{20}{3}$

(f) tableau de variations complet de B sur $[0\,;100]$

valeur de x	0		$\frac{20}{3}$		70		100
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $B'(x)$	-10000	$\searrow$	$\simeq -14518,52$	$\nearrow$	112500	$\searrow$	0

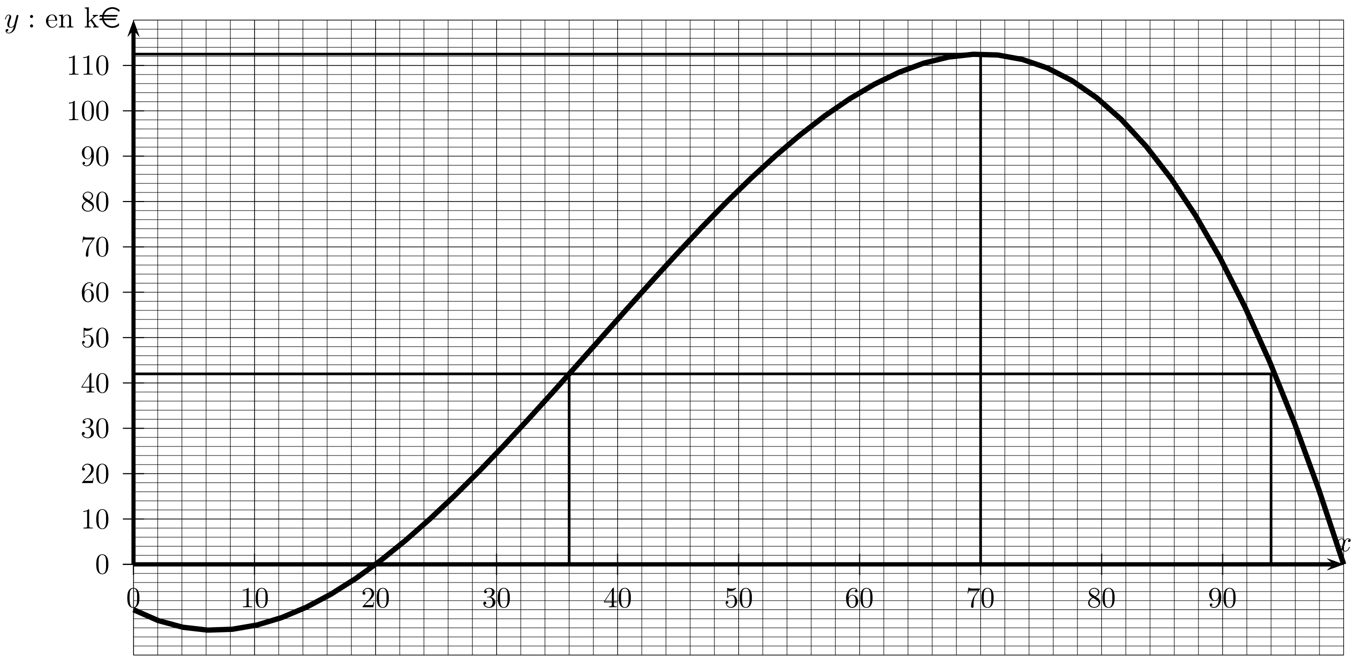
annulations

$$\begin{cases} B(0) = -0^3 + 115 \times 0^2 - 1400 \times 0 - 10000 = -10000 \\ B(\frac{20}{3}) = -(\frac{20}{3})^3 + 115 \times (\frac{20}{3})^2 - 1400 \times (\frac{20}{3}) - 10000 \simeq -14518,52 \\ B(70) = -70^3 + 115 \times 70^2 - 1400 \times 70 - 10000 = 112500 \\ B(100) = -100^3 + 115 \times 100^2 - 1400 \times 100 - 10000 = 0 \end{cases}$$

(g) $\boxed{\text{Maximum} = 112500 \text{ pour x} = 70}$ et $\boxed{\text{Minimum} \simeq -14519 \text{ pour } x = \frac{20}{3}}$

(h) pour l'entreprise, le prix idéal de vente est $30 + 70 = \boxed{100\text{ €}}$ et le bénéfice associé est $\boxed{112500\text{ €}}$

3. Etude Graphique à partir de la courbe de B



à partir de la courbe de B ci dessus *(tracés apparents)*

(a) $\boxed{\text{Bénéfice Maximum} = 121500\text{ €pour un prix de vente de 100€}}$

(b) les valeurs du prix de vente unitaire qui donnent un bénéfice positif strict sont dans $]30+20; 30+100[$ soit dans $\boxed{]50; 130[}$

(c) le bénéfice est-il d'au moins 42 000 €pour un prix de vente dans $]30+36; 30+94[$ soit dans $\boxed{[66; 124]}$

6.20 évaluation 9

Nom :

évaluation dérivations

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 190x - 680$ pour $x \in [0; 40]$

(a) calculer $f'(x)$

(b) étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$ sur $[0; 40]$

(c) donner le tableau de variations complet de f sur $[0; 40]$

(d) donner les extremums de f sur $[0; 40]$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 4x^2 - 48x + 80$ pour $x \in [-2; 12]$

(a) calculer $f'(x)$

(b) étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$ sur $[-2; 12]$

(c) donner le tableau de variations complet de f sur $[-2; 12]$

(d) donner les extremums de f sur $[-2; 12]$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 72x + 5$ pour $x \in [-5; 5]$

(a) calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3x + 12)(-3x + 6)$

(b) étudier l'annulation et le signe de $f'(x)$ sur $[-5; 5]$

(c) donner le tableau de variations complet de f sur $[-5; 5]$

(d) donner les extremums de f sur $[-5; 5]$

Exercice 4 :

Pour un certain type de produit, et par jour,
Si le commerçant vend l'unité 90€ alors il y a 10 ventes.
Pour chaque baisse de prix de 1€ il y a 5 ventes de plus.
Le commerçant achète au fournisseur au tarif de 50€ l'unité .
Le commerçant a aussi 1080€ de coûts fixes par jour.
Soit x le nombre de baisses de 1€ du prix de vente unitaire .

(a) Déterminer, le prix de vente, le nombre de ventes, la recette des ventes, le coût total et le bénéfice du commerçant s'il baisse le prix unitaire une fois de 1€

(b) Exprimer en fonction de x, le prix de vente $p(x)$, le nombre de ventes $n(x)$, la recette des ventes $r(x)$, le coût total $c(x)$ et le bénéfice $b(x)$ du commerçant s'il baisse le prix unitaire x fois de 1€

(c) Montrer que le bénéfice est donné en fonction de x par : $b(x) = -5x^2 + 190x - 680$

(d) Déterminer le prix "idéal", c'est à dire qui maximise le bénéfice pour le commerçant
(utiliser éventuellement les résultats de l'exercice 1)

(e) Déterminer les valeurs du prix de vente pour lesquelles le bénéfice est positif strict *(intervalle de rentabilité)*

(f) *(Bonus)*
A partir de quelle valeur C_0 du coût fixe (à la place de 1080€), le commerçant ne pourrait-il jamais obtenir un profit quelle que soit la baisse de prix ? *(justifier)*

7 tp

7.1 TP : "coefficients directeurs" des fonctions usuelles

1. Pentes des fonctions usuelles

   (a) Cas de la fonction carrée : $\boxed{f(x) = x^2}$

   i. avec géogébra, construire la courbe de la fonction carré $f(x) = x^2$
   (le travail sera sauvegardé dans votre dossier personnel dans un sous dossier de nom "mathematiques")(sans accents)

   ii. construire un point A sur la courbe précédente puis la droite tangente à la courbe qui passe par A *(en rouge épaisseur 5)* puis déplacer A pour voir

   iii. faire apparaître la valeur de la pente de la tangente

   iv. faire apparaître la grille

   v. compléter expérimentalement le tableau de valeurs suivant

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

   puis conjecturer une formule qui donne la pente $f'(x)$ en fonction de x : $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

   vi. compléter le tableau suivant

x	$-\infty$ ... $+\infty$
signe de $f'(x)$	... ...
variations de $f(x)$	... ...

   vii. la pente s'annule t-elle en un point qui correspond à un extrémum ? : ... *(maximum / minimum)*

   (b) Cas de la fonction cube : $\boxed{f(x) = x^3}$

   i. remplacer $f(x) = x^2$ par $f(x) = x^3$

   ii. compléter expérimentalement le tableau de valeurs suivant

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

   puis conjecturer une formule qui donne la pente $f'(x)$ en fonction de x : $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

   iii. compléter le tableau suivant

x	$-\infty$ ... $+\infty$
signe de $f'(x)$	... ...
variations de $f(x)$	...

   iv. la pente s'annule t-elle en un point qui correspond à un extrémum ? : ... *(maximum / minimum)*

   (c) De même pour la fonction inverse : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$

   i. compléter expérimentalement le tableau de valeurs suivant

x	-2	-1	0.5	2
$f'(x)$				

   puis conjecturer une formule qui donne la pente $f'(x)$ en fonction de x : $f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = ...$

   ii. compléter le tableau suivant

x	$-\infty$ ... $+\infty$
signe de $f'(x)$	... ...
variations de $f(x)$	... ...

   iii. la pente semble t-elle pouvoir s'annuler ?, si oui pour quelle valeur de x ? : ...

(d) Cas des fonctions affines : $\boxed{f(x) = ax + b}$

i. effacer la fonction $f(x)$ précédente

ii. construire un curseur et le renommer "a", de même pour un curseur "b"

iii. construire la courbe de la fonction $f(x) = ax + b$

iv. sur la courbe, construie un point A, puis la tangente passant par A, puis afficher la pente

v. en utilisant les curseurs, le point A et la valeur de la pente affichée, conjecturer les formules suivantes

A. $f(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) = ...$

B. $f(x) = 1 \Longrightarrow f'(x) = ...$

C. $f(x) = b,\ b \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = ...$

D. $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = ...$

E. $f(x) = 2x \Longrightarrow f'(x) = ...$

F. $f(x) = -3x \Longrightarrow f'(x) = ...$

G. $f(x) = 3x - 4 \Longrightarrow f'(x) = ...$

H. $f(x) = 4x - 3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

I. $f(x) = ax + b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = ...$

vi. multiplication d'une fonction $u(x)$ par un réel $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = ku(x)}$
vous avez le "champ libre" pour expérimenter puis conjecturer les formules des pentes des fonctions suivantes

A. $f(x) = 2x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

B. $f(x) = 6x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

C. $f(x) = 10x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

D. $f(x) = ax^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

E. $f(x) = 2x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

F. $f(x) = 6x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

G. $f(x) = 10x^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

H. $f(x) = ax^3 \Longrightarrow f'(x) = ...$

I. $f(x) = k \times u(x) \Longrightarrow f'(x) = ...$

vii. somme de deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ $\boxed{f(x) = u(x) + v(x)}$
vous avez le "champ libre" pour expérimenter puis conjecturer les formules des pentes des fonctions suivantes

A. $f(x) = x^2 + x \Longrightarrow f'(x) = ...$

B. $f(x) = x^2 + 2x \Longrightarrow f'(x) = ...$

C. $f(x) = x^3 + x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

D. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 \Longrightarrow f'(x) = ...$

E. $f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = ...$

viii. et pour un produit de fonctions ? ou un quotient de fonctions ? :

ix. $f(x) = u(x) \times v(x) \Longrightarrow f'(x) = ...$

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow f'(x) = ...$

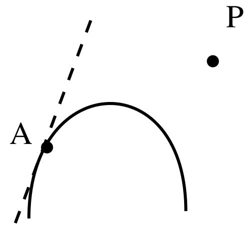
2. Sens de variation et signe de la pente
Conjecturer un lien entre le signe de la pente d'une fonction et le sens de variation de cette fonction (distinguer 3 cas)

3. Annulation de la pente et Extrémums
Conjecturer un lien entre l'annulation de la pente d'une fonction et l'existence d'extremums pour cette fonction (distinguer 2 cas)

7.2 sonde spatiale : (équation de tangente)

tp geogebra

La figure ci dessous, ilustre schématiquement la situation suivante :
Une sonde spatiale A a été programmée pour décrire la parabole d'équation
$y = f(x) = -x^2 + 2x + 1$ pour x croissant, ceci afin de rejoindre la station spatiale P.
Malheureusement, la station P a du modifier sa position après le lancement de la sonde A et le point P n'est plus sur la trajectoire parabolique prévue.
La seule chose qui puisse être faite est la coupure des propulseurs de la sonde A. On suppose que si elle coupe ses propulseurs, la sonde poursuivra alors sa route selon la droite tangente à la parabole précédente au point où les propulseurs sont coupés. Le but est de déterminer où couper les propulseurs pour que la sonde A atteigne la station spatiale P alors située au point $P(2; 4)$



1. avec le logiciel géogébra
   (le travail sera sauvegardé dans le dossier "math" du dossier "mes documents" sous le nom "sonde_spatiale")
   (a) construire un curseur a *(régler l'incrément à 0,01)*
   (b) construire la courbe de la fonction f
   (c) construire le point $A = (a, f(a))$
   (d) construire la tangente à la courbe au point A
   (e) construire un point B sur la tangente et afficher la distance entre A et B
   (f) construire le point $P = (2, 4)$
   (g) couper les propulseurs en $x = 0,25$ semble t-il permettre à la sonde de rejoindre la station ? *(justifier clairement)*
   (h) pour quelles valeurs de a (à 0,1 près) la tangente à la courbe passe t-elle par le point P ?
   (i) Pour quelle(s) valeur(s) de a la sonde pourrait atteindre la station ? (justitifer) et donner la (ou les) distances entre A et P à 0,01 près

2. algébriquement
   (a) si les propulseurs sont coupés au point d'abscisse 0,25
   démontrer par calculs que la sonde n'atteindra pas exactement la station orbitale située au point $P(2; 4)$
   (détailler et expliquer la démarche)
   (Aide : déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0,25 et déterminer si elle passe par P)
   retrouve t-on le résultat trouvé avec géogébra ? (oui / non)
   (b) montrer que l'équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse a est
   $y = 2(1 - a)x + a^2 + 1$
   (c) déterminer par calcul les valeurs de a *(à 0,001 près)* pour que la tangente précédente passe par le point $P(2; 4)$ *(détailler et expliquer la démarche)*
   (Aide : il faut résoudre une équation du second degré)
   et donner les coordonnées des points de la parabole correspondants
   retrouve t-on le résultat trouvé avec géogébra ?
   (d) pour quelle valeur de x les propulseurs de la sonde doivent-ils êtres coupés pour que la sonde atteigne la station orbitale ? *(à 0,001 près)*
   (e) calculer alors la distance entre le point A et P
   retrouve t-on le résultat trouvé avec géogébra ?

7.3 corrigé TP : sonde spatiale

tp geogebra : sonde spatiale

1. avec le logiciel géogébra
   (a) (b)(c)(d)(e)(f) sur document geogebra
   (g) couper les propulseurs en $x = 0,25$ semble t-il permettre à la sonde de rejoindre la station ?
   $\boxed{\text{oui car la tangente en } x = 0,25 \text{ semble passer par } P}$
   (h) les valeurs de a pour lesquelles la tangente passe par le point P sont $\boxed{a \simeq 0,25}$ et $\boxed{a \simeq 3,1}$ (i) pour que la sonde atteigne la station il faut $\boxed{a \simeq 0,25}$ on a alors $\boxed{AP \simeq 3,1}$
2. algébriquement
   (a) en $x = 0,25$, équation de la tangente :
   $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
   $f'(x) = -2x + 2$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \text{ avec } \begin{cases} x_0 = 0,25 \\ f(x_0) = f(0,25) = -0,25^2 + 2 \times 0,25 + 1 = 1,4375 \\ f'(x_0) = f'(0,25) = -2 \times 0,25 + 2 = 1,5 \end{cases}$$

   soit : $y = f'(0,25)(x - 0,25) + f(0,25) = 1,5(x - 0,25) + 1,4375$

   soit $\boxed{y = 1,5x + 1,0625}$ *(après simplification)*

   cette droite ne passe pas exactement par le point $P(2; 4)$

   car pour $x = 2$ on a $y = 1,5 \times 2 + 1,0625 = 4,0625 \neq 4$

   donc $\boxed{\text{la sonde ne passera pas exactement la station}}$

   on ne retrouve pas le résultat trouvé avec géogébra car un résultat graphique est $\boxed{\text{approché}}$

   (b) équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse a :
   $f'(x) = -2x + 2$ donc $f'(a) = -2a + 2$

   $y = f'(a)(x - a) + f(a) = (-2a + 2)(x - a) + (-a^2 + 2a + 1)$

   $y = -2ax + 2a^2 + 2x - 2a - a^2 + 2a + 1 = x(2 - 2a) + a^2 + 1$

   $\boxed{y = 2(1 - a)x + a^2 + 1}$

   (c) valeurs de a *(à 0,001 près)* pour que la tangente précédente passe par le point $P(2; 4)$

   il faut que $4 = 2(1 - a) \times 2 + a^2 + 1$

   $a^2 - 4a + 1 = 0$ donne $\Delta = 12$ donc deux solutions $\boxed{x_1 \simeq 0,268}$ et $\boxed{x_2 \simeq 3,732}$

   les coordonnées des points de la parabole sont $\boxed{A_1(0,268; 1,464)}$ et $\boxed{A_2(3,732; -5,463)}$
   car $f(0,268) \simeq 4,464$ et $f(3,732) \simeq -5,463$
   on retrouve approximativement le résultat trouvé avec géogébra

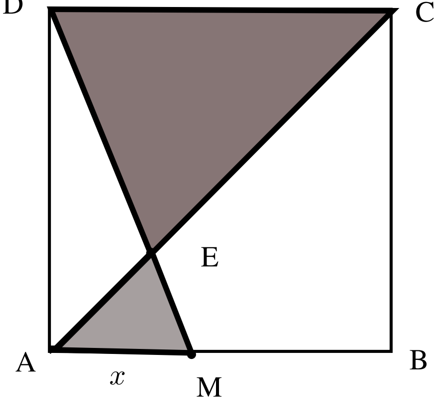
   (d) pour quelle valeur de x les propulseurs de la sonde doivent-ils êtres coupés pour que la sonde atteigne la station orbitale ? $\boxed{x_1 \simeq 0,268}$ car la sonde va poursuivre sa trajectoire dans le sens du déplacement donc 3,732 ne convient pas

   (e) distance entre les points A et P

   $AP = \sqrt{(0,268 - 2)^2 + (1,464 - 4)^2} \simeq \boxed{3,1}$ on retrouve approximativement le résultat trouvé avec géogébra

7.4 TP : optimisation d'aire : (somme des triangles)

tp geogebra

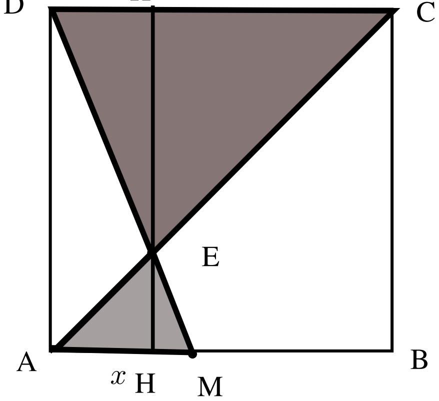


$ABCD$ est un carré de coté 10
$M \in [AB]$ avec $AM = x$
$[AC] \cap [DM] = \{E\}$
$A(x) = aire(AME) + aire(DEC)$
On cherche la position du point M
pour que $A(x)$ soit minimale

1. à l'aide de geogebra
   (a) construire un carré de coté 10 *(prendre A à l'origine du repère)*
   (b) placer M sur $[AB]$
   (c) construire les segments $[AC]$ et $[DM]$ puis E
   (d) construire les polygônes AME et DEC
   leurs aires s'affiche dans la fenêtre d'algèbre *(poly1 et poly2)*
   (e) définir dans la zone de saisie : aire = poly1 + poly2
   (f) définir le point $P = (x(M), aire/10)$ dans la zone de saisie
   puis activer la trace du point P
   (g) déplacer le point M et conjecturer la valeur de x qui minimise $A(x)$ et donner une estimation du minimum
2. Algébriquement

   la perpendiculaire à (AB) passant E coupe $[AB]$ en H et $[CD]$ en H'
   on note $h = EH$
   (a) Démontrer que $\dfrac{x}{10} = \dfrac{EA}{EC}$
   (b) démontrer que $\dfrac{h}{10-h} = \dfrac{x}{10}$
   (c) en déduire que $h = \dfrac{10x}{10+x}$
   (d) en déduire que $A(x) = \dfrac{5x^2+500}{x+10}$
   (e) étudier les variations de A et retrouver la valeur exacte de x cherchée ainsi que l'aire minimale
3. le cercle de centre C de rayon 10 coupe $[AC]$ en F
   le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en R
   démontrer que R répond au problème posé

7.5 corrigé TP : optimisation d'aire : (somme des triangles)



tp geogebra

1. à l'aide de geogebra
2. Algébriquement
   (a) Démontrer que $\dfrac{x}{10} = \dfrac{EA}{EC}$
   Dans les triangles AEM et DEC, (DC) est parallèle à (AM)
   le théorème de Thalès donne : $\dfrac{AM}{DC} = \dfrac{EA}{EC}$ donc $\boxed{\dfrac{x}{10} = \dfrac{EA}{EC}}$ *(C.Q.F.D.)*

   (b) démontrer que $\dfrac{h}{10-h} = \dfrac{x}{10}$
   Dans les triangles AEH et $H'EC$, (DH') est parallèle à (AH)
   le théorème de Thalès donne : $\dfrac{EH}{EH'} = \dfrac{EA}{EC}$ donc $\boxed{\dfrac{h}{10-h} = \dfrac{x}{10}}$ *(C.Q.F.D.)*

   (c) en déduire que $h = \dfrac{10x}{10+x}$
   $\dfrac{h}{10-h} = \dfrac{x}{10} \Longrightarrow 10h = x(10-h) \Longrightarrow 10h = 10x - xh \Longrightarrow 10h + xh = 10x \Longrightarrow h(10+x) = 10x \Longrightarrow$
   $\boxed{h = \dfrac{10x}{10+x}}$ *(C.Q.F.D.)*

   (d) en déduire que $A(x) = \dfrac{5x^2+500}{x+10}$
   aire totale $= A(x) =$ aire(AME) $+$ aire(DEC) $= \dfrac{x \times h}{2} + \dfrac{10 \times (10-h)}{2}$

   $$A(x) = \dfrac{x \times \dfrac{10x}{10+x}}{2} + \dfrac{10 \times (10 - \dfrac{10x}{10+x})}{2} = \dfrac{5x^2}{10+x} + 5(10 - \dfrac{10x}{10+x}) = \dfrac{5x^2 + 50(10+x) - 50x}{10+x}$$

   $$A(x) = \dfrac{5x^2 + 500 + 50x - 50x)}{10+x} = \boxed{\dfrac{5x^2+500}{x+10}}$$ *(C.Q.F.D.)*

   (e) étudier les variations de A et retrouver la valeur exacte de x cherchée ainsi que l'aire minimale

   $$A'(x) = \dfrac{10x(x+10) - (5x^2+500) \times 1}{(x+10)^2} = \dfrac{10x^2 + 100x - 5x^2 - 500}{(x+10)^2} = \boxed{\dfrac{5x^2+100x-500}{(x+10)^2}}$$

   $A'(x)$ est du signe du numérateur $5x^2 + 100x - 500$ car $(x+10)^2$ est positif
   $A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^2 + 100x - 500 = 0$
   $\Delta = 20000 > 0$ donc deux annulations
   $x_1 = -10 - 10\sqrt{2}$ et $x_2 = -10 + 10\sqrt{2}$
   on a donc le tableau de variations

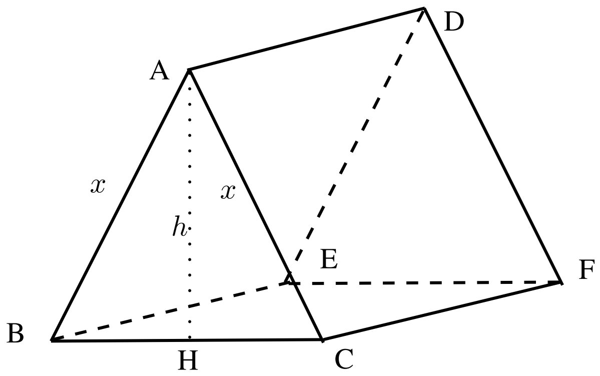
x	0		$x_2 \simeq 4,14$		10
signe de $A'(x)$		-	0	+	
variations de $A(x)$	50	$\searrow$	$\simeq 41,42$	$\nearrow$	50

   l'aire minimale vaut environs $\boxed{41,42}$ pour $\boxed{x \simeq 4,14}$

3. le cercle de centre C de rayon 10 coupe $[AC]$ en F
   le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en R
   démontrer que R répond au problème posé *(bonus)*

7.6 TP : optimisation de volume : (tente)

TP : optimisation de volume



On désire construire une tente représentée ci dessus
Le triangle ABC sera nécessairement isocèle en A
$AD = 2$ mètres
Le périmètre de ABC est égal à 10 mètres *(il n'y a que 10 mètres de tissu étanche qui sert pour le toit et le dessous de la tente)*
La base $BCFE$ est un rectangle *(ainsi que les 2 pans de toit)*
On souhaite déterminer les longueurs AB et BC pour que le volume de la tente soit maximal ainsi que ce volume maximal
On pose $AB = AC = x$

1. avec géogébra
   (a) construire le point A à l'origine du repère
   (b) construire un curseur a *(de 0 à 5)*
   (c) construire le point $B = (a, 0)$
   (d) construire le cercle de centre A et de rayon a
   (e) exprimer BC en fonction de x : ...
   (f) construire le cercle de centre B et de rayon $10 - 2a$
   (g) régler $a = 3,5$ et construire l'intersection des deux cercles précédents
   (h) construire le polygone ABC
   (i) afficher les longueurs respectives de AB, AC et BC ainsi que l'aire de ABC
   (j) entrer dans la barre de saisie : perimetre = AB + BC +AC
   (k) changer les valeurs au curseur pour trouver les réponses aux questions suivantes :
      i. pour quelles valeurs de a le triangle ABC existe t-il ? : ...
      ii. combien vaut le périmètre de ABC ? : ...
      iii. pour quelles valeurs de AB et BC l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? :

      $AB \simeq$ ... et $BC \simeq$ ...
      (on pourra construire le point $M = (a, poly1)$ et activer sa trace)
2. algébriquement
   (a) montrer que la hauteur AH issue de A a pour longueur $h = \sqrt{10x - 25}$
   (b) en déduire que aire$(ABC) = A(x) = (5 - x)\sqrt{10x - 25}$
   (c) en déduire que le volume de la tente est $V(x) = 2(5 - x)\sqrt{10x - 25}$
   (d) étudier les variations de la fonction V
   (e) répondre alors aux questions du problème
   (f) est-ce cohérent avec les résultats trouvés dans la partie "géogébra" ?
   (g) entrer la formule $A(x) = (5 - x)\sqrt{10x - 25}$ dans "géogébra", que remarque t-on ?

7.7 TP : Optimisation de Bénéfice

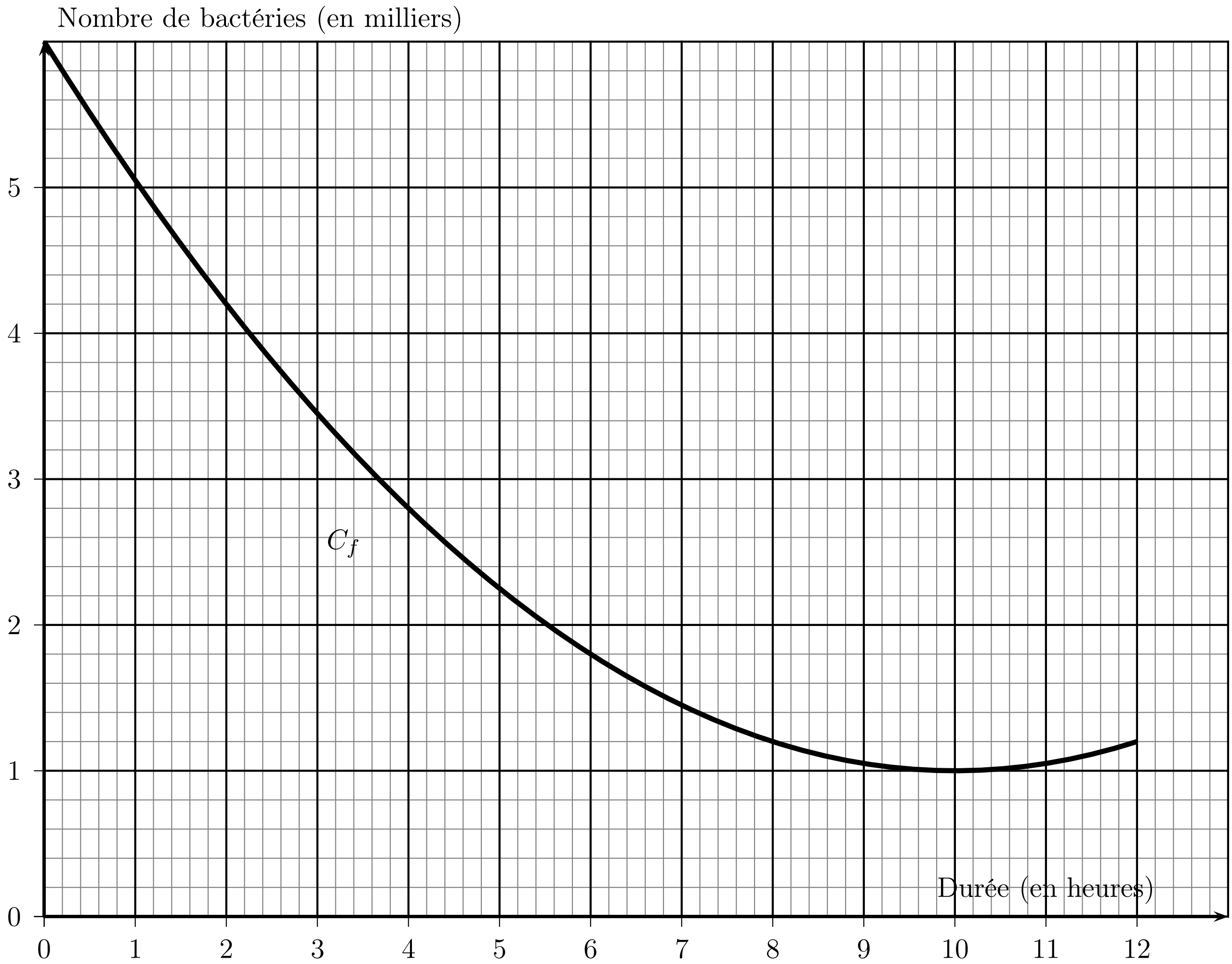
Pour une entreprise qui produit et vend un produit chimique,
on dispose des données suivantes :
Coût unitaire d'achat du produit brut : 2 €/litre
Coût unitaire de traitement : 3 €/litre
Pour un prix unitaire de vente de 3 €/litre, par conditionnemment de 50 litres,
il y a alors 100 ventes par jour *(en moyenne)*
Chaque fois que le prix du litre est augmenté de 0,1 €, le conditionnement augmente de 10 litres et le nombre de ventes diminue de 1
On cherche alors le prix de vente qui permet d'obtenir le bénéfice maximal
On note x le nombre de fois que l'on augmente le prix de vente

1. Etude numérique :
   (a) Utiliser un tableur pour organiser les données précédentes afin d'obtenir la valeur du bénéfice en fonction du nombre d'augmentations de $0,1$ €
   (b) Obtenir le nuage de points correspondant au bénéfice en fonction du nombre d'augmentations de $0,1$ €
   (c) Déterminer l'intervalle des prix au litre qui donnent un bénéfice positif ou nul (intervalle de rentabilité)
   (d) Déterminer le prix du litre qui maximise le bénéfice
2. Etude Algébrique
   (a) montrer que le bénéfice est donné en euros par $B(x) = (50 + 10x)(100 - x)(0,1x - 2)$
   (b) déterminer le signe de $B(x)$ en fonction de x et en déduire les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif *(intervalle de rentabilité)*
   (c) montrer que $B(x) = -x^3 + 115x^2 - 1400x - 10000$
   (d) calculer $B'(x)$
   (e) montrer que $B'(x) = (70 - x)(3x - 20)$
   (f) étudier l'annulation et le signe de $B'(x)$
   (g) en déduire les variations de B sur [0 ;100]
   (h) en déduire les extremums de B sur [0 ;100]
   (i) quel est alors le prix idéal de vente et quel est le bénéfice associé ?

8.1 bac 1

On dispose d'un bécher A qui contient 6000 bactéries. On souhaite voir l'efficacité de l'antibiotiques A sur ces bactéries. On introduit l'antibiotique A dans le bécher A. On mesure alors, à intervalles réguliers, la quantité (en milliers) de bactéries restantes dans le bécher A au fur et à mesure de l'action de l'antibiotique.
Ceci pendant 12 heures.

Les valeurs mesurées dans le bécher A lors de l'expérience conduisent à modéliser l'évolution du nombre (en milliers) de bactéries dans ce bécher par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ par : $f(t) = 0,05t^2 - t + 6$ où t représente la durée (en heures) écoulée depuis le début de l'expérience.



1. (a) Calculer $f(0)$. Ce résultat est-il cohérent avec le nombre de bactéries présentes dans le bécher A au début de l'expérience ?
   (b) Calculer, selon ce modèle, le nombre de bactéries qui seront présentes dans le bécher A au bout de six heures et montrer que l'on retrouve le même résultat sur le graphique
   (c) quel est le nombre minimal de bactéries pendant l'expérience ?
   (d) après combien de temps l'antibiotique semble t-il plus ne faire aucun effet ? (justifier)
2. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Déterminer, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,12]$, une expression de $f'(t)$.
   (b) Déterminer le signe de $f'(t)$ pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,12]$.
   (c) Dresser le tableau des variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.
3. les résultats des questions 1.c et 1.d sont-ils cohérents avec ceux de la question 2.c ? (justifier)
4. trouver l'équation de la droite tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = 10$ et tracer cette tangente

8.2 corrigé bac 1

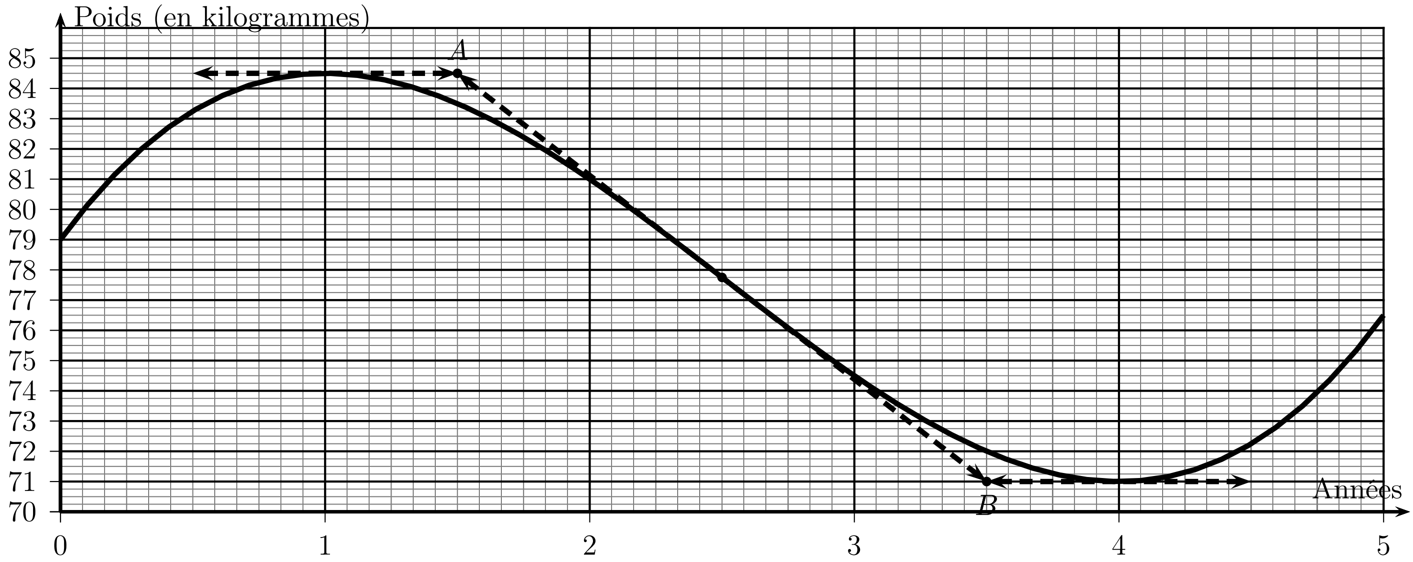
8.3 bac 2

Exercice : POIDS D'UN SPORTIF

On a tracé sur la feuille **annexe** la courbe C_f d'une fonction f représentant le poids, en kilogrammes, d'un sportif en fonction du temps, exprimé en années, sur une période d'étude de 5 années, commencée le premier Janvier 2000.
on a aussi tracé les tangentes à la courbe en $x = 1$, $x = 2.5$ et $x = 4$ avec $A(1,5; 84,5)$ et $B(3,5; 71)$

Partie A : Étude graphique

Les résultats aux questions posées dans cette partie seront donnés en s'aidant du graphique avec la précision que permet la lecture graphique et en faisant apparaître les traits de construction utiles.



1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f(5)$ ainsi qu'une interprétation de ces valeurs
2. Résoudre l'équation $f(x) = 80$ et interpréter le résultat avec précision *(au mois près)*
3. Pendant combien de mois le poids du sportif est-il au-dessus de 80 kilogrammes sur la période étudiée ?
4. Quel est le poids minimum et le poids maximum du sportif sur la période étudiée ?
5. Entre quelles dates *(au mois près)* le sportif a t-il perdu du poids ?
6. Donner les valeurs de $f'(1)$, $f'(2,5)$ et $f'(4)$ en justifiant

Partie B : Étude d'une fonction

On admet que la courbe C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 12x + 79$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Montrer que $f'(x) = -3(-x+1)(x-4)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,5]$.
3. Reproduire et compléter le tableau de signes suivant :

valeur de x	0 5
signe de -3	
signe de $(-x+1)$	
signe de $(x-4)$	
signe de $f'(x)$	

calculs des annulations

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$
   (détailler tous les calculs)

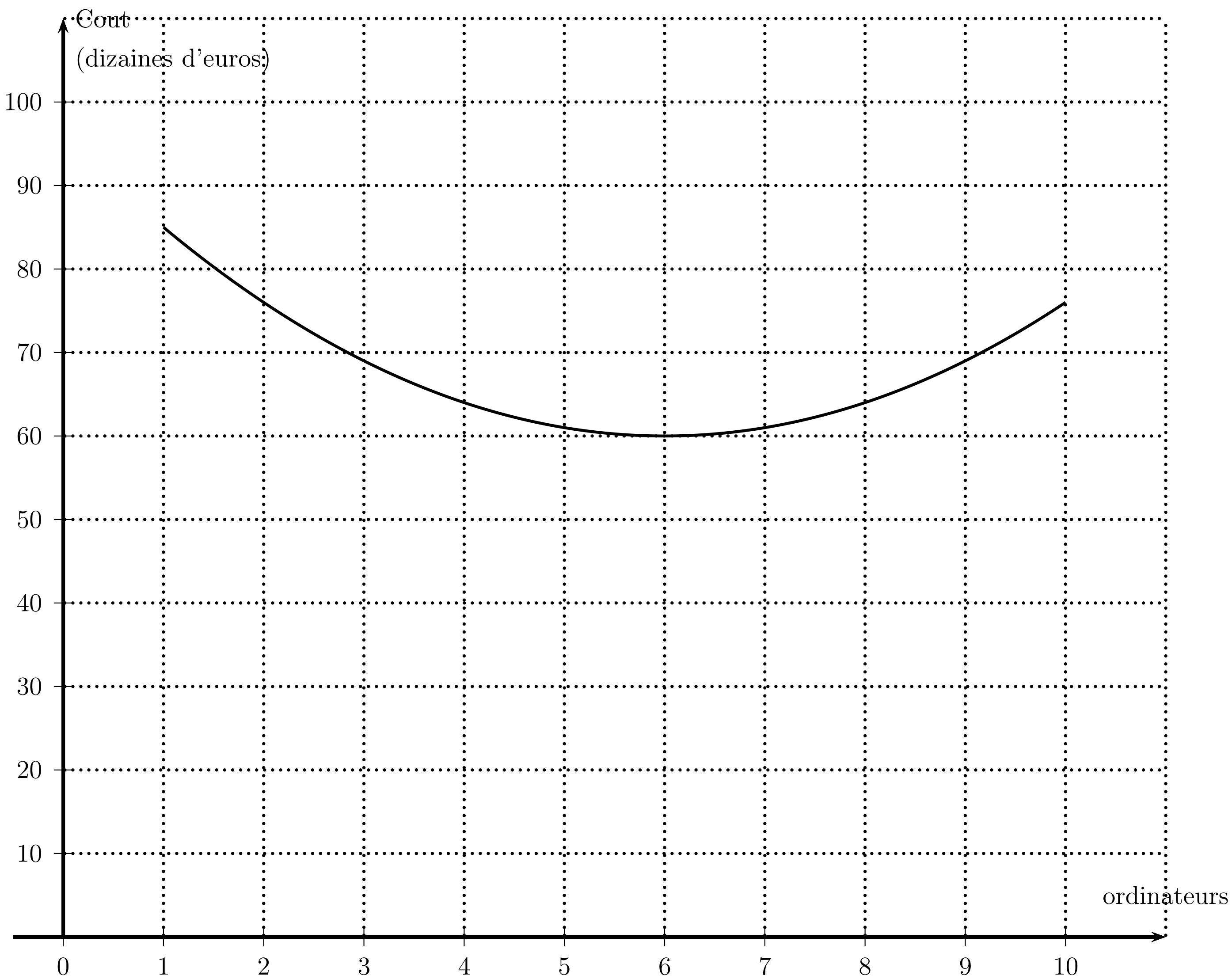
Partie C : Interprétations des résultats et comparaison des résultats graphiques et algébriques

1. les résultats numériques trouvés en A.1 et B.4 sont-ils cohérents ? (pourquoi)
2. les résultats numériques trouvés en A.4 et B.4 sont-ils cohérents ? (pourquoi)
3. retrouver algébriquement les résultats trouvés graphiquement en A.6 (détailler les calculs)
4. déterminer avec précisions l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 2,5$ et vérifier avec les points A et B

8.4 corrigé bac 2

8.5 bac 3

1. Soit f la fonction définie sur l' intervalle $[1\,;\,10]$: $f(x) = x^2 - 12x + 96$
   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.
   (d) Préciser les extremums
2. Le magasin d'informatique se fournit en ordinateurs auprès d'une entreprise locale qui peut fabriquer au maximum 10 ordinateurs par semaine.
   On note x le nombre d'ordinateurs produits en une semaine.
   On admet que, pour tout x entier appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$, le coût total de fabrication, exprimé en dizaines d'euros, est égal à $f(x)$.
   (a) Déterminer le nombre d'ordinateurs fabriqués par semaine qui permet un coût total de fabrication minimal.
   (b) Donner la valeur de ce coût minimal.
3. à l'aide du graphique ci dessous *(construire les tracés qu'il faut)*
   (a) retrouver le coût minimal ainsi que la production associée
   (b) quelles productions donnent un coût de moins de 700 euros ?
   (c) déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 6$ et construire cette tangente



8.6 corrigé bac 3

8.7 bac 4

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un vaccin. Sa capacité de production, sur une semaine, lui permet de réaliser entre 0 et 18 litres de ce produit. On note $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par le laboratoire pour une production d'un volume x de vaccin exprimé en litres. On appelle B la fonction définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,18]$ qui à x associe $B(x)$. La courbe représentative de la fonction B est donnée en annexe.

Partie A : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que B est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,18]$ par :

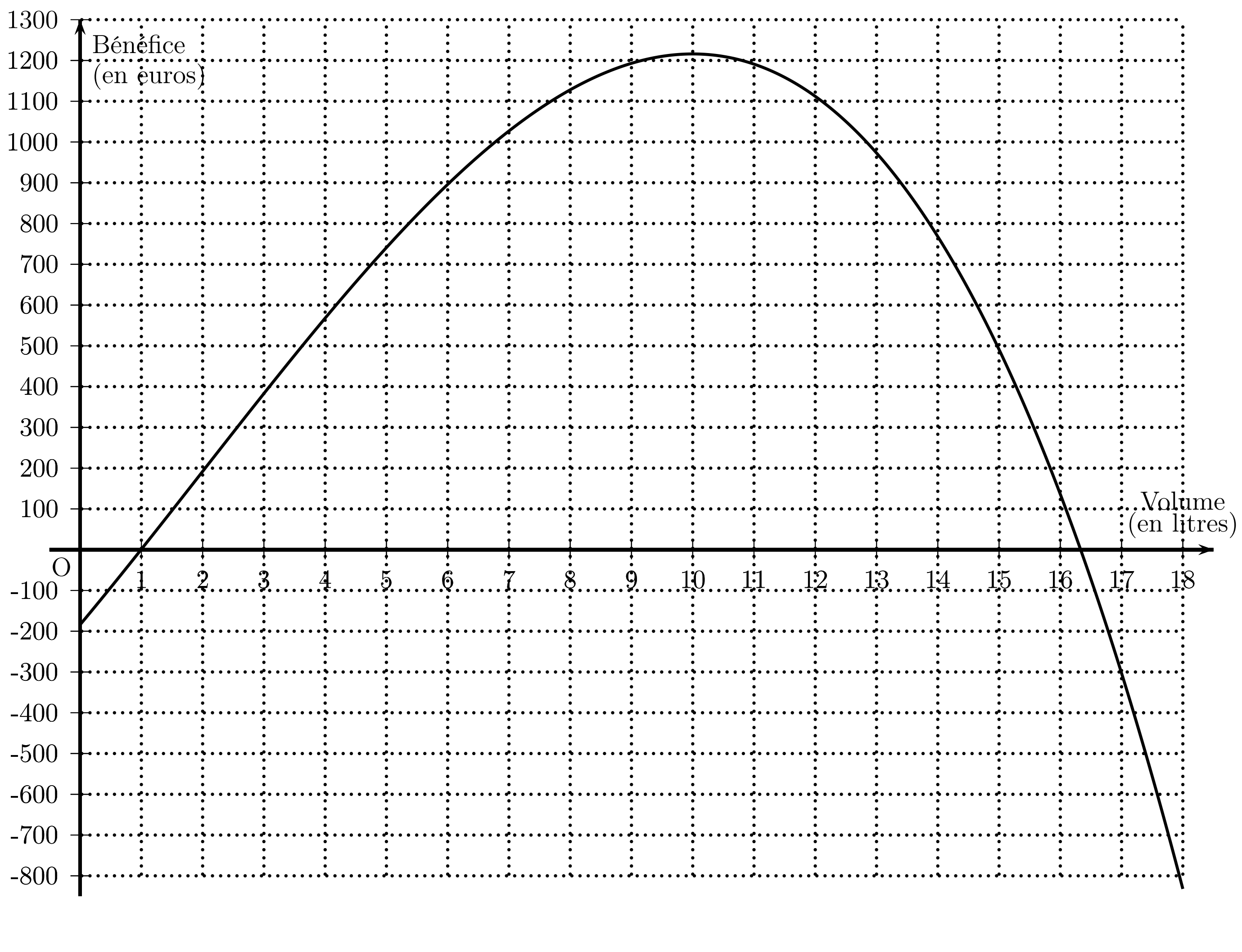
$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 180x - 184.$$

On notera B' la fonction dérivée de la fonction B.

1. (a) Déterminer pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$, l'expression de $B'(x)$.
   (b) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$,
   $B'(x) = 3(-2x + 20)(0,5x + 3)$.
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$.
   (d) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,18]$.
2. Déterminer le volume hebdomadaire à produire pour obtenir un bénéfice maximal.
   Quel est le montant, en euros, du bénéfice hebdomadaire maximal ?

Partie B : Lecture graphique

1. Déterminer à l'aide du graphique le(s) volume(s) hebdomadaire(s) nécessaire(s) pour que le bénéfice hebdomadaire soit égal à 400 euros. On donnera la réponse sur la copie.
2. Déterminer à l'aide du graphique pour quels volumes hebdomadaires produits, le laboratoire est bénéficiaire. On donnera la réponse sur la copie.
3. déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 10$ et construire cette tangente



8.8 corrigé bac 4

8.9 bac 5

Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une dose d'une substance médicamenteuse au temps $t = 0$ (t est exprimé en heures).
Le produit actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé.
Le médicament est efficace lorsque la concentration du produit actif dans le sang est supérieur ou égale à 25 mg.L^{-1} (25 milligrammes par litre).
La concentration maximale du produit actif dans le sang ne peut pas dépasser 40 mg.L^{-1} pour éviter les effets secondaires.

Partie A : Étude Algébrique

On admet que la concentration, exprimée en mg.L^{-1}, du produit actif dans le sang du malade est donnée en fonction du temps t, exprimé en heures, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

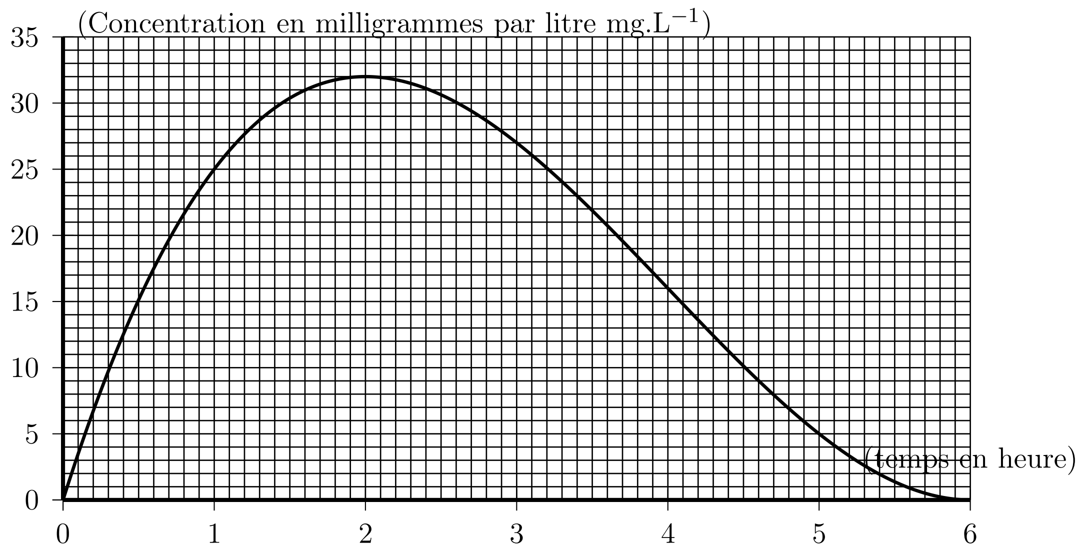
1. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$. Calculer $f'(t)$
   (b) Démontrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 6]$, on a : $f'(t) = (t-6)(3t-6)$
   (c) Résoudre l'équation $f'(t) = 0$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$
2. (a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$
   (b) Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
   En déduire la concentration maximale du produit actif dans le sang du malade et la durée correspondante

Partie B : Étude Numérique et Graphique

1. Reproduire et compléter le tableau de valeur en valeurs exactes

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$							

2. À l'aide de la courbe de la fonction f ci dessous, répondre, avec la précision que permet le graphique, aux questions suivantes en faisant apparaître les traits de constructions utiles



(a) Déterminer la concentration en mg.L^{-1} du produit actif pout $t = 5$.
(b) Le médecin a-t-il respecté la dose à ne pas dépasser ? Expliquer.
(c) Déterminer les temps en heures et minutes pour lesquelles la quantité de produit actif est de 15 mg.L^{-1}.
(d) Quelle est la durée pendant laquelle le médicament est resté efficace ?
(e) Au bout de quelle durée le médicament est-il complètement éliminé ?
(f) déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$ et tracer cette tangente

8.10 corrigé bac 5

8.11 bac 6

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un médicament pour injection.
Ce laboratoire peut produire entre 0 et 60 litres de ce médicament par mois.
Le bénéfice mensuel (en milliers d'euros) réalisé par le laboratoire en fonction du volume x (en litres) de médicament produit est donné par la courbe ci dessous ainsi que par la formule

$$B(x) = -2x^3 + 132x^2 - 960x - 1800 \text{ pour } x \in [0\ ;\ 60]$$

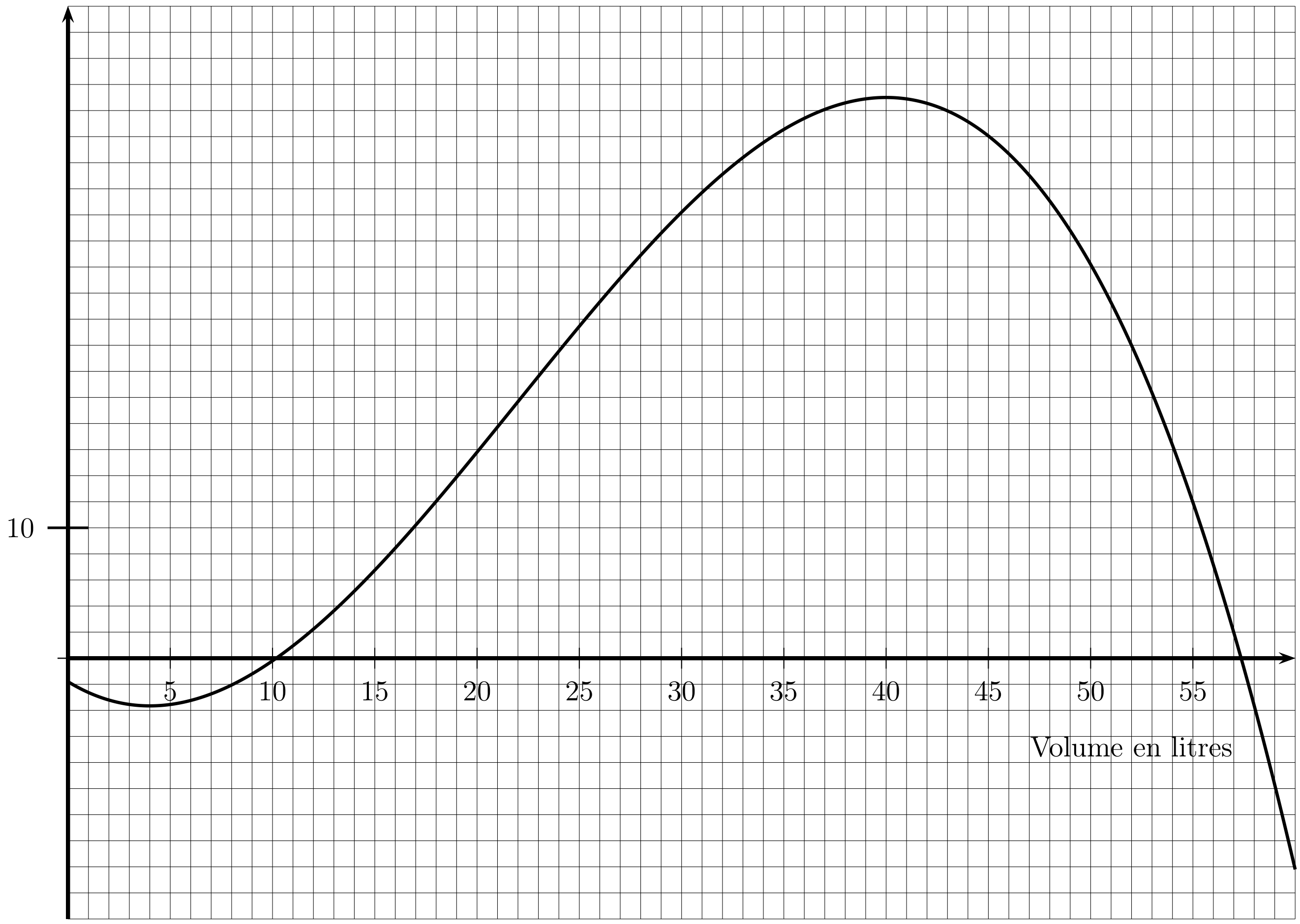
Partie A : Etude algébrique

1. (a) Calculer $B'(x)$ en détaillant les calculs, où B' désigne la fonction dérivée de B
   (b) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;60]$, on a : $B'(x) = (2x-8)(120-3x)$
   (c) Étudier les annulations et le signe de $B'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[0\,;60]$
   (d) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;60]$
   (e) En déduire les extremums de B ainsi que les valeurs de x associées
2. Déduire des résultats précedents le volume mensuel à produire pour obtenir un bénéfice maximal, ainsi que le montant du bénéfice mensuel maximal ?

Partie B : Etude Graphique

Tous les tracés utilisé seront mis en évidence dans le graphique ci dessous

Bénéfice mensuel en milliers euros



1. quel est le bénéfice maximal ainsi que la production associée ?
   est-ce cohérent avec le résultat du A.2 ? pourquoi ?
2. quel est le bénéfice pour une production de 10 litres ?
3. quelles productions donnent un bénéfice de 10 milliers d'euros ? (à 0,1 litre près)
4. pour quelles productions le laboratoire va t-il être bénéficiaire ? (à 0,1 litre près)
5. pour quels volumes mensuels produits, le bénéfice mensuel est supérieur ou égal à 20000 €.
6. déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x_0 = 40$,
   construire cette tangente sur le graphique

8.12 corrigé bac 6

8.13 bac 7

Dans une usine pharmaceutique, une unité de production fabrique un médicament qu'elle vend par lots. Sa capacité de production est limitée à 60 lots par mois. **Partie A :** Sur le graphique ci dessous, est représenté le bénéfice,

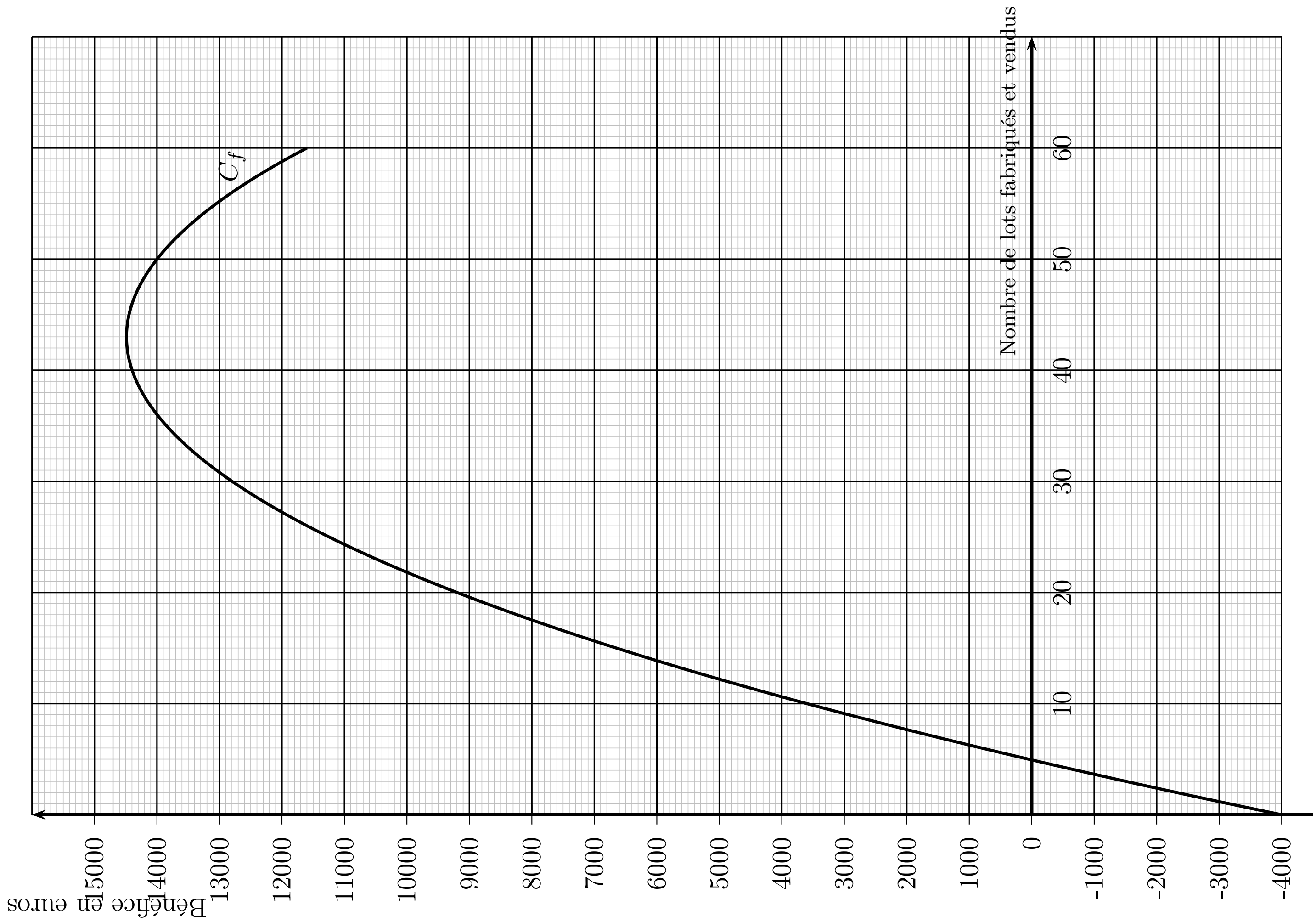
en euros, en fonction du nombre de lots fabriqués et vendus en un mois.

1. Avec la précision permise par le graphique et en faisant apparaître les traits utiles à la lecture :
   (a) Déterminer le bénéfice, en euros, correspondant à la fabrication et à la vente en un mois de 10 lots de ce médicament.
   (b) Déterminer le nombre de lots que l'usine pharmaceutique doit fabriquer et vendre en un mois pour obtenir un bénéfice de 6000 euros.
   (c) Pour quels nombres de lots fabriqués et vendus en un mois, l'usine pharmaceutique réalise-t-elle un bénéfice supérieur ou égal à 14000 euros ?
2. Pour quels nombres de lots fabriqués et vendus en un mois, la production est-elle rentable ?

Partie B :

On admet que le bénéfice en fonction du nombre de lots fabriqués et vendus en un mois est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,60]$ par $f(x) = -10x^2 + 860x - 4000$.

1. La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0\ ;\ 60]$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,60]$. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,60]$.
3. En déduire le bénéfice maximal ainsi que le nombre de lots fabriqués et vendus correspondant à ce bénéfice maximal.



8.14 corrigé bac 7

9 À Retenir Tout en Un

Définition 5 : *(nombre dérivé)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$ un nombre

Si la courbe de f admet une droite tangente (AB) non "verticale" au point d'abscisse x_0
Alors

$$\begin{cases} \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } x_0 \text{ noté } \boxed{f'(x_0)} \\ \\ \text{est } \boxed{\text{le coefficient directeur } \textit{(ou pente)} \text{ de la droite } (AB) \text{ tangente à la courbe de } f \text{ en } x_0} \end{cases}$$

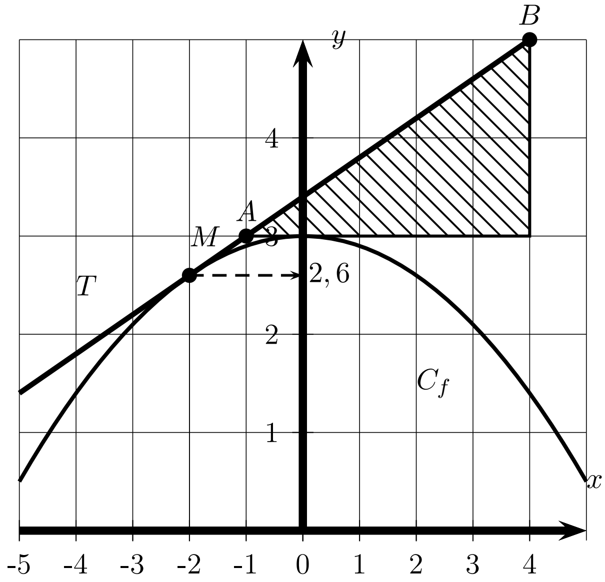
avec $\boxed{f'(x_0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \boxed{\dfrac{DV}{DH}} = \boxed{\dfrac{Dy}{Dx}}$

(DV = déplacement vertical   DH = déplacement horizontal)

Remarques et exemple : *(admis si non démontré)*

i. si C_f admet une droite non verticale tangente au point d'abscisse $x = x_0$ on dit que f est *"dérivable en x_0"*
ii. on peut, par abus de langage, dire que $f'(x_0)$ est le *"coefficient directeur de la courbe en x_0"*
iii. Le coefficient directeur est nul $\Longleftrightarrow$ la tangente est parallèle à l'axe (ox)
iv. ci contre : avec $A(-1;3)$ et $B(4;5)$

$$f'(-2) = \frac{DV}{DH} = \frac{5-3}{4-(-1)} = \frac{2}{5} = 0,4$$



Propriété 5 : *(équation de la tangente)*

Soit f une fonction de courbe C_f définie sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$ un nombre

Si la fonction f est dérivable en x_0
alors la courbe C_f de f admet une droite tangente T d'équation $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

(admis)

Exemple : pour la droite (AB) ci dessus, tangente à C_f en $x_0 = -2$

l'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $\begin{cases} x_0 = -2 \\ \\ f(x_0) = f(-2) = 2,6 \\ \\ f'(x_0) = f'(-2) = 0,4 \end{cases}$

soit : $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$

donc : $y = 0,4(x + 2) + 2,6$

donc : $y = 0,4x + 0,8 + 2,6$

conclusion $y = 0,4x + 3,4$

10 savoir faire : (dérivation et fonctions dérivées)

Préparation de l'évaluation du chapitre Fonctions et Dérivation			
	Savoir faire	exo du site	note site
1.	déterminer graphiquement la valeur de $f'(x_0)$ quand la tangente à la courbe de f en x_0 est représentée	ex1 *(chap5)*	
2.	déterminer l'équation de la tangente à une courbe en x_0 quand la tangente à la courbe en x_0 est représentée	ex3 *(chap5)*	
3.	déterminer les annulations et le signe de $f'(x)$ en fonction de x à partir de la courbe de f	ex7 / ex8 / ex9 *(chap5)*	
4.	démontrer la formule de dérivation pour $x^2 \quad x^3 \quad \frac{1}{x} \quad \sqrt{x}$		
5.	calculer $f'(x)$ quand f est une fonction usuelle *(tableau des dérivées usuelles)*	ex11 / ex12 *(chap5)*	
6.	calculer f' quand f est "composée" de fonctions usuelles ($u \times v \quad \frac{1}{u} \quad \frac{u}{v} \quad \sqrt{u} \quad u^n \quad \frac{1}{u^n}$)	ex1 *(chap7)*	
7.	étudier les variations d'un polynôme de degré 2 ou 3 grâce à la dérivation	ex14 à 21 *(chap5)*	
8.	étudier les variations d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$ grâce à la dérivation	ex2 / ex3 *(chap7)*	
9.	étudier les variations d'une fonction de la forme $u \times v$ grâce à la dérivation		
10.	étudier les variations d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$ grâce à la dérivation		
11.	résoudre un problème de variation ou d'optimisation grâce à l'étude des variations d'une fonction	ex22 à ex25 *(chap5)*	