fonction logarithme décimal

Table des matières

1 Mots clés - Notations - Formules

1.1 Vocabulaire

Il faut connaître la signification des mots ou expressions suivantes :

1. fonction logarithme de base 10
2. fonction logarithme décimal
3. exposant
4. puissance

1.2 Notations

Il faut connaître la signification des notations mathématiques suivantes :

1. $f(x) = log(x)$

1.3 Formules

Il faut connaître par coeur les résultats suivants :

1. Formule Explicite

   définition : *(fonction logarithme de base* 10 *ou fonction logarithme décimal)*

   quel que soit le nombre réel positif strict $x > 0$:
   il existe un seul et unique nombre y tel que $x = 10^y$, ce nombre est noté $y = log(x)$
   on dit que $\boxed{log(x)}$ est le $\boxed{\text{logarithme décimal de } x}$
   et que $\boxed{log}$ est la $\boxed{\text{fonction logarithme décimal}}$

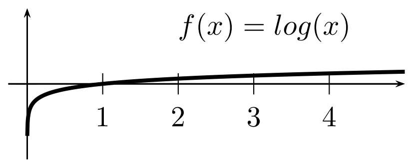
   exemples :

   $10 = 10^1$ donc $log(10) = 1$ $\quad$ $100 = 10^2$ donc $log(100) = 2$ $\quad$ $0,1 = 10^{-1}$ soit $log(0,1) = -1$

2. Courbe

   Définition : *(courbe logarithmique)*

   la courbe de $f(x) = log(x)$ est $\boxed{\text{une courbe logarithmique}}$



3. Signe

   propriété : *(positif, négatif, nul)*

   On a le tableau de signe suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0	1	$+\infty$
signe de $log(x)$	-	0	+

$$\begin{cases} \boxed{log(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1} \text{ \textit{(1 est valeur d'annulation)}} \\ \boxed{log(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]0\ ;\ 1[} \text{ \textit{(négatif entre 0 et 1)}} \\ \boxed{log(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1} \text{ \textit{(positif au dessus de 1)}} \end{cases}$$

4. Sens de variation

   On a le tableau de variations suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0	$+\infty$
variations de $log(x)$	$\nearrow$	

   la fonction est strictement croissante pour $x \in] - \infty; +\infty[$

5. Propriétés algébriques

   Propriétés

   quels que soient les réels $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$

   $\boxed{log(1) = 0}$ $\boxed{log(10) = 1}$ $\boxed{log(10^2) = 2}$ $\boxed{log(10^x) = x}$ $\boxed{log(xy) = log(x) + log(y)}$

   $\boxed{log(x^y) = ylog(x)}$ $\boxed{log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)}$ $\boxed{log(\frac{1}{x}) = -log(x)}$

6. Equation

   Propriétés

   quels que soient les réels $q > 0$ et $c > 0$ $\boxed{q^x = c \Longrightarrow x = \dfrac{log(c)}{log(q)}}$

   Exemple : $1,5^x = 10 \Longrightarrow x = \dfrac{log(10)}{log(1,5)} \simeq 5,7$

2 présentation et propriétés algébriques

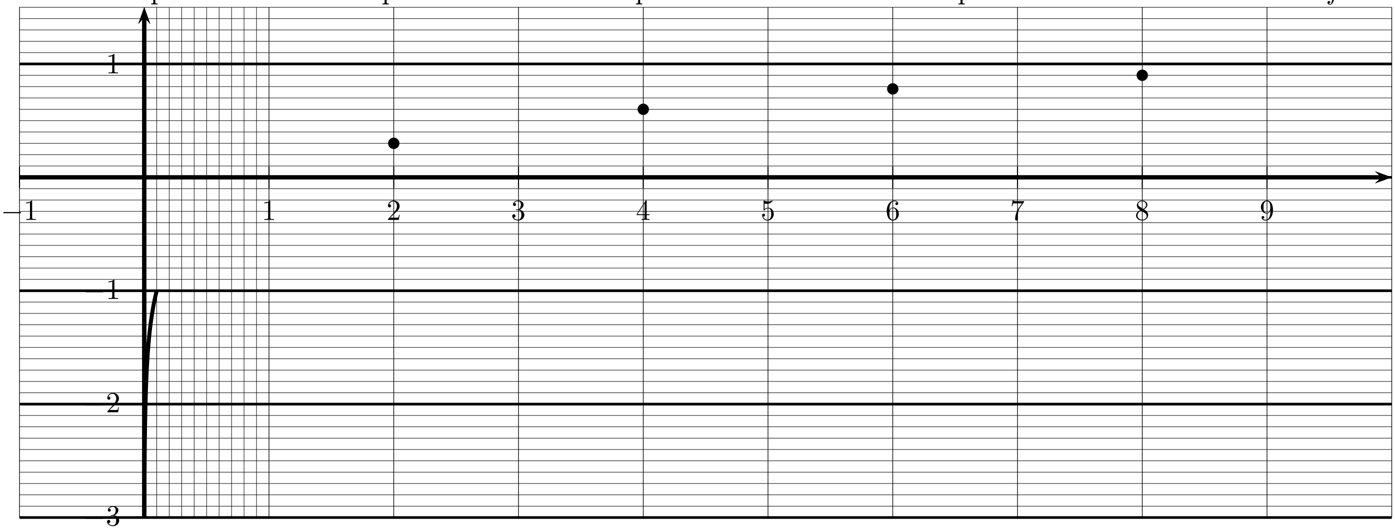
2.1 activités

2.1.1 activité 0 : Découverte de la Fonction Logarithme Décimal : $f(x) = log(x)$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant à 10^{-2} près

x	-2	-1	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = log(x)$							0,3		0,6		0,78		0,9		

2. Placer les points du tableau précédent dans le repère afin d'obtenir une représentation de la courbe de f



3. Déduire graphiquement le tableau de signes de $log(x)$

valeur de x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $log(x)$	

$$\begin{cases} log(x) = 0 \Longleftrightarrow x = ... & \textit{...est valeur d'annulation} \\ log(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in ... & \textit{négatif strict ...} \\ log(x) > 0 \Longleftrightarrow x... & \textit{positif strict ...} \end{cases}$$

$log(x)$ est négatif strict pour x compris entre ... et ... exclus et positif strict pour x supérieur strict à ...

4. Déduire graphiquement le tableau de variations de $log(x)$

valeur de x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de $log(x)$	$+\infty$ $\nearrow$ $-\infty$

La fonction log est strictement ... pour $x \in$ ...

5. Conjectures des propriétés algébriques :

(a) $log(10) = ...$ $\quad log(10^2) = ...$ $\quad log(10^3) = ...$ $\quad log(10^{-1}) = ...$ $\quad log(10^x) = ...$ pour toute valeur de ...

(b) $log(2^3) \simeq ...$ $\quad 3log(2) \simeq ...$ $\quad log(5^2) \simeq ...$ $\quad 2log(5) \simeq ...$ $\quad log(x^y) = ...$ pour toute valeur de ...

(c) $log(2 \times 10) \simeq ...$ $\quad log(2) + log(10) \simeq ...$ $\quad log(3 \times 100) \simeq ...$ $\quad log(3) + log(100) \simeq ...$

$log(xy) = ...$ pour toute valeur de ...

(d) $log(\frac{10}{2}) \simeq ...$ $\quad log(10) - log(2) \simeq ...$ $\quad log(\frac{100}{3}) \simeq ...$ $\quad log(100) - log(3) \simeq ...$

$log(\frac{x}{y}) = ...$ pour toute valeur de ...

(e) $log(\frac{1}{2}) \simeq ...$ $\quad -log(2) \simeq ...$ $\quad log(\frac{1}{3}) \simeq ...$ $\quad -log(3) \simeq ...$

$log(\frac{1}{x}) = ...$ pour toute valeur de ...

6. Résoudre les équations ou inéquations suivantes

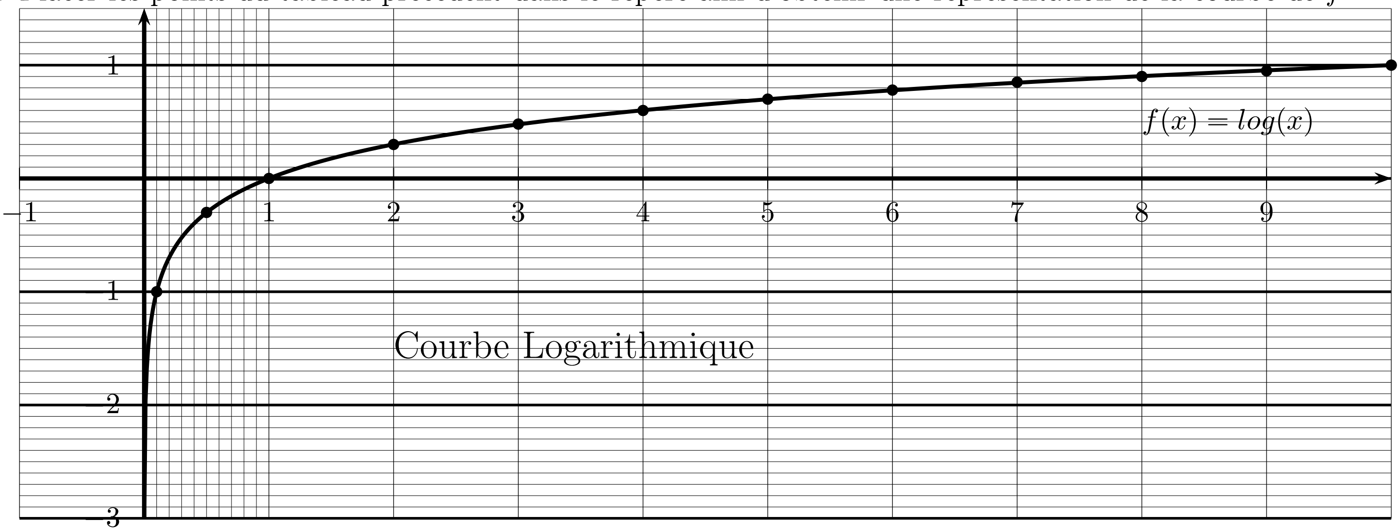
(a) $100 \times 1,25^x = 1500$ $\qquad$ (b) $1000 \times 0,75^x < 50$ $\qquad$ (c) $50 \times 1,1^x > 50$

2.1.2 corrigé activité 0 : Découverte de la Fonction Logarithme Décimal : $f(x) = log(x)$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant à 10^{-2} près

x	-2	-1	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = log(x)$	X	X	X	-1	-0,3	0	0,3	0,48	0,6	0,7	0,78	0,85	0,9	0,95	1

2. Placer les points du tableau précédent dans le repère afin d'obtenir une représentation de la courbe de f



3. Déduire graphiquement le tableau de signes de $log(x)$

valeur de x	0		1		$+\infty$
signe de $log(x)$	$\Vert$	-	0	$+$	

$$\begin{cases} log(x) = 0 \iff x = 1 & \textit{1 est valeur d'annulation} \\ log(x) < 0 \iff x \in]0;1] & \textit{négatif strict si } 0 < x < 1 \\ log(x) > 0 \iff x \in]1;+\infty[& \textit{positif strict si } x > 1 \end{cases}$$

$log(x)$ est négatif strict pour x compris entre 0 et 1 exclus et positif strict pour x supérieur strict à 1

4. Déduire graphiquement le tableau de variations de $log(x)$

valeur de x	0		$+\infty$
variations de $log(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction log est strictement croissante pour $x \in]0;+\infty[$

5. Conjectures des propriétés algébriques :

(a) $log(10) = 1$ $log(10^2) = 2$ $log(10^3) = 3$ $log(10^{-1}) = -1$ $log(10^x) = x$ pour toute valeur de ...

(b) $log(2^3) \simeq 0,9$ $3log(2) \simeq 0,9$ $log(5^2) \simeq 1,4$ $2log(5) \simeq 1,4$ $log(x^y) = y \times log(x)$ pour toute valeur de $x > 0$

(c) $log(2 \times 10) \simeq 1,3$ $log(2) + log(10) \simeq 1,3$ $log(3 \times 100) \simeq 2,5$ $log(3) + log(100) \simeq 2,5$

$log(xy) = log(x) + log(y)$ pour toute valeur de $x > 0$ et $y > 0$

(d) $log(\frac{10}{2}) \simeq 0,7$ $log(10) - log(2) \simeq 0,7$ $log(\frac{100}{3}) \simeq 1,5$ $log(100) - log(3) \simeq 1,5$

$log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)$ pour toute valeur de $x > 0$ et $y > 0$

(e) $log(\frac{1}{2}) \simeq -0,3$ $-log(2) \simeq -0,3$ $log(\frac{1}{3}) \simeq -0,5$ $-log(3) \simeq -0,5$

$log(\frac{1}{x}) = -log(x)$ pour toute valeur de x

6. Résoudre les équations ou inéquations suivantes

(a)

$100 \times 1,25^x = 1500$

$1,25^x = \frac{1500}{100}$

$1,25^x = 15$

$log(1,25^x) = log(15)$

$x \times log(1,25) = log(15)$

$x = \frac{log(15)}{log(1,25)}$

$x \simeq 12,13$

(b)

$1000 \times 0,75^x < 50$

$0,75^x < \frac{50}{1000}$

$0,75^x < 0,05$

$log(0,75^x) < log(0,05)$

$x \times log(0,75) < log(0,05)$

$x > \frac{log(0,05)}{log(0,75)}$

Changement de sens car $log(0,75) < 0$

$x > 10,4$

(c) $50 \times 1,1^x > 50$

$1,1^x > \frac{50}{50}$

$1,1^x > 1$

$log(1,1^x) > log(1)$

$x \times log(1,1) > log(1)$

$x > \frac{log(1)}{log(1,1)}$

Pas de Changement de sens car $log(1,1) > 0$

$x > 0$

2.1.3 activité 1 :

la fonction logarithme décimal notée log associe à tout nombre x de son domaine de définition *(à préciser)* un nombre noté $log(x)$ *(le logarithme décimal de x)* donné par la calculatrice ou une table de logarithmes.
cette fonction est telle que, quels que soient les nombres x et y de son domaine de définition on a :

$$\boxed{log(xy) = log(x) + log(y)}$$

cette fonction transforme donc un produit de deux nombres en une somme.

A. donner si possible et grâce à la calculatrice, les valeurs de $log(-2)$, $log(0)$, $log(1)$, $log(10)$, $log(\frac{1}{10})$, $log(1000000)$ puis, proposer à priori un domaine de définition pour la fonction log.

B. utiliser la formule encadrée ci desus pour réondre aux questions suivantes

1. prendre $x = 1$ et $y = 1$ et trouver logiquement la valeur de $log(1)$
2. prendre $x = y = a$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $log(a^2)$
3. prendre $x = a^2$ et $y = a$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $log(a^3)$
4. généraliser à $log(a^n)$ où n est un entier et $a > 0$
5. prendre $x = y = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $log(\sqrt{a})$
6. prendre $x = a$ et $y = \dfrac{1}{a}$ où $a > 0$ et en déduire une autre écriture de $log(\dfrac{1}{a})$
7. prendre $x = a$ et $y = \dfrac{1}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$, en déduire une autre écriture de $log(\dfrac{a}{b})$
8. a t-on $log(a + b)$ et $log(a) + log(b)$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $b > 0$?
   (prendre des valeurs simples de a et b pour voir)
9. a t-on $log(a - b)$ et $log(a) - log(b)$ égaux pour toutes valeurs de $a > 0$ et $a > b > 0$?
   (prendre des valeurs simples de a et b pour voir)
10. déterminer le nombre x tel que $log(x) = 1$

2.1.4 corrigé activité 1 :

A. à la calculatrice :
$log(-2)$ n'existe pas (pas de logarithme pour un nombre négatif strict)
$log(0)$ n'existe pas (pas de logarithme pour un nombre nul)
$log(1) = 0$ (annulation en 0)
$log(10) = 1$
$log(\frac{1}{10}) = 1$
$log(1000000) = 6$ *(croissance très lente)*
à priori, le domaine de définition pour la fonction log est $]0\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$.

B. quels que soient les nombres x>0 et y>0 la fonction logarithme est telle que : $log(xy) = log(x) + log(y)$

1. pour x = 1 et y = 1 on a :
   d'une part : $log(1 \times 1) = log(1) + log(1) = 2log(1)$
   d'autre part : $log(1 \times 1) = log(1)$
   donc $2log(1) = log(1)$
   donc $2log(1) - log(1) = 0$
   donc $log(1) = 0$

2. pour $x = y = a$ où a>0 on a :
   $log(a^2) = log(a \times a) = loga + loga = 2loga$

3. avec $x = a^2$ et $y = a$ où a>0, on a :
   $log(a^3) = log(a^2 \times a) = log(a^2) + log(a) = 2loga + loga = 3loga$

4. $log(a^n) = nloga$ où n est un entier et a>0

5. avec $x = y = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ où a>0 on a :
   $loga = log(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = log(\sqrt{a}) + log(\sqrt{a}) = 2log(\sqrt{a})$
   donc
   $log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}loga$

6. avec $x = a$ et $y = \dfrac{1}{a}$ où $a > 0$
   d'une part : $log(a \times \dfrac{1}{a}) = log(\dfrac{a}{a}) = log1 = 0$
   d'autre part : $log(a \times \dfrac{1}{a}) = loga + log(\dfrac{1}{a})$
   donc : $loga + log(\dfrac{1}{a}) = 0$
   donc $log(\dfrac{1}{a}) = -loga$

7. avec $x = a$ et $y = \dfrac{1}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$:
   d'une part : $log(a \times \dfrac{1}{b}) = log(\dfrac{a}{b})$
   d'autre part : $log(a \times \dfrac{1}{b}) = log(a) + log(\dfrac{1}{b}) = loga - logb$
   donc : $log(\dfrac{a}{b}) = loga - logb$

8. $log(a+b)$ et $loga + logb$ ne sont pas égaux pour toutes valeurs de a>0 et b>0
   car pour $a = 1$ et $b = 1$ on a :
   $log(a+b) = log2$ d'autre part $loga + logb = log1 + log1 = 0 + 0 = 0$ et $log2 \neq 0$

9. $log(a-b)$ et $loga - logb$ ne sont pas égaux pour toutes valeurs de a>0 et a>b>0
   car pour $a = 2$ et $b = 1$ on a :
   $log(a-b) = log1 = 0$ d'autre part $loga - logb = log2 - log1 = log2 - 0 = log2$ et $log2 \neq 0$

10. à la calculatrice, on a :
    $log10 = 1$

2.2 à retenir

1. Formule Explicite

Définition 1 : *(fonction logarithme de base 10 ou fonction logarithme décimal)*

Quel que soit le nombre réel positif strict $x > 0$:

Il existe un seul et unique nombre y tel que $x = 10^y$, ce nombre est noté $y = log(x)$

On dit que $\boxed{log(x)}$ est le $\boxed{\text{logarithme décimal de } x}$

et que $\boxed{log}$ est la $\boxed{\text{fonction logarithme décimal}}$

Exemples :

$10 = 10^1$ donc $log(10) = 1$

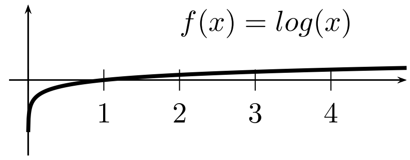
$100 = 10^2$ donc $log(100) = 2$

$0,1 = 10^{-1}$ soit $log(0,1) = -1$

2. Courbe

Définition 2 : *(courbe logarithmique)*

La courbe de $f(x) = log(x)$ est $\boxed{\text{une courbe logarithmique}}$



3. Signe

Propriété 1 : *(positif, négatif, nul)*

On a le tableau de signe suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0		1		$+\infty$
signe de $log(x)$		-	0	+	

$\boxed{log(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1}$ *(1 est valeur d'annulation)*

$\boxed{log(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]0\ ;\ 1[}$ *($log(x)$ est négatif pour x entre 0 et 1)*

$\boxed{log(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1}$ *($log(x)$ est positif pour x au dessus de 1)*

4. Sens de variation

Propriété 2 : *(croissant, décroissant, constant)*

On a le tableau de variations suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0		$+\infty$
variations de $log(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction log est strictement croissante pour $x \in]0; +\infty[$

5. Propriétés algébriques

Propriété 3 :

Quels que soient les réels $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$

$\boxed{log(1) = 0}$ $\boxed{log(10) = 1}$ $\boxed{log(10^2) = 2}$ $\boxed{log(10^x) = x}$ $\boxed{log(xy) = log(x) + log(y)}$

$\boxed{log(x^y) = ylog(x)}$ $\boxed{log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)}$ $\boxed{log(\frac{1}{x}) = -log(x)}$

6. Equation

Propriété 4 :

Quels que soient les réels $q > 0$ et $c > 0$ $\boxed{q^x = c \Longrightarrow x = \frac{log(c)}{log(q)}}$

Exemple : $1,5^x = 10 \Longrightarrow log(1,5^x) = log(10) \Longrightarrow x \times log(1,5) = log(10) \Longrightarrow x = \frac{log(10)}{log(1,5)} \simeq 5,7$

Remarque : on utilise la propriété du logarithme décimal , $\boxed{log(q^x) = x \times log(q)}$

(aussi bien pour les équations que pour les inéquations, mais pour une inéquation, on change le sens si $0 < q < 1$)

2.3 à retenir (à compléter)

1. Formule Explicite

Définition 3 : *(fonction logarithme de base 10 ou fonction logarithme décimal)*

Quel que soit le nombre réel positif strict $x > 0$:

Il existe un seul et unique nombre y tel que $x = 10^y$, ce nombre est noté $y = ...$

On dit que $\boxed{log(x)}$ est le $\boxed{\text{logarithme } ... \qquad \text{de } x}$

et que $\boxed{log}$ est la $\boxed{\text{fonction logarithme } ...}$

Exemples :

$10 = 10^1$ donc $log(10) = ...$

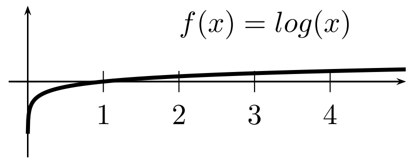
$100 = 10^2$ donc $log(100) = ...$

$0,1 = 10^{-1}$ soit $log(0,1) = ...$

2. Courbe

Définition 4 : *(courbe logarithmique)*

La courbe de $f(x) = log(x)$ est $\boxed{\text{une courbe } ...}$



3. Signe

Propriété 5 : *(positif, négatif, nul)*

On a le tableau de signe suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0	...	$+\infty$
signe de $log(x)$	...	...	...

$\boxed{log(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1}$ *(1 est valeur d'annulation)*

$\boxed{log(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]0 ; 1[}$ *($log(x)$ est négatif pour x entre 0*

$\boxed{log(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1}$ *($log(x)$ est positif pour x au dessus de*

4. Sens de variation

Propriété 6 : *(croissant, décroissant, constant)*

On a le tableau de variations suivant pour la fonction logarithme décimal :

valeur de x	0		$+\infty$
variations de $log(x)$	...	...	...

La fonction log est strictement ... pour $x \in]0; +\infty[$

5. Propriétés algébriques

Propriété 7 :

Quels que soient les réels $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$

$\boxed{log(1) = ...}$ $\boxed{log(10) = ...}$ $\boxed{log(10^2) = ...}$ $\boxed{log(10^x) = ... \quad x}$

$\boxed{log(xy) = ...}$

$\boxed{log(x^y) = ...}$ $\boxed{log(\frac{x}{y}) = ...}$ $\boxed{log(\frac{1}{x}) = ...}$

6. Equation

Propriété 8 :

Quels que soient les réels $q > 0$ et $c > 0$ $\boxed{q^x = c \Longrightarrow x = ...}$

Exemple : $1,5^x = 10 \Longrightarrow log(... \qquad) = log(... \qquad) \Longrightarrow x \times ... \qquad = ... \qquad \Longrightarrow x = ... \qquad \simeq 5,7$

Remarque : on utilise la propriété du logarithme décimal , $\boxed{log(q^x) = ...}$

(aussi bien pour les équations que pour les inéquations, mais pour une inéquation, on change le sens si $0 < q < 1$)

2.4 exercices

Exercice 1 :

simplifier au maximum

(a) A $= log(ab) + log(\frac{a}{b}) - log(a^2) + log10$

(b) B $= log(\frac{1}{a}) + log(a^4) - log(a^3) + log1$

(c) C $= log(a+b) + log(a-b) - log(a^2 - b^2)$

(d) D $= log(10^2) + 2log(\sqrt{10}) - log(\frac{1}{10}) + log(\frac{2}{10}) + log(\frac{10}{2}) - 4$

Remarque : $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

Exercice 2 :

écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de logarithmes de nombres entiers premiers
Remarque : $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

(a) A $= log(\frac{3 \times 5^2}{27})$

(b) B $= log(\frac{25\sqrt{5}}{9})$

(c) C $= log(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}})$

Exercice 3 :

écrire sous la forme d'un seul logarithme
Remarque : $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

(a) A$= 2log3 - log5$

(b) B $= 3log10 + log0,08 - 5log2$

(c) C $= \frac{1}{2}log4 - 3log2$

(d) D $= 2log5 - 3log2 + \frac{1}{2}log100$

Exercice 4 :

donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

(a) $A(x) = (2x-1)log(x+1)$

(b) $B(x) = 5x - log(4-x)$

(c) $f(x) = log(x^2 + 2x)$

(d) $f(x) = log(\frac{x+2}{x})$

Exercice 5 :

résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes à l'aide du lorarithme décimal

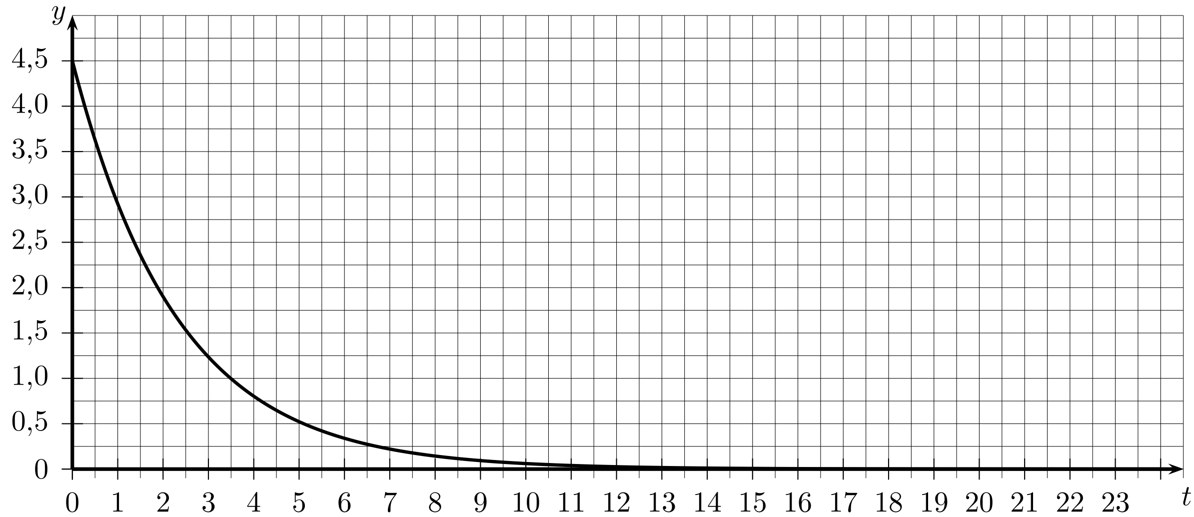
1. $50 \times 1,2^x = 5000$
2. $5000 \times 0,9^x < 10$
3. $12 \times 1,3^x > 500$

Exercice 6 :

Pour chacune des équations ou inéquations données ci dessous

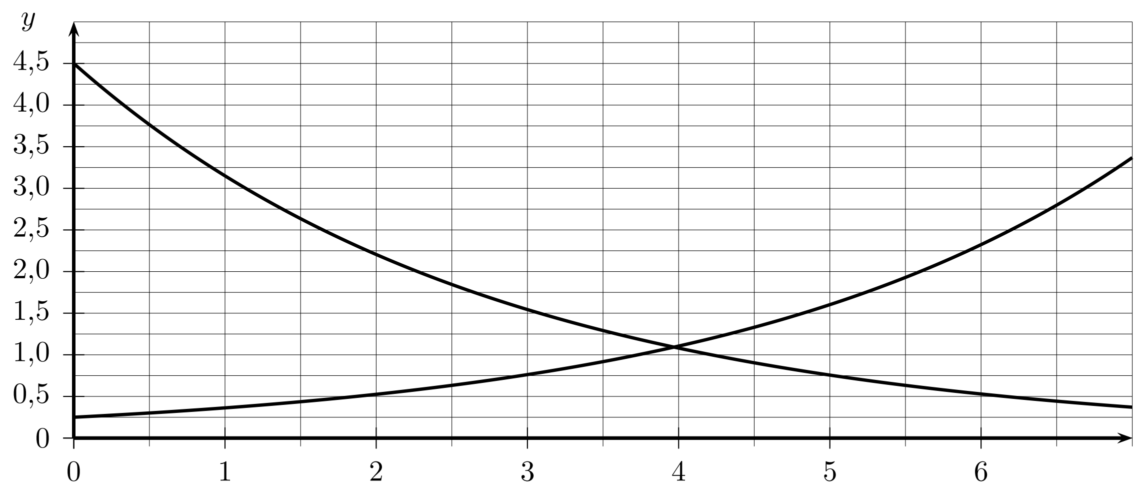
$$\left\{\begin{array}{l} a.\ \text{Inventer un énoncé qui correspond et poser une question en rapport avec l'équation ou l'inéquation} \\ b.\ \text{Résoudre l'inéquation ou l'équation } \textit{(Graphiquement et Algébriquement)} \\ c.\ \text{Répondre à la question posée} \end{array}\right.$$

1. $\boxed{4,5 \times 0,65^x < 2,5}$



2. $\boxed{0,5 \times 1,205^x > 3,25}$

3. $\boxed{0,25 \times 1,45^x = 4,5 \times 0,7^x}$



2.5 corrigés exercices

Corrigé exercice 1 :

$$\begin{aligned}
&\text{A} = log(ab) + log(\frac{a}{b}) - log(a^2) + log10\\
&\text{A} = loga + logb + loga - logb - 2loga + 1\\
&\text{A} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{B} = log(\frac{1}{a}) + log(a^4) - log(a^3) + log1\\
&\text{B} = -loga + 4loga - 3loga + 0\\
&\text{B} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{C} = log(a+b) + log(a-b) - log(a^2 - b^2)\\
&\text{C} = log[(a+b)(a-b)] - log(a^2 - b^2)\\
&\text{C} = log(a^2 - b^2) - log(a^2 - b^2)\\
&\text{C} = \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{D} = log(10^2) + 2log(\sqrt{10}) - log(\frac{1}{10}) + log(\frac{2}{10}) + log(\frac{10}{2}) - 4\\
&\text{D} = log(10^2) + log(10^{\frac{1}{2}}) - log(\frac{1}{10}) + log(\frac{2}{10}) + log(\frac{10}{2}) - 4\\
&\text{D} = 2log10 + 2 \times \tfrac{1}{2}log10 - (-log10) + log2 - log10 + log10 - log2 - 4\\
&\text{D} = 2 \times 1 + 1 + 1 - 4 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 2 :

écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de logarithmes de nombre entiers premiers

(a) $log(\frac{3 \times 5^2}{27}) = log(3 \times 5^2) - log27 = log3 + log(5^2) - log(3^3) = log3 + 2log5 - 3log3 = \boxed{-2log3 + 2log5}$

(b) $log(\frac{25\sqrt{5}}{9}) = log(25\sqrt{5}) - log9 = log25 + log(\sqrt{5}) - log(3^2) = log(5^2) + \frac{1}{2}log5 - 2log3$

$= 2log5 + 0,5log5 - 2log3 = \boxed{2,5log5 - 2log3}$

(c) $log(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}) = log(2\sqrt{3}) - log(3\sqrt{2}) = log2 + log(\sqrt{3}) - (log3 + log(\sqrt{2}))$

$= log2 + \frac{1}{2}log3 - log3 - \frac{1}{2}log2 = \boxed{0,5log2 - 0,5log3}$

Corrigé exercice 3 :

écrire sous la forme d'un seul logarithme

(a) $2log3 - log5 = log(3^2) - log5 = log9 - log5 = \boxed{log(\frac{9}{5})}$

(b) $3log10 + log0,08 - 5log2 = log(10^3) + log0,08 - log(2^5) = log1000 + log0,08 - log32$

$= log(1000 \times 0,08) - log32 = log80 - log32 = log(\frac{80}{32}) = log(\frac{40}{16}) = \boxed{log(\frac{5}{2})}$

(c) $\frac{1}{2}log4 - 3log2 = log(4^{\frac{1}{2}}) - log(2^3) = log(\sqrt{4}) - log8 = log2 - log8 = log(\frac{2}{8}) = \boxed{log(\frac{1}{4})}$

(d) $2log5 - 3log2 + \frac{1}{2}log100 = log(5^2) - log(2^3) + log(\sqrt{100}) = log25 - log8 + log10 = log(\frac{25}{8}) + log10$

$= log(\frac{25}{8} \times 10) = log(\frac{250}{8}) = \boxed{log(\frac{125}{4})}$

Corrigé exercice 4 :

donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

(a) $A(x) = (2x-1)log(x+1)$

$log(x+1)$ n'existe que si $x+1>0$

or : $x+1>0 \Longleftrightarrow x>-1$

donc : $\boxed{D_A =]-1\ ;\ +\infty[}$

(b) $B(x) = 5x - log(4-x)$

$log(4-x)$ n'existe que si $4-x>0$

or : $4-x>0 \Longleftrightarrow 4>x$

donc : $\boxed{D_B =]-\infty\ ;\ 4[}$

(c) $f(x) = log(x^2+2x)$

$log(x^2+2x)$ n'existe que si $x^2+2x>0$

il suffit d'étudier le signe de x^2+2x qui est un trinôme de la forme ax^2+bx+c avec $c=0$

• annulations : (Δ non nécessaire, on met x en facteur)

$x^2+2x=0 \Longleftrightarrow x(x+2)=0 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=-2$

• signe :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	-	0	$+$	

conclusion : $\boxed{D_f =]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[}$

(d) $f(x) = log(\dfrac{x+2}{x})$

$log(\dfrac{x+2}{x})$ n'existe que si $\dfrac{x+2}{x}>0$

il suffit d'étudier le signe de $\dfrac{x+2}{x}$ qui est une fraction rationnelle

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		-	|	-	0	$+$	
$x+2$		-	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x+2}{x}$		$+$	0	-	||	$+$	

annulations
$x=0$
$x+2=0 \Longleftrightarrow x=-2$

conclusion : $\boxed{D_f =]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[}$

Corrigé exercice 5 :

résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes à l'aide du lorarithme décimal

1. $50 \times 1,2^x = 5000$

   $1,2^x = \dfrac{5000}{50}$

   $1,2^x = 100$

   $log(1,2^x) = log(100)$

   $x \times log(1,2) = log(100)$

   $x = \dfrac{log(100)}{log(1,2)}$

   $x \simeq 25,25$

2. $5000 \times 0,9^x < 10$

   $0,9^x < \dfrac{10}{5000}$

   $0,9^x < 0,002$

   $log(0,9^x) < log(0,002)$

   $x \times log(0,9) < log(0,002)$

   $x > \dfrac{log(0,002}{log(0,9)}$

   Changement de sens car $log(0,9) < 0$

   $x > 58,98$

3. $12 \times 1,3^x > 500$

   $1,3^x > \dfrac{500}{12}$

   $log(1,3^x) > log(\dfrac{500}{12})$

   $x \times log(1,3) > log(\dfrac{500}{12})$

   $x > \dfrac{log(\frac{500}{12})}{log(1,3)}$

   Pas de Changement de sens car $log(1,3) > 0$

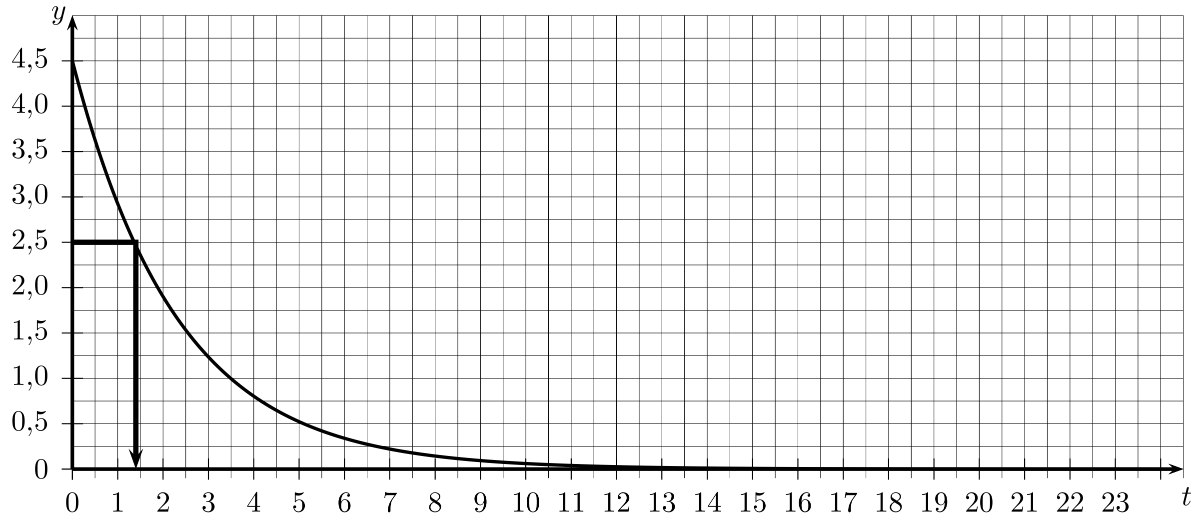
   $x > 14,2$

Corrigé exercice 6 :

Pour chacune des équations ou inéquations données ci dessous

$$\begin{cases} a. \text{ Inventer un énoncé qui correspond et poser une question en rapport avec l'équation ou l'inéquation} \\ b. \text{ Résoudre l'inéquation ou l'équation } \textit{(Graphiquement et Algébriquement)} \\ c. \text{ Répondre à la question posée} \end{cases}$$

1. $\boxed{4,5 \times 0,65^x < 2,5}$



(a) Au départ il fait $4,5$ degrés et la température diminue de 35% par heure
Après combien de temps la température est-elle strictement inférieure à 2,5 degrés ?

(b) Grahiquement on trouve : $x > 1,4$
Algébriquement :

$4,5 \times 0,65^x < 2,5$

$0,65^x < \dfrac{2,5}{4,5}$

$log(0,65^x) < log(\dfrac{2,5}{4,5})$

$x \times log(0,65) < log(\dfrac{2,5}{4,5})$

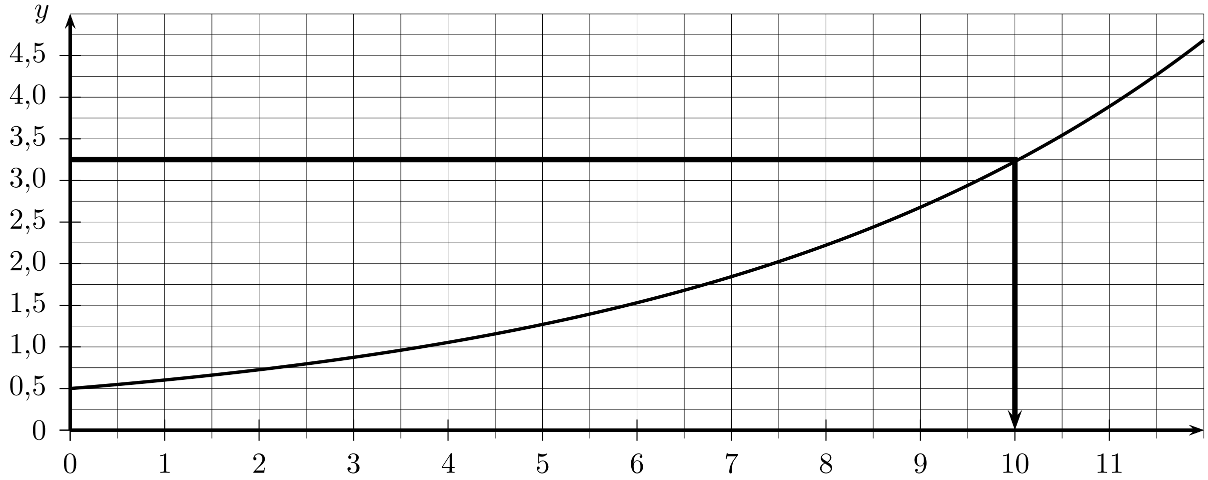
$x > \dfrac{log(\dfrac{2,5}{4,5})}{log(0,65)}$

Changement de sens car $log(0,65) < 0$

$x > 1,4$

(c) la température est strictement inférieure à 2,5 degrés après environs $1,4$ heures

2. $\boxed{0,5 \times 1,205^x > 3,25}$



(a) Au départ il fait $0,5$ degrés et la température augmente de $20,5\%$ par heure
Après combien de temps la température est-elle strictement supérieure à 3,25 degrés ?

(b) Grahiquement on trouve : $x > 1,4$
Algébriquement :

$0,5 \times 1,205^x > 3,25$

$1,205^x > \dfrac{3,25}{0,5}$

$1,205^x > 6,5$

$log(1,205^x) > 6,5$

$x \times log(1,205) > log(6,5)$

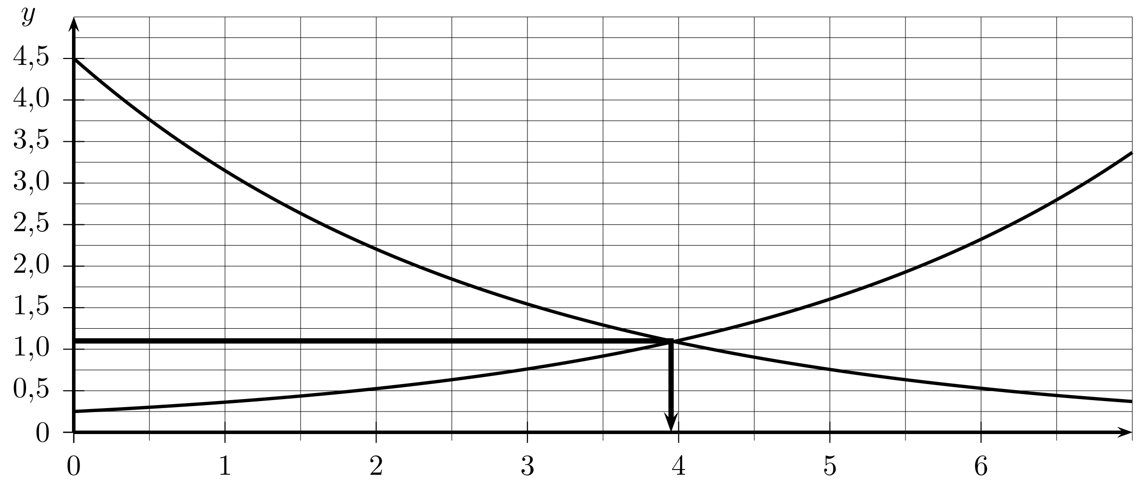
$x > \dfrac{log(6,5)}{log(1,205)}$

Pas de Changement de sens car $log(1,205) > 0$

$x > 10$

(c) la température est strictement supérieure à 3,25 degrés après environs 10 heures

3. $\boxed{0,25 \times 1,45^x = 4,5 \times 0,7^x}$



(a) Lui, a $4,5$ milliers d'euros sur un compte en banque et le solde du compte diminue de 30% par an. Elle, a $0,25$ milliers d'euros sur un compte en banque et le solde du compte augmente de 45% par an. Dans combien de temps auront-ils le même solde sur leurs comptes ?

(b) Graphiquement, on trouve $x > 3,9$

Algébriquement :

$0,25 \times 1,45^x = 4,5 \times 0,7^x$

$\dfrac{1,45^x}{0,7^x} = \dfrac{4,5}{0,25}$

$(\dfrac{1,45}{0,7})^x = 18$

$log((\dfrac{1,45}{0,7})^x) = 18$

$x \times log(\dfrac{1,45}{0,7}) = log(18)$

$x = \dfrac{log(18)}{log(\dfrac{1,45}{0,7})}$

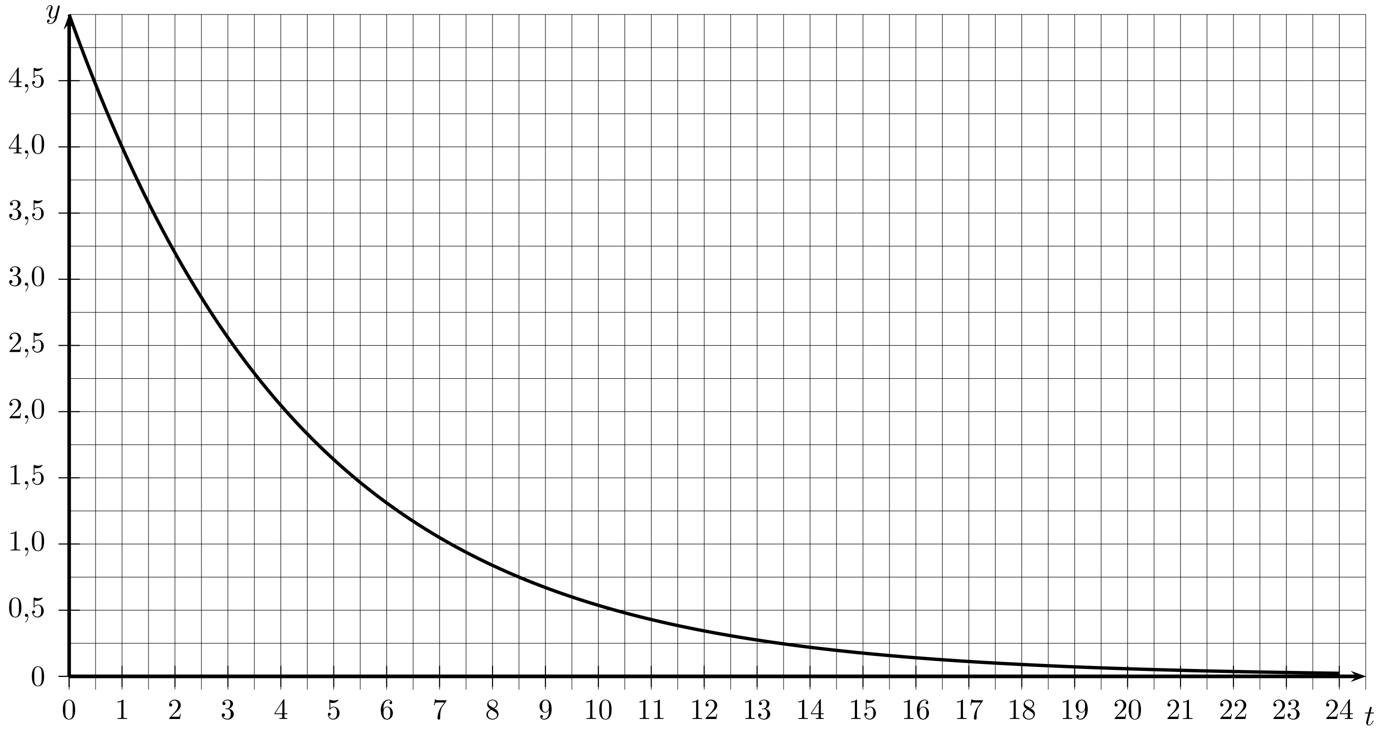
$x \simeq 4$

(c) Ils ont le même solde sur leurs comptes après environs 4 ans

2.6 bac

2.6.1 bac 1

Un médicament A est administré en intraveineuse. Un laboratoire étudie le processus d'absorption de ce médicament par l'organisme pendant les 24 heures qui suivent l'injection.
La quantité de médicament A présent dans le sang est exprimée en cm^3. Le temps t est exprimé en heures.
La quantité de produit présent dans le sang, en fonction du temps t, est donnée par $f(t) = 5 \times 0,8^t$ où t désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;24\,]$. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f



Partie A : Graphiquement

1. Déterminer graphiquement la quantité de médicament A administrée initialement. *(en cm^3)*
2. Déterminer graphiquement la quantité de médicament présente au bout de 3h puis au bout de 12h.
   (à 0,1 cm^3 près)
3. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la quantité de médicament A présente dans le sang aura diminué de 20 %.
4. Le laboratoire indique que le médicament A n'est plus efficace lorsque la quantité de produit présente dans le sang est inférieure à 1 cm^3. Déterminer graphiquement la durée d'efficacité de ce médicament.

Partie B : Algébriquement

1. Quelle est la nature de la fonction f et quelle est sa base ?
2. En utilisant la formule donné ci dessus.
   Calculer la quantité de médicament A présente dans le sang à l'instant $t = 0$.
   Avec quelle question ci dessus ce résultat doit-il être en accord ?
3. Calculer la quantité de médicament A présent dans le sang après 3 heure puis 12 heures
   Avec quelle question ci dessus ce résultat doit-il être en accord ?
4. Justifier pourquoi la fonction f est décroissante.
5. Etablir le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
6. De quel pourcentage, la quantité de médicament diminue t-elle chaque heure ?
7. Résoudre l'équation : $5 \times 0,8^t = 4$ et interpréter le résultat
8. Résoudre l'inéquation : $f(t) < 1$
   On donnera la valeur exacte de la solution puis une valeur approchée au dixième.
   Avec quelle question ci dessus ce résultat doit-il être en accord ?
9. 4 cm^3 d'un deuxième médicament B à été administré en même temps que le premier médicament, et, chaque heure, la quantité de médicament B présent dans le sang diminue de 15%
   (a) exprimer la quantité $g(t)$ de médicament B présent dans le sang après t heures *($g(t) = ...$)*
   (b) Au bout de combien de temps à la minute près, restera t-il exactement la même quantité de médicament B que de médicament A ?
   (aide : résoudre algébriquement une équation, ou bien utiliser un tableau de valeurs de la calculatrice)

2.6.2 corrigé bac 1