# *FICHE METHODE* OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

## *I) A quoi servent les opérations sur les fonctions ?*

**a) Exemples :**

*①. Son salaire à Lui diminue et son salaire à Elle augmente !*
*Comment varient les revenus du couple ( l'addition des 2 salaires ) ?*

*②. Plus il baisse le prix de vente et plus il en vend !*
*Comment varie la recette ? ( la multiplication du nombre de ventes par le prix de vente )*

*③. Ils grandissent tous les deux !*
*Comment varie la différence entre leurs tailles ?*

*④. Chaque année le gâteau est de plus en plus lourd et il y a de plus en plus de personnes !*
*Comment varie la part de chacun ? ( quotient du poids du gâteau par le nombre de personnes ? )*

**b) Remarques :**

*Il existe de nombreux problèmes où deux « choses » varient séparément ( en fonction du temps par exemple ) et ou se pose la question de savoir comment varie la somme ou la différence ou le produit ou encore le quotient des deux choses.*
*On ne peut se fier uniquement à son intuition pour trouver la réponse, ce qui suit donne des «outils » à connaître et à savoir maîtriser pour pouvoir conclure dans certains cas.*

## *II) Qu'est ce qu'une opération sur des fonctions ?*

**Définition 1 :** *( Opérations sur les fonctions )*

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Somme : La fonction $s = u + v$ est définie sur I par $s(x) = u(x) + v(x)$ pour tout $x \in I$ .
- Différence : La fonction $d = u - v$ est définie sur I par $d(x) = u(x) - v(x)$ pour tout $x \in I$ .
- Produit : La fonction $p = u \times v$ est définie sur I par $p(x) = u(x) \times v(x)$ pour tout $x \in I$ .
- Quotient : La fonction $q = \dfrac{u}{v}$ est définie par $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$.

**Exemples :**

$u(x) = 2x + 10$ et $v(x) = -3x + 8$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- $s(x) = u(x) + v(x) = (2x + 10) + (-3x + 8) = -x + 18$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $d(x) = u(x) - v(x) = 2x + 10 - (-3x + 8) = 5x + 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $p(x) = u(x) \times v(x) = (2x + 10)\times(-3x + 8) = -6x^2 - 14x + 80$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{2x + 10}{-3x + 8}$ pour $x \in \mathbb{R} - \{\dfrac{8}{3}\}$.

## *III) Propriétés des opérations sur les fonctions .*

■ **Propriété 1 :** ( SOMME de deux fonctions CROISSANTES ou DECROISSANTES )

Soient u et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
Soit $f = u + v$ la somme des deux fonctions.

1) Si **u et v sont croissantes** sur I alors **f = u + g est croissante** sur I.
***( la somme de deux fonctions croissantes est croissante )***

2) Si **u et v sont décroissantes** sur I alors **f = u + g est décroissante** sur I.
***( la somme de deux fonctions décroissantes est décroissante )***

| u | v | f = u + v |
|---|---|---|
| Croissante | Croissante | Croissante |
| Décroissante | Décroissante | Décroissante |
| Croissante | Décroissante | |
| Décroissante | Croissante | |

**Preuve :**

1) Il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ : si $x_0 \leq x_1$ alors $f(x_0) \leq f(x_1)$

Or : pour $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ avec $x_0 \leq x_1$

On a : $\begin{cases} u \text{ croît sur I donc } u(x_0) \leq u(x_1) \\ v \text{ croît sur I donc } v(x_0) \leq v(x_1) \end{cases}$

Donc en additionnant membre à membre les deux inégalité
on a : $u(x_0) + v(x_0) \leq u(x_1) + v(x_1)$ donc $f(x_0) \leq f(x_1)$ C.Q.F.D.

2) On procède de même

**Application :**

1) Soit $f(x) = x^2 + 3x - 5$, montrons que f croît sur $I = [0 ; +\infty[$

On a $f = u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \rightarrow \text{croissante sur I} \\ v(x) = 3x - 5 \rightarrow \text{croissante sur I} \end{cases}$ donc f croît sur $I = [0 ; +\infty[$

2) Soit $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3x + 5$, montrons que g décroît sur $I = ]0 ; +\infty[$

On a $g = u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = 1/x \rightarrow \text{décroissante sur I} \\ v(x) = -3x + 5 \rightarrow \text{décroissante sur I} \end{cases}$ donc g décroît sur $I = ]0 ; +\infty[$

**Remarque :** Quand on additionne une fonction croissante avec une fonction décroissante, « tout peut arriver » !

① $(2x - 10) + (-2x + 20) = 10$ *( ici : croissante + décroissante = constante )*

② $(2x - 10) + (-3x + 20) = -x + 10$ *( ici : croissante + décroissante = décroissante )*

③ $(3x - 10) + (-2x + 20) = x + 10$ *( ici : croissante + décroissante = croissante )*

■ **Propriété 2 :** ( SOMME d'une fonction et d'une fonction constante ( un nombre ) )

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
Soit $k \in \mathbb{R}$ un nombre réel. ( k peut être vu comme une fonction constante )
Soit $f = u + k$ telle que $f(x) = u(x) + k$ pour tout $x \in I$

1) f a le **même sens de variations** que u ***sur I.***

2) La courbe de f est la **translatée de la courbe de u** par la **translation de vecteur $k\vec{j}$**

| u | $f = u + k$ | Construction de $c_u$ à partir de $C_f$ |
|---|---|---|
| Croissante | Croissante | $k > 0$ : $C_u$ est k unités plus haute |
| | | $k < 0$ : $C_u$ est k unités plus basse |
| Décroissante | Décroissante | $k > 0$ : $C_u$ est k unités plus haute |
| | | $k < 0$ : $C_u$ est k unités plus basse |

**Preuve :**

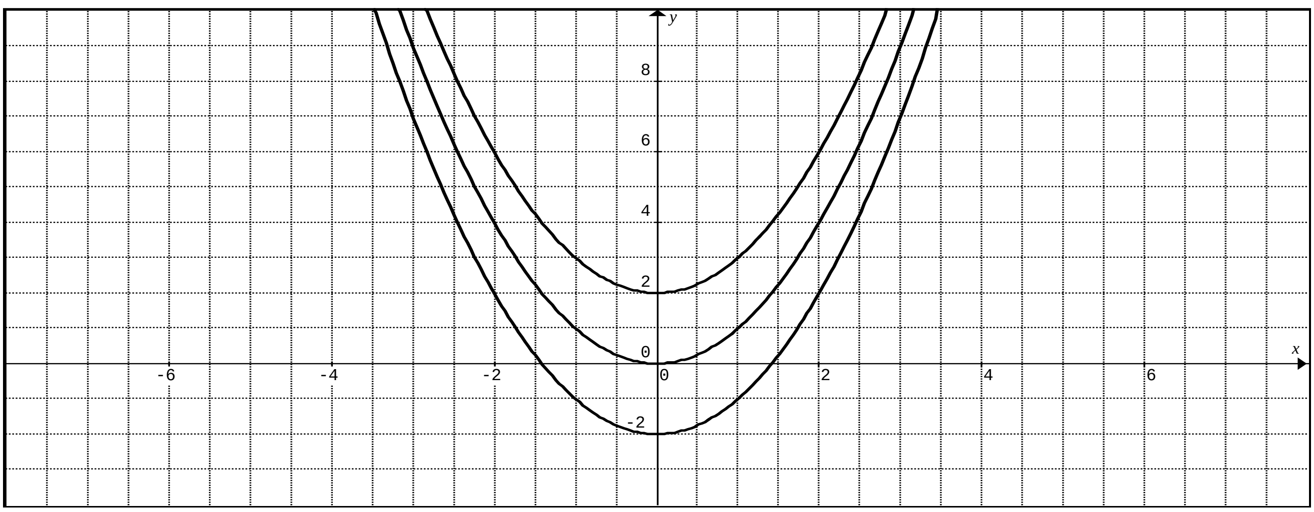
1) Démontrons que si u croît alors $f = u + k$ croît.
Il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ : si $x_0 \leq x_1$ alors $f(x_0) \leq f(x_1)$
Or : pour $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ avec $x_0 \leq x_1$
On a : u croît sur I donc $u(x_0) \leq u(x_1)$
Donc en ajoutant k à chaque membre de l' inégalité
on a : $u(x_0) + k \leq u(x_1) + k$ donc $f(x_0) \leq f(x_1)$ C.Q.F.D.

On procède de même pour montrer que si u décroît alors $f = u + k$ décroît.

2) Admis.

**Illustration :**

1) Soients $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = x^2 - 2$
f,g et h ont le même sens de variations sur $\mathbb{R}$ et on a les courbes ci dessous.




2) $x \longmapsto x^3$ , $x \longmapsto x^3 + 10$ , $x \longmapsto x^3 - 15$, $x \longmapsto x^3 + k$ sont toutes croissantes sur $\mathbb{R}$.

■ **Propriété 3 :** ( Produit d'une fonction et d'une fonction constante ( un nombre ) )

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
Soit $k \in \mathbb{R}$ un nombre réel. ( k peut être vu comme une fonction constante )
Soit $f = k u$ telle que $f(x) = k \times u(x)$ pour tout $x \in I$

On distingue deux cas selon le signe de k.

Si **k > 0** alors f et ku on le **même sens de variation.**

Si k < 0 alors f et ku on des **sens de variation contraires**.

| u | k | f = k u |
|---|---|---|
| Croissante | Positif | Croissante |
| Décroissante | Positif | Décroissante |
| Croissante | Négatif | Décroissante |
| Décroissante | Négatif | Croissante |

**Preuve :**

1) Montrons que si u croît sur I et k > 0 alors ku croît.
Il suffit de montrer que pour $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ et $k > 0$ : si $x_0 \leq x_1$ alors $f(x_0) \leq f(x_1)$
Or : pour $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ avec $x_0 \leq x_1$ et $k > 0$
On a : u croît sur I donc $u(x_0) \leq u(x_1)$
Donc en multipliant les 2 membres de l' inégalité par k > 0
on a : $ku(x_0) \leq k\,u(x_1)$ donc $f(x_0) \leq f(x_1)$ C.Q.F.D.

2) On procède de même pour montrer que si u décroît sur I et k > 0 alors ku décroît.
3) On procède de même dans le cas où k < 0.

**Illustration :**

1) Soients $u(x) = x^2$ $f(x) = 3x^2$ et $h(x) = -4x^2$ définies sur $I = [\ 0\ ; +\infty\ [$ .
u est croissante sur $[0\ ; +\infty\ [$ donc $f = 3u$ croît sur I et $h = -4u$ décroît sur I .

**Remarque :** Pour la différence, le produit, le quotient de deux fonctions quelconques tout peut arriver !

$\boxed{\text{EXERCICES}}$ / OPERATIONS SUR LES FONCTIONS.

**Exercice 1 :** Relisez et mémoriser la définition1 du cours

Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 5x + 2$ et $v(x) = -2x + 10$.

Soient $s = u + v$, $d = u - v$, $p = uv$ et $q = \frac{u}{v}$.

1) Exprimer s,d,p et q en fonction de x
2) Calculer s(0),d(0),p(0) et q(0).

**Exercice 2 :** Relisez et mémoriser la propriété 1 du cours ainsi que la remarque.

A) Déterminer le sens de variation de la fonction donnée sur l'intervalle précisé.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ sur $[0 ; +\infty[$.
2) $g(x) = x^2 - 6x + 10$ sur $]-\infty ; 0]$.
3) $h(x) = x^3 + x^2 + 6x - 10$ sur $[0 ; +\infty[$.
4) $i(x) = \frac{1}{x} + x^2$ sur $]-\infty ; 0]$.
5) $J(x) = \sqrt{x} + 5x$ sur $[0 ; +\infty[$.

B) Donner un exemple de deux fonctions dont l'une soit croissante, l'autre décroissante et dont la somme soit décroissante.

**Exercice 3 :** Relisez et mémoriser la propriété 2 du cours .

A) Déterminer le sens de variation de la fonction donnée sur l'intervalle précisé.

1) $f(x) = x^2 - 3$ sur $[0 ; +\infty[$.
2) $g(x) = x^2 + 3$ sur $]-\infty ; 0]$.
3) $h(x) = x^3 - 2$ sur $\mathbb{R}$
4) $i(x) = \frac{1}{x} + 3$ sur $]-\infty ; 0]$.
5) $J(x) = -\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$.

**Exercice 4 :**

A) Déterminer le sens de variation de la fonction donnée sur l'intervalle précisé.

1) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ sur $[0 ; +\infty[$.
2) $g(x) = -3x^2 - 6x - 10$ sur $]-\infty ; 0]$.
3) $h(x) = 5x^3 + 4x - 10$ sur $\mathbb{R}$
4) $i(x) = \frac{5}{x} - 6x + 12$ sur $]-\infty ; 0]$.
5) $j(x) = 6\sqrt{x} + 3x - 10$ sur $[0 ; +\infty[$.