Fonction Racine carrée

Table des matières

1 fonction racine carrée

1.1 activité

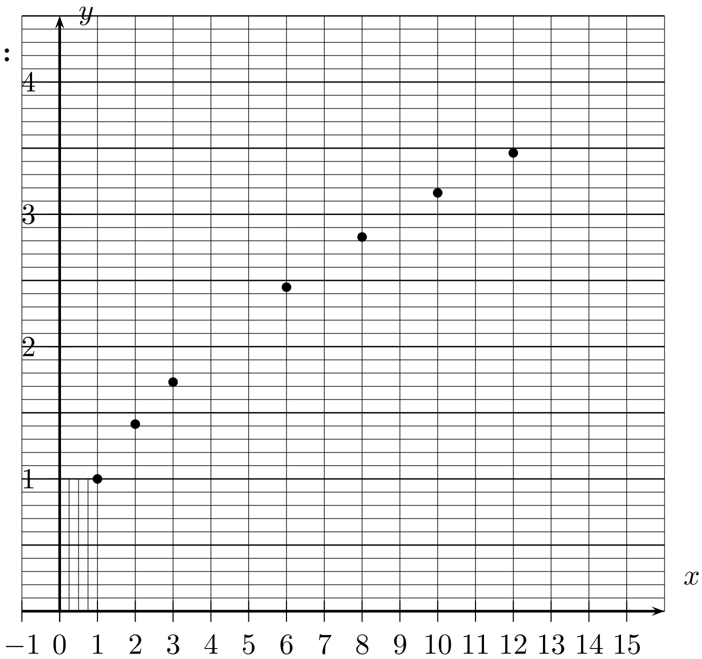
un carré d'aire $A = 4cm^2$ a un coté de mesure $f(4) = ...\quad = ...\quad cm$

un carré d'aire $A = 5cm^2$ a un coté de mesure $f(5) = ...\quad \simeq ...\quad cm$

le coté du carré est donné en fonction de son aire x par la formule $\boxed{f(x) = \quad}$

1. **un tableau de valeur de la fonction racine carrée à $0,1$ près :**

x	-1	0	$0,25$	$0,5$	1	2	3	4	6	8	10	12	16
$f(x) = \sqrt{x}$					1	$1,4$	$1,7$		$2,4$	$2,8$	$3,2$	$3,5$	



2. **tableau de variations de la fonction racine :**

valeur de x	$0 \qquad +\infty$
variations de $f(x) = \sqrt{x}$	

la fonction racine : $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$
est ... sur ...

3. **tableau de signes de la fonction racine :**

valeur de x	$0 \qquad +\infty$
signe de $f(x) = \sqrt{x}$	

$\sqrt{x} = 0 \Longleftrightarrow ...$
$\sqrt{x} > 0 \Longleftrightarrow ...$
$\sqrt{x} < 0 \Longleftrightarrow ...$
$\sqrt{x}$ **est ... sur ...**

4. **la courbe de la fonction racine est une ...**
5. **extremums de la fonction racine pour $x \in [\ 0\ ;\ +\infty\ [$:**

   sur $[0; +\infty[$, le minimum de la fonction racine est ... il est atteint pour ...

   sur $[0; +\infty[$, le maximum de la fonction racine est ... il est atteint pour ...

6. **équations et fonction racine**
   la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 4$ donne graphiquement : ...
   la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 4$ donne algébriquement : ...

   la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 2$ donne graphiquement : ...
   la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 2$ donne algébriquement : ...

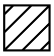
7. **inéquations et fonction cube**
   la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} < 3$ donne : ...

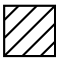
   la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} > 3$ donne : ...

   la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} < -3$ donne : ...

   la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} > -3$ donne : ...

1.2 corrigé activité

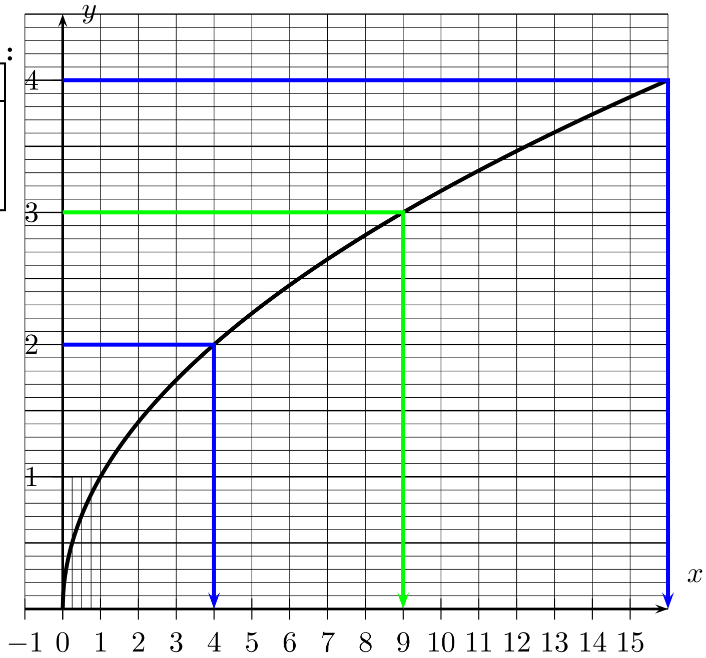
 **un carré d'aire** $A = 4cm^2$ **a un coté de mesure** $f(4) = \boxed{\sqrt{4}} = 2cm$

 **un carré d'aire** $A = 5cm^2$ **a un coté de mesure** $f(5) = \boxed{\sqrt{5}} \simeq 2,24cm$

le coté du carré est donné en fonction de son aire x **par la formule** $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$ **(en** cm**)**

1. **un tableau de valeur de la fonction racine carrée à** $0,1$ **près :**

x	-1	0	$0,25$	$0,5$	1	2	3	4	6	8	10	12	16
$f(x) = \sqrt{x}$		0	$0,5$	$0,7$	1	$1,4$	$1,7$	2	$2,4$	$2,8$	$3,2$	$3,5$	4



2. **tableau de variations de la fonction racine :**

valeur de x	0 $\qquad$ $+\infty$
variations de $f(x) = \sqrt{x}$	0 $\nearrow$ $+\infty$

la fonction racine : $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$
est *strictement croissante* **sur** $[0\ ;\ +\infty[$

3. **tableau de signes de la fonction racine :**

valeur de x	0 $\qquad$ $+\infty$
signe de $f(x) = \sqrt{x}$	0 $\quad$ $+$

$\sqrt{x} = 0 \iff x = 0$
$\sqrt{x} > 0 \iff x \in [0\ ;\ +\infty[$
$\sqrt{x} < 0 \iff x \in \emptyset$
$\sqrt{x}$ **est** *positif* **sur** $[0\ ;\ +\infty[$

4. **la courbe de la fonction racine est une** *demi parabole "couchée"*

5. **extremums de la fonction racine pour** $x \in [\ 0\ ;\ +\infty\ [$ **:**

sur $[0;+\infty[$**, le minimum de la fonction racine est** 0 **il est atteint pour** $x = 0$

sur $[0;+\infty[$**, le maximum de la fonction racine est** *inexistant* **il** *n'***est atteint pour** *aucune valeur de* x

6. **équations et fonction racine**
la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 4$ **donne graphiquement :** $\boxed{x = 16}$
la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 4$ **donne algébriquement :**
$\sqrt{x} = 4 \Longrightarrow (\sqrt{x})^2 = 4^2 \Longrightarrow \boxed{x = 16}$

la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 2$ **donne graphiquement :** $\boxed{x = 4}$
la résolution de l'équation $\sqrt{x} = 2$ **donne algébriquement :**
$\sqrt{x} = 2 \Longrightarrow (\sqrt{x})^2 = 2^2 \Longrightarrow \boxed{x = 4}$

7. **inéquations et fonction racine**
la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} < 3$ **donne :** $\boxed{x \in [0\ ;\ 9[}$
la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} > 3$ **donne :** $\boxed{x \in]9\ ;\ +\infty[}$
la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} < -3$ **donne :** $\boxed{x \in \{\}}$
la résolution de l'inéquation $\sqrt{x} > -3$ **donne :** $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

1.3 à retenir

<u>propriété 1</u> : *(fonction racine)*

• le domaine de définition de la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ **est** $\boxed{D_f = \ [\ 0\ ;\ +\infty\ [}$

• tableau de valeurs, courbe, tableau de signes, tableau de variations, extremums sont donnés par l'activité précédente.

• pour résoudre algébriquement une équation de la forme $\boxed{\sqrt{x} = a}$ **on utilise :**
quel que soit le nombre réel a **:** $\boxed{\sqrt{x} = a \Longleftrightarrow x = a^2}$

démonstration : ***(propriété admise)***

1.4 exercices

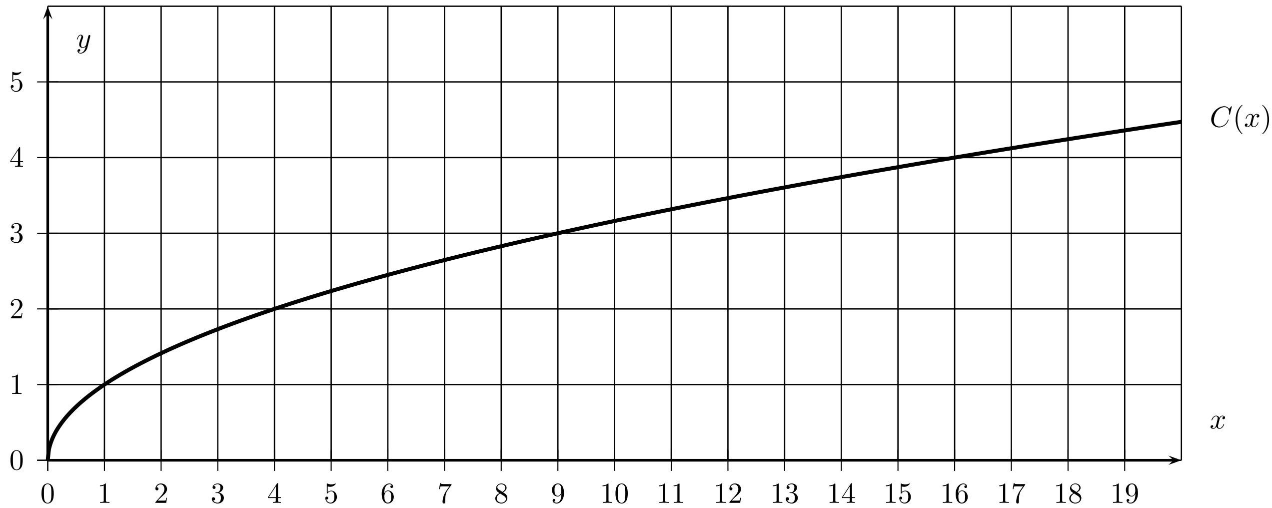
exercice 1 :

une entreprise produit x centaines de kg d'un certain produit par jour, $x \in [\ 0\ ;\ 20\ ]$
le coût total de production des x centaines de kg est donné par $C(x) = \sqrt{x}$ où C est en k€
chaque centaine de kg est vendu $0,3$ k€ , soit pour x centaines de kg vendus, une recette de $R(x)$ k€ ***(où $R(x)$ est à préciser ci dessous)***
le bénéfice pour la fabrication et à la vente de x centaines de kg est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$

(a) détailler les calculs de $C(10)$, $R(10)$, $B(10)$ et en déduire si une production de 10 centaines de kg est rentable ***(donner les résultats à 0,001 k€ près).***

(b) déterminer si une production de 20 centaines est rentable.

(c) exprimer $R(x)$ en fonction de x puis donner un tableau de valeurs et construire la courbe de R dans le repère donné.



(d) déterminer graphiquement et algébriquement à $0,1$ centaine de kg près, la production qui assure une recette de 2,5 k€ euros et vérifier la cohérence

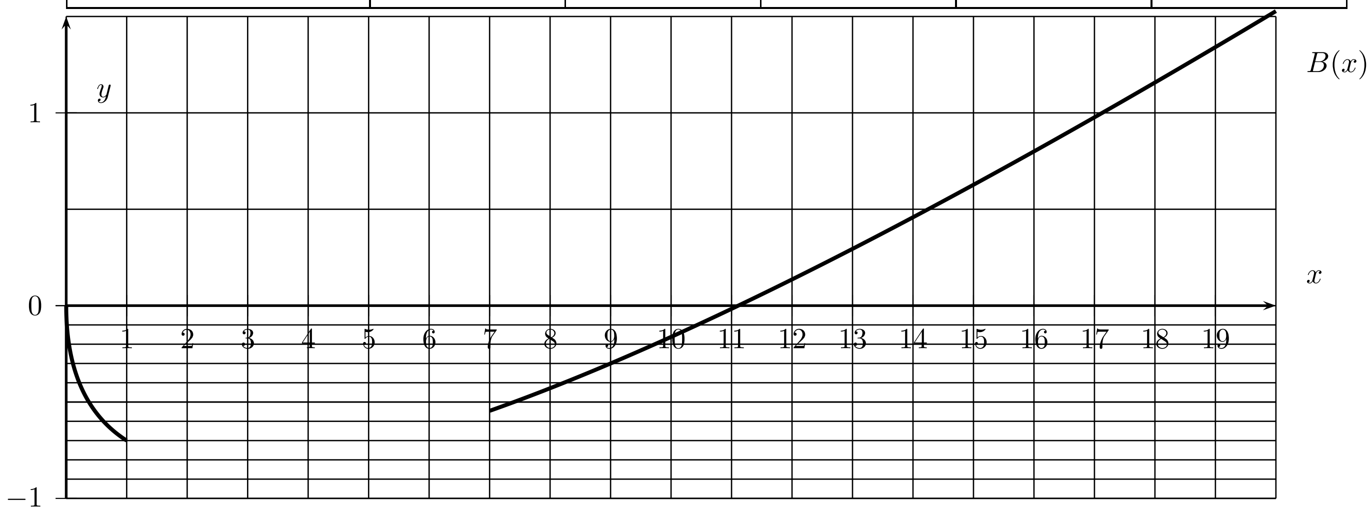
(e) déterminer de même la production qui correspond à un coût de 2,5 k€ euros (cohérence ?)

(f) déterminer graphiquement l'intervalle des productions qui assurent un bénéfice positif.

(g) pour $x \in [0\ ;\ 20]$, résoudre algébriquement l'équation $R(x) = C(x)$ et en déduire la valeur minimale de la production qui assure un bénéfice positif strict ***(à 1 kg près)***

(h) exprimer $B(x)$ en fonction de x, compléter le tableau à 0,001 et terminer la courbe de B

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$B(x) = ...$					



(i) déterminer graphiquement la production qui correspond à la plus grande perte

(j) déterminer en utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice la production qui correspond à la plus grande perte à 0,01 près et donner cette perte

1.5 corrigé exercices

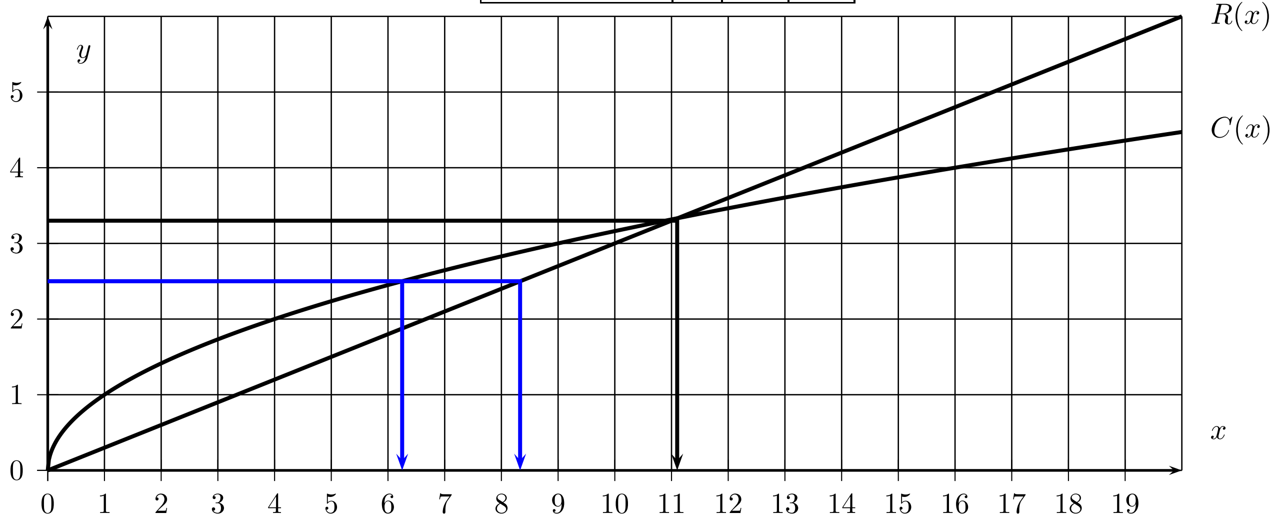
corrigé exercice 1 :

(a) **Coût pour 10 centaines,** $C(10) = \sqrt{10} \simeq \boxed{3,162 \text{ k€}}$
Recette pour 10 centaines, $R(10) = 10 \times 0,3 = \boxed{3\text{k€}}$
Bénéfice $=$ **recette - coût** $= B(10) \simeq 3 - 3,162 = \boxed{-0,162\text{k€}}$
une production de 10 centaines de kg $\boxed{\text{n'est pas rentable}}$ **car le** $\boxed{\text{bénéfice est négatif}}$

(b) **pour une production de 20 centaines :** $B(20) = 20 \times 0,3 - \sqrt{20} \simeq \boxed{1,528 \text{ k€}}$ **ce qui est rentable**

(c) $\boxed{R(x) = 0,3x}$ **un tableau de valeurs**

x	**0**	**10**	**20**
$R(x) = 0,3x$	**0**	**3**	**6**



(d) **production qui assure une recette de 2,5 k€ euros :**
graphiquement : $x \simeq \boxed{8,3}$
algébriquement : $0,3x = 2,5 \iff x = \dfrac{2,5}{0,3} \simeq \boxed{8,3}$**, cohérent avec le résultat précédent**

(e) **production qui correspond à un coût de 2,5 k€ euros**
graphiquement : $x \simeq \boxed{6,25}$
algébriquement : $\sqrt{x} = 2,5 \iff x = 2,5^2 = \boxed{6,25}$ **(cohérent)**

(f) **intervalle des productions qui assurent un bénéfice positif :**
$R(x) > C(x) \iff x \geq 11$ **donc** $\boxed{x \in]11\ ;\ 20]}$

(g) $R(x) = C(x) \iff 0,3x = \sqrt{x}$

$\implies (0,3x)^2 = (\sqrt{x})^2$

$\implies 0,09x^2 = x$

$\implies 0,09x^2 - x = 0$

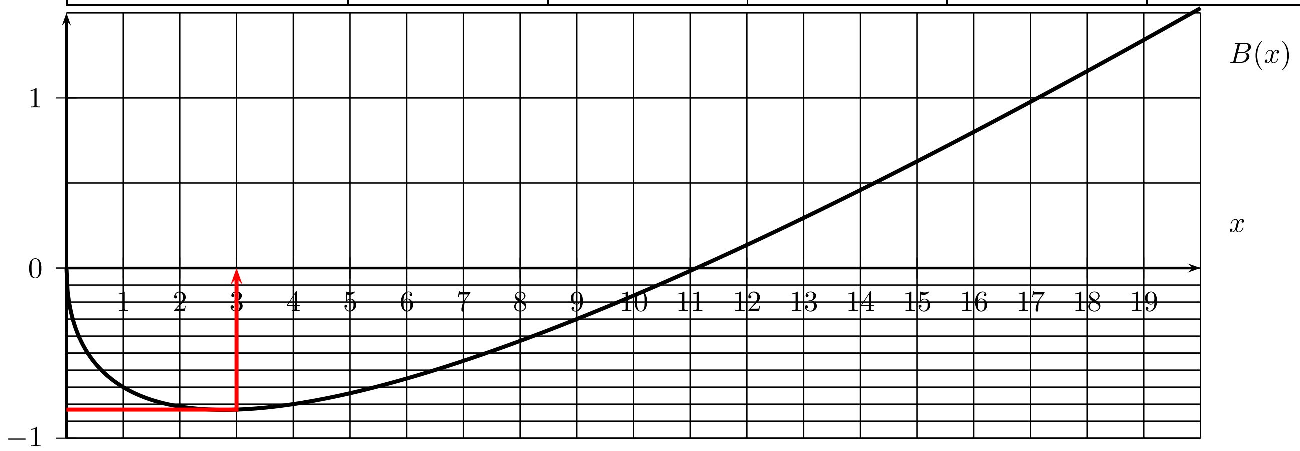
$\implies x(0,09x - 1) = 0$

$\implies x = 0$ **ou** $0,09x - 1 = 0$

$\implies x = 0$ **ou** $x = \dfrac{1}{0,09} \simeq \boxed{11,11}$
la valeur minimale de la production qui assure un bénéfice positif strict (à 1 kg près) est $\boxed{1111 \text{ kg}}$

(h) **exprimer $B(x)$ en fonction de x, compléter le tableau à 0,001 et terminer la courbe de B**

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$B(x) = 0,3x - \sqrt{x}$	$-0,814$	$-0,832$	$-0,8$	$-0,736$	$-0,649$



(i) **graphiquement, la production qui correspond à la plus grande perte est** $\boxed{\simeq 3 \text{ centaines de kg}}$

(j) **la production qui correspond à la plus grande perte à 0,01 près est** $\boxed{2,78}$ **centaines de kg pour une perte de** $\boxed{-0,833 \text{ k€}}$ **comme l'atteste le tableau ci dessous :**

x	**2,77**	**2,78**	**2,79**
$B(x) = 0,3x - \sqrt{x}$	**-0,833331**	**-0,833333**	**-0,833329**

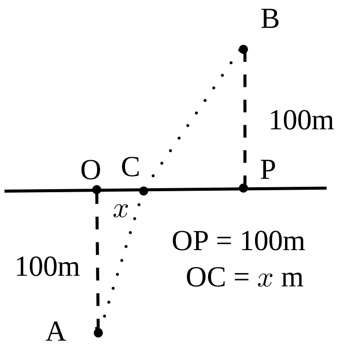
2 tp

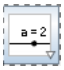
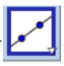
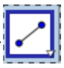
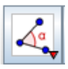
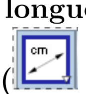
2.1 tp 1

tp : logiciels et étude de fonction **nom, prénom : ...**

<u>buts</u> :
- modéliser Mathématiquement une situation
- utiliser le logiciel géogebra
- conjecturer des résultats
- faire des démonstrations de certaines conjectures

<u>situation</u> :
en mer, une personne est en danger en B à 100m du rivage
un sauveteur se trouve sur le sable en A à 100m du rivage
le sauveteur peut se déplacer sur le sable de A à C
à une vitesse de $1\ m.s^{-1}$ en traînant une embarcation
puis, à bord de son embarcation, le sauveteur peut se déplacer
dans l'eau de C à B à une vitesse de $1,5\ m.s^{-1}$
on cherche la position (d'entrée dans l'eau) du point C
afin que le temps total de trajet $A - B - C$ soit minimal
(il s'agît de trouver la bonne valeur de x)



1. lancer le logiciel geogebra
2. entrer (en bas) dans la barre de saisie la commande : $\boxed{A = (0, -100)}$
   afin de construire le point A (changer l'échelle avec la molette de la souris pour voir le point A)
3. quelle commande faut-il entrer pour construire le point $B(100; 100)$? : ...
   construire le point B
4. quelle commande faut-il entrer pour construire le point P ? : ...
   construire le point P
5. construire le point $O(0; 0)$
6. construire un curseur de nom a avec $min = 0$, $max = 100$ et $increment = 1$
   (utiliser le menu)  *(puis cliquer dans la figure)*
7. construire le point C avec la commande $\boxed{C = (a, 0)}$
   déplacer le point C à l'aide du curseur de la figure ( *puis utiliser le curseur*)
8. construire les segment $[AC]$, $[CB]$ et $[OC]$ dans cet ordre
   (menu ( *puis* ( *puis cliquer sur les points*)
9. afficher les longueurs b , c et d des trois segments dans cet ordre
   ( puis ( *puis cliquer sur les segments*)
10. entrer dans la barre de saisie la commande : $\boxed{dist = b + c}$
    à quoi correspond le nombre $dist$ (dont la valeur s'affiche dans la barre de gauche) ? :
    ...
    (a) utiliser le curseur afin de déplacer le point C et trouver la position du point C et donc la valeur de x pour laquelle $dist$ est minimale
    valeur trouvée : $x = ...$ et $dist \simeq ...$
    que dire alors des points A, C et B ? : ...

    (b) démonstration 1 : retrouver ci dessous par le calcul la valeur exacte de $dist$ ainsi qu'une valeur approchée à 0,01 près *(théorème bien connu)*

(c) utiliser le curseur afin de déplacer le point C et trouver la position du point C et donc la valeur de x pour laquelle $dist$ est maximale
valeur(s) trouvée(s) : $x = ...$ et $dist \simeq ...$

11. rappel : $\boxed{vitesse = \dfrac{distance}{temps}}$ **donc** $\boxed{distance = temps \times vitesse}$ **donc** $\boxed{temps = \dfrac{distance}{vitesse}}$

(a) calculer dans le cas où C est le milieu de $[OP]$, le temps t_1 mis par le sauveteur pour aller de A à C puis le temps t_2 pour aller de C à B puis le temps total t du trajet de$A$ à B
$t_1 = ...$ $t_2 = ...$ $t = ...$

(b) entrer dans la barre de saisie les commandes : $\boxed{t1 = b/1}$, $\boxed{t2 = c/1.5}$ **et** $\boxed{t = t1 + t2}$

(c) quelle est la valeur de t affichée dans le cas où C est le milieu de $[OP]$? : $t = ...$
est-ce cohérent avec les calculs précédents ? : ...

(d) déplacer le point C avec le curseur et déterminer une valeur approchée de x pour laquelle le temps total t de parcours de A à C est minimum :
$x = ...$
temps minimum : $t = ...$

12. (a) quelle commande entrer pour afficher le point $M(a;t)$? : ...
entrer cette commande et changer d'échelle pour voir le point M à l'écran

(b) clic droit sur M et cocher "Trace activée"

(c) utiliser le curseur pour voir la "courbe des temps"

(d) placer le point C correspondant au temps minimal, on a alors $d = ...$

13. on cherche maintenant une valeur plus précise du temps minimal et de la position de C correspondante

(a) dans la menu Affichage, cocher la case Tableur

(b) entrer 0 dans la cellule $A1$ et 1 dans la cellule $A2$
sélectionner les deux cellules puis étirer jusqu'à la cellule $A101$

(c) la formule qui donne le temps total de trajet t de A à C est en fonction de x est :
$t = \sqrt{10000 + x^2} + \dfrac{1}{1,5}\sqrt{(100 - x)^2 + 10000}$

i. pour $x = 0$ on a par calcul : $t = ...$

ii. vérifier avec le curseur, est-ce cohérent ? : ...

iii. entrer alors la formule qu'il faut dans la cellule $B1$ afin qu'elle affiche le temps correspondant à la valeur de x contenue dans $A1$
(dans le tableur, la racine carrée de 3 s'écrit 3 $\wedge$ 0.5)
formule à entrer : $B1 =$

iv. sélectionner la cellule $B1$ et étirer jusqu'à la cellule $B101$

v. trouver grâce au tableau de valeurs la valeur de x qui minimise la durée t et donner les valeurs
$x = ...$ **et $t = ...$**

14. durée de trajet minimum = ...

15. durée de trajet maximum = ...

16. le trajet le plus court est-il le plus rapide ? (justifier) : ...

17. le trajet le plus long est-il le moins rapide ? (justifier) : ...

18. vaut-il mieux aller jusqu'au point O ou jusqu'àu point P pour mettre la barque à l'eau ? (justifier) : ...

19. quel est le meilleur point pour mettre la barque à l'eau ? (justifier) :

2.2 corrigé tp1

3 devoir maison

corrigé devoir maison

<u>exercice 1 :</u> ***(50 page 51)***

1. **pour** $x = 195$ **et** $y = 90$ **on a :** $S = \dfrac{\sqrt{195 \times 90}}{60} \simeq \boxed{2,21}$

2. **pour** $y = 72$ **et** $S = 1,8$ **on a :** $1,8 = \dfrac{\sqrt{72x}}{60}$

   $\Longleftrightarrow 1,8 \times 60 = \sqrt{72x}$

   $\Longleftrightarrow 108 = \sqrt{72x}$

   $\Longrightarrow 108^2 = (\sqrt{72x})^2$

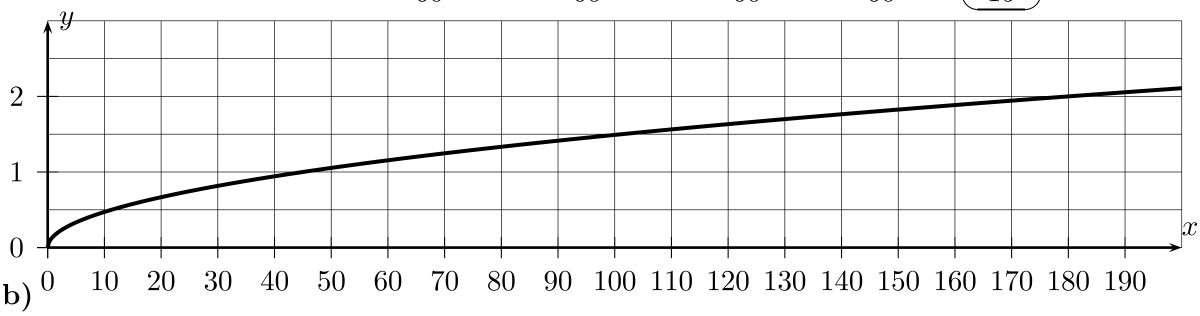
   $\Longrightarrow 11664 = 72x$

   $\Longrightarrow x = \dfrac{11664}{72} = 162$

   on vérifie : $S = \dfrac{\sqrt{162 \times 72}}{60} = 1,8$

   donc $\boxed{\textbf{l'individu mesure } 1,62 \textbf{ m}}$

3. (a) **pour** $y = 80$ **on a :** $S = \dfrac{\sqrt{x \times 80}}{60} = \dfrac{\sqrt{16 \times 5x}}{60} = \dfrac{\sqrt{16}\sqrt{5x}}{60} = \dfrac{4\sqrt{5x}}{60} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5x}}{15}}$



   (b) **graphiquement, la fonction** S **est croissante sur** $[160\ ;\ 200]$
   d'où le tableau de variations de S **sur** $[160\ ;\ 200]$

valeur de x	160	200
variations de $S(x)$	$\simeq 1,89$ ↗	$\simeq 2,11$

4. **pour une taille comprise entre** $1,6m$ **et** $2m$ **on a** $\boxed{1,89 \leq S \leq 2,11}$

<u>exercice 2 :</u> ***(51 page 51)***

1. **si** $v = 800$ **alors :** $800 = 3,6\sqrt{9,8h}$

   $\Longleftrightarrow \dfrac{800}{3,6} = \sqrt{9,8h}$

   $\Longrightarrow (\dfrac{800}{3,6})^2 = 9,8h$

   $\Longrightarrow \dfrac{(\dfrac{800}{3,6})^2}{9,8} = h$

   $\Longrightarrow h \simeq \boxed{5039m}$

   on vérifie : $3,6\sqrt{9,8 \times 5039} \simeq 800$

2. **si** $h = 50$ **alors** $v = 3,6\sqrt{9,8 \times 50} \simeq \boxed{80 \textbf{ km/h}}$

exercice 3 : ***(81 page 57)***

1. (a) **d'après le théorème de pythagore on a :** $AM^2 = AC^2 + CM^2$

   $AM^2 = 9^2 + x^2 = 81 + x^2$

   $AM = \sqrt{81 + x^2}$

   $vitesse = \dfrac{distance}{temps}$ **donc** $temps = \dfrac{distance}{vitesse}$ **avec** $vitesse = 4$ **et** $distance = AM$

   le temps mis pour parcourir AM **est donc :** $\dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4}$

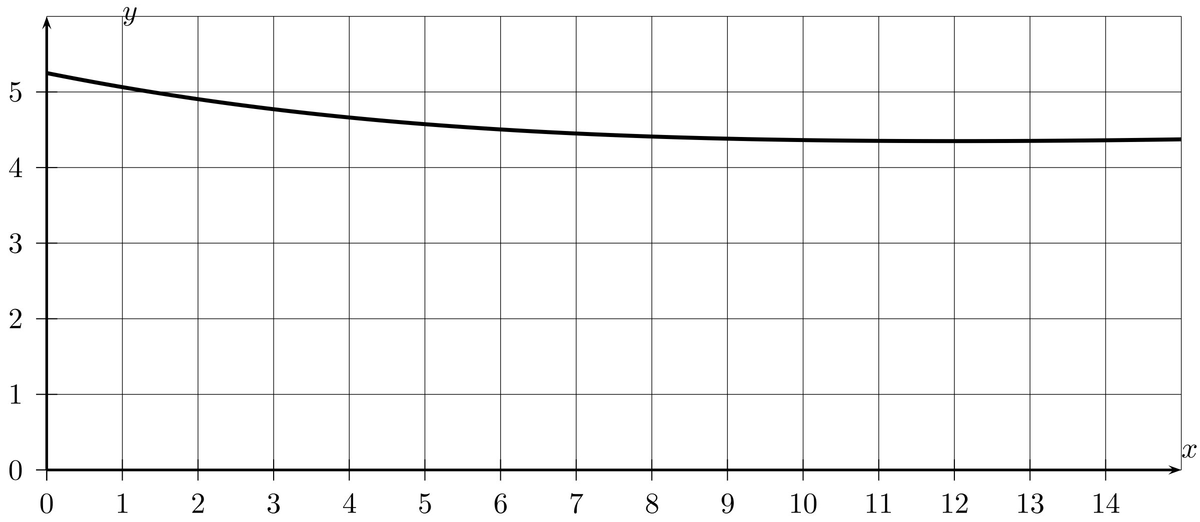
   (b) **de même, le temps mis pour parcourir** MB **est donc :** $\dfrac{15-x}{5}$

   (c) **le temps total de parcours est donc :** $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4} + \dfrac{15-x}{5}}$

   tableau de valeurs

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$f(x)$	**5,2**	**5,1**	**4,9**	**4,8**	**4,7**	**4,6**	**4,5**	**4,45**	**4,41**	**4,38**

x	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$f(x)$	**4,36**	**4,353**	**4,35**	**4,352**	**4,36**	**4,37**



2. (a) **pour arriver le plus vite possible il faut accoster à** $\boxed{x = 12\ km}$ **de** C

   (b) **le temps mis est d'alors** $4,35 heures$ **soit** $4h + 0,35h$ **soit** $4h + 0,35 \times 60mn$ **soit** $\boxed{4h\ 21mn}$