FICHE METHODE — LIMITES des FONCTIONS

I) A quoi servent les limites des fonctions ?

a) Exemples :

①. *Il y a actuellement 50 filles et 60 garçons et il arrive un couple (fille, garçon) par minute*

Que devient le pourcentage de filles si l'on attend très longtemps ? $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{50 + x}{110 + 2x} = ?$

②. *On partage équitablement 1 million d'euros entre x personnes !*

Que devient la part de chacun s'il y a beaucoup de personnes ? $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = ?$

③. *Si prix du repas est de x euros , le bénéfice du restaurateur est de $B(x) = -5x^2 + 65x + 690$*

Que devient le bénéfice s' il augmente beaucoup le prix ? $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^2 + 65x + 690 = ?$

④. *Avec 10 litres d'eau, on rempli des verres de x ml !*

Que devient le nombre de verres que l'on peut remplir quand le verre est de plus en plus petit ?

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10}{x} = ?$

⑤ . *Il se déplace sur un axe gradué et son abscisse en fonction du temps est donnée par $A(x) = -x^2 + 10x + 5$.*

Que devient son abscisse si l' on remonte longtemps dans le passé ? $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 + 10x + 5 = ?$

b) Remarques :

Les fonctions permettent de « modéliser » certains phénomènes, de décrire l' évolution de certains d'entre eux dans le temps par exemple. (variations de la température moyenne de la terre, variation de la population d'un pays…).

On s'intéresse parfois à ce que devient le phénomène loin dans le passé ou loin dans le futur ou encore, sur un voisinage d'une date précise. Ce type de questions a fait naître la notion de limites d'une fonction en $+\infty$ en $-\infty$ ou en un nombre a (a = 0, par exemple).

Il est nécessaire, de connaître et de maîtriser certains savoir-faire concernant cette notion.

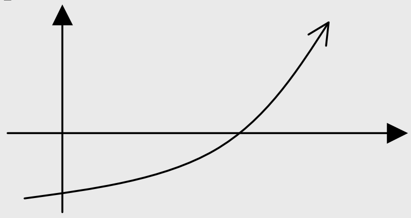
II) Qu'est ce qu'une limite ?

Définition 1 : (*limite de f(x) quand x tend vers + ∞*)

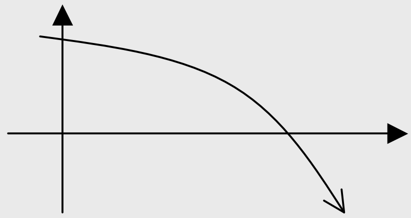
Soit f une fonction.

On distingue 4 cas selon ce qui peut arriver pour la courbe de f quand **x tend vers + ∞.**

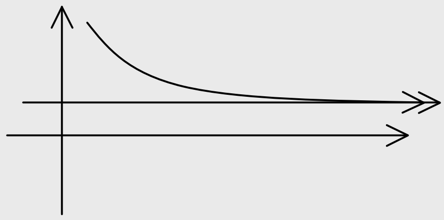
1) La courbe monte à l'infinie quand x tend vers + ∞, on dit que f a une limite égale à + ∞ infinie quand x tend vers + ∞ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



2) Courbe qui descend à moins l'infinie quand x tend vers + ∞.
f a une limite égale à – ∞ infinie quand x tend vers + ∞
et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



3) Courbe qui se rapproche de plus en plus d'une droite d' équation x = a parallèle à l'axe (ox) quand x tend vers + ∞.
f a une limite égale à « a » quand x tend vers + ∞
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$



et on dit que la droite d'équation x = a est une **droite asymptote** à la courbe de f en + ∞.

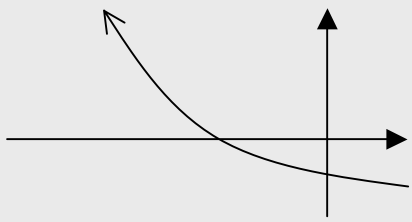
4) Si l'on n'est pas dans un des cas précédents alors on dit que f n'a pas de limite en + ∞.

Définition 2 : (*limite de f(x) quand x tend vers – ∞*)

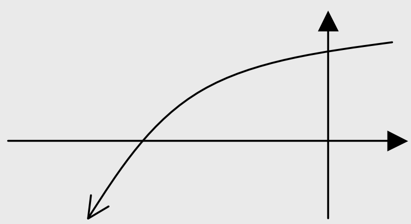
Soit f une fonction.

On distingue 4 cas selon ce qui peut arriver pour la courbe de f quand **x tend vers – ∞.**

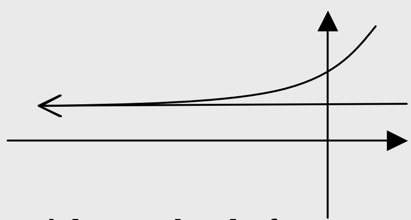
1) Courbe qui monte à l'infinie quand x tend vers – ∞.
f a une limite égale à + ∞ infinie quand x tend vers – ∞
et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



2) Courbe qui descend à moins l'infinie quand x tend vers – ∞.
f a une limite égale à – ∞ infinie quand x tend vers – ∞
et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



3) Courbe qui se rapproche de plus en plus d'une droite d' équation x = a parallèle à l'axe (ox) quand x tend vers – ∞.
f a une limite égale à « a » quand x tend vers + ∞
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$



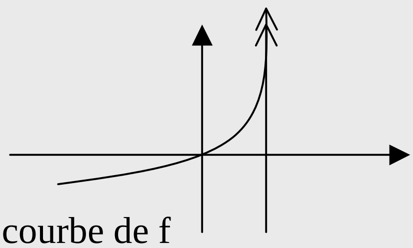
et on dit que la droite d'équation x = a est une **droite asymptote** à la courbe de f en – ∞.

4) Si l'on n'est pas dans un des cas précédents alors on dit que f n'a pas de limite en + ∞.

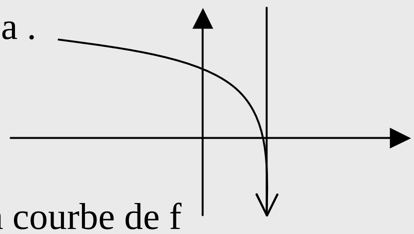
Définition 3 : (*limite de f(x) quand x tend vers a et x < a*)

Soient f une fonction et a un nombre réel.
On distingue 3 cas selon ce qui peut arriver pour la courbe de f quand **x tend vers a et x < a.**

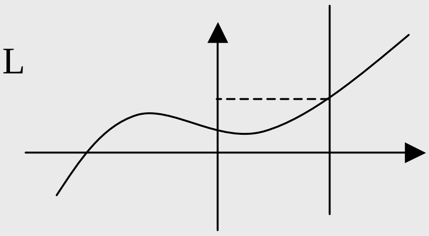
1) Courbe qui monte à l'infinie quand x tend vers a et x < a .
f a une limite égale à $+\infty$ infinie quand x tend vers a et x < a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
et on dit que la droite d'équation x = a est droite asymptote à la courbe de f



2) Courbe qui descend à moins l'infinie quand x tend vers a et x < a .
f a une limite égale à $-\infty$ infinie quand x tend vers a et x < a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
et on dit que la droite d'équation x = a est droite asymptote à la courbe de f



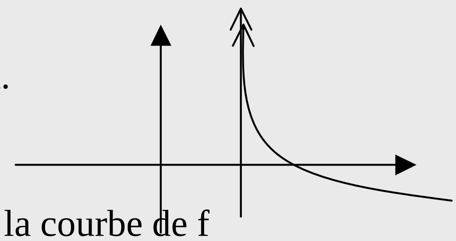
3) Courbe qui se rapproche de plus en plus d'un point d'ordonnée L quand x tend vers a et x < a.
f a une limite égale à « L » quand x tend vers a et x < a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$



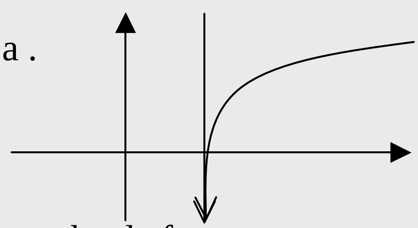
Définition 4 : (*limite quand x tend vers a et x > a*)

Soient f une fonction et a un nombre réel.
On distingue 3 cas selon ce qui peut arriver pour la courbe de f quand **x tend vers a et x > a.**

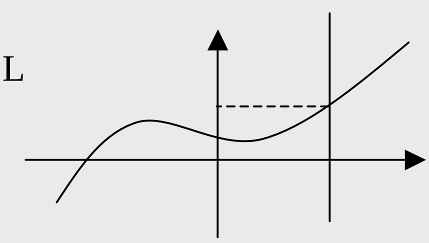
1) Courbe qui monte à l'infinie quand x tend vers a et x > a .
f a une limite égale à $+\infty$ infinie quand x tend vers a et x > a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
et on dit que la droite d'équation x = a est droite asymptote à la courbe de f



2) Courbe qui descend à moins l'infinie quand x tend vers a et x < a .
f a une limite égale à $-\infty$ infinie quand x tend vers a et x < a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
et on dit que la droite d'équation x = a est droite asymptote à la courbe de f



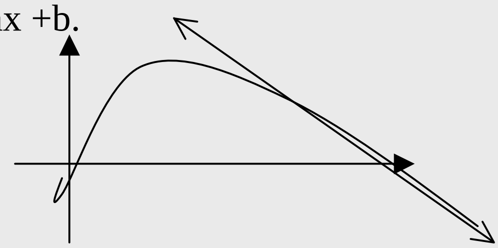
3) Courbe qui se rapproche de plus en plus d'un point d'ordonnée L quand x tend vers a et x < a.
f a une limite égale à « L » quand x tend vers a et x < a.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$



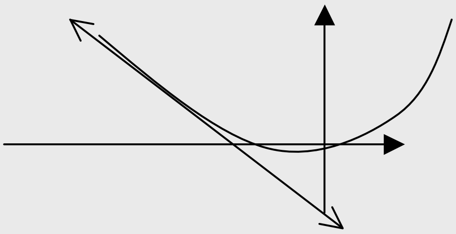
Définition 5 : (*Droite asymptote oblique quand x tend vers + ∞ ou – ∞*)

Soient f une fonction et (d) une droite d équation $y = ax + b$.

1) Si la courbe de f se rapproche de la droite (d) quand x tend vers $+\infty$ alors on dit que (d) est une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

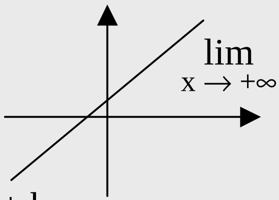
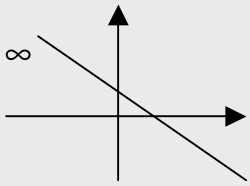
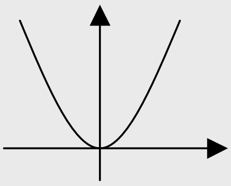
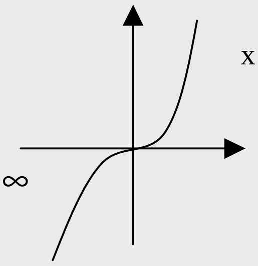
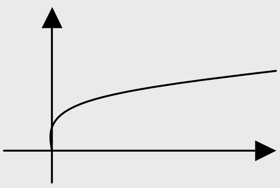
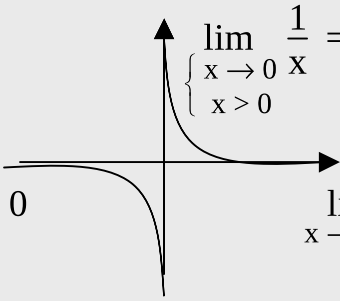


2) Si la courbe de f se rapproche de la droite (d) quand x tend vers $-\infty$ alors on dit que (d) est une droite asymptote à la courbe de f en $-\infty$.



III) Propriétés des limites ?

■ Propriété 1 : (*limites des fonctions usuelles*)

FONCTION **AFFINE : a > 0**  $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b = -\infty$	FONCTION **AFFINE : a < 0** $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b = +\infty$  $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b = -\infty$
CARREE $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ 	CUBE  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
RACINE CARREE  $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	INVERSE  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Preuve : Admis

■ Propriété 2 : *(Somme de fonctions et limites)*

Soient u et v deux fonctions. Dans ce qui suit, α est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**et** $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) + v(x)$
m	p	m + p
m	$+\infty$	$+\infty$
m	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Tout peut arriver

Preuve : Admis.

Application : Soit $f(x) = x^2 + 2x + 3$, on cherche la limite en $+\infty$.

On a : $f = u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ v(x) = 2x + 3 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 3 = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

■ Propriété 3 : *(Produit de fonctions et limites)*

Soient u et v deux fonctions. Dans ce qui suit, α est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**et** $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) \times v(x)$
m	p	$m \times p$
$m > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$m < 0$		$-\infty$
$m = 0$		Tout peut arriver
$m > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$m < 0$		$+\infty$
$m = 0$		Tout peut arriver
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Preuve : Admis.

Application : Soit $f(x) = x(x + 2)$, on cherche la limite en $-\infty$.

On a : $f = u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ v(x) = x + 2 \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

■ **Propriété 4 :** *(Inverse d' une fonction et limites)*

Soient u et v deux fonctions. α est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)}$
$m \neq 0$	$\dfrac{1}{m}$
$m = 0$ et f positive	$+\infty$
$m = 0$ et f négative	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Preuve : Admis.

Application : Soit $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$, on cherche la limite en $+\infty$.

On a : $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 3x - 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

■ **Propriété 5 :** *(Quotient de deux fonctions et limites)*

Soient u et v deux fonctions. Dans ce qui suit, α est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**et** $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{u(x)}{v(x)}$
m	$p \neq 0$	$\dfrac{m}{p}$
m	$+\infty$	0
	$-\infty$	
$+\infty$	$p < 0$	$-\infty$
	$p > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$p < 0$	$+\infty$
	$p > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$p = 0$ et v positive	$-\infty$
	$p = 0$ et v négative	∞
$+\infty$	$p = 0$ et v positive	$+\infty$
	$p = 0$ et v négative	$-\infty$
$m > 0$	$p = 0$ et v positive	$+\infty$
	$p = 0$ et v négative	$+\infty$
$m < 0$	$p = 0$ et v positive	$-\infty$

Preuve : Admis.

Application : Soit $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 1}{x + 1}$, on cherche la limite en $+\infty$.

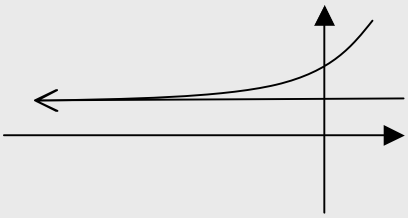
On a $f = \dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{x} + 1 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ v(x) = x + 1 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

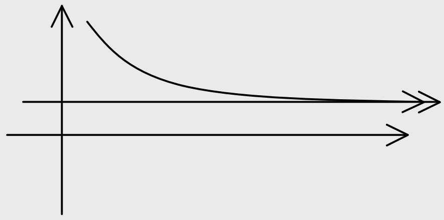
■ Propriété 6 : (*Droites asymptotes*)

Soit f une fonction. Soient a, b deux réels
Dans ce qui suit, α est $+\infty$ ou $-\infty$.

1) Droite asymptote Horizontale :

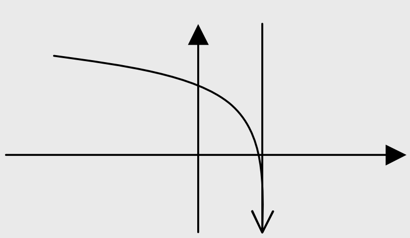
Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b$ Alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe de f en α

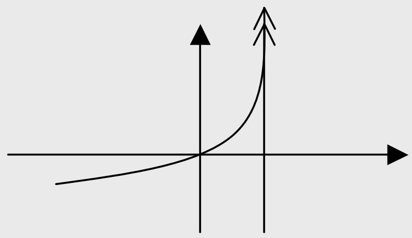




2) Droite asymptote Verticale :

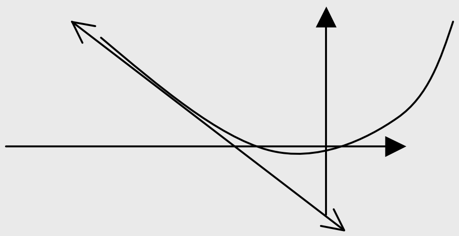
Si $\lim\limits_{x \to a^+ \text{ ou } a^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f en a^+ ou a^-

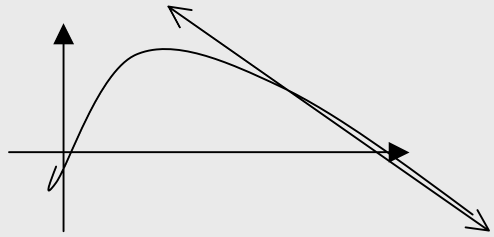




3) Droite asymptote Oblique :

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} [\, f(x) - ax + b \,] = 0$ Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en α.





<u>Preuve :</u> Admis.

<u>Application :</u> Soit $f(x) = 3x + 4 + \dfrac{1}{x}$, on cherche à montrer que $y = 3x + 4$ est l'équation d'une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

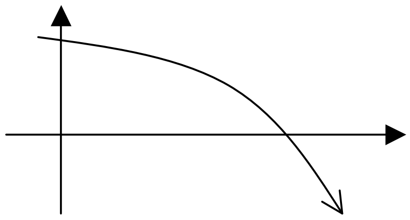
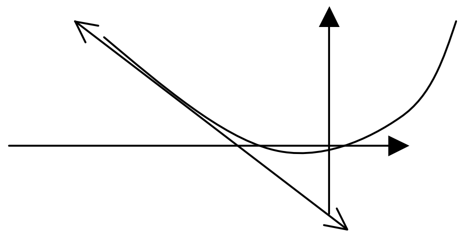
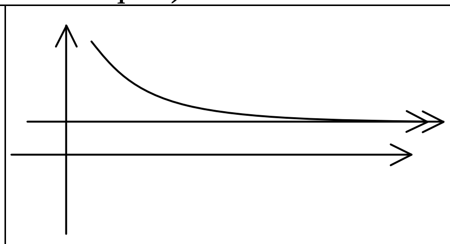
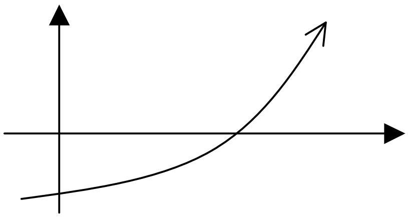
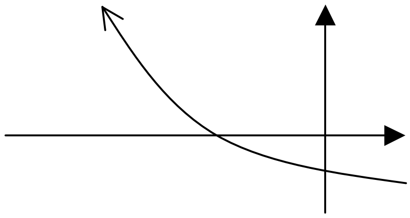
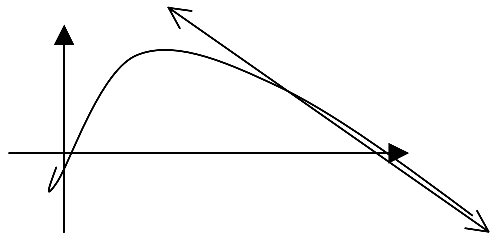
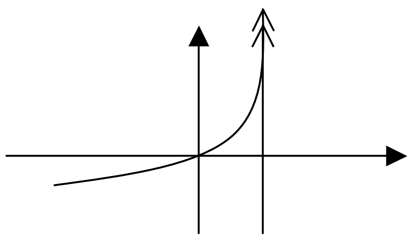
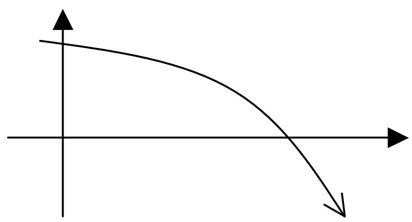
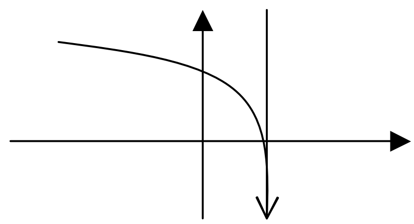
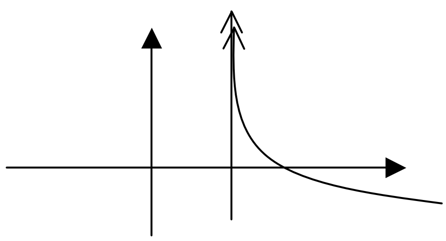
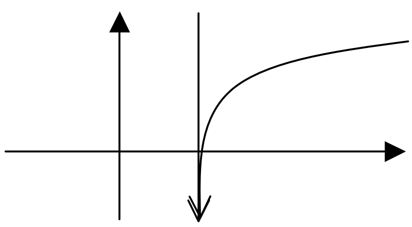
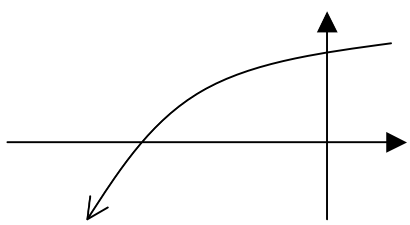
$$f(x) - (3x + 4) = 3x + 4 + \frac{1}{x} - (3x + 4) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (3x + 4) \,] = 0$ donc $y = 3x + 4$ est l'équation d'une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

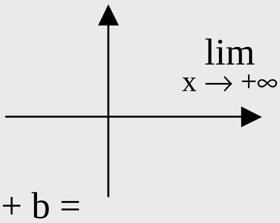
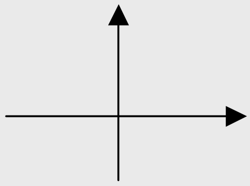
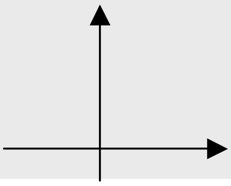
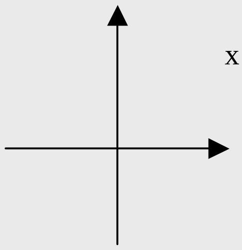
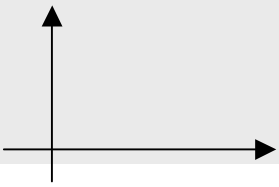
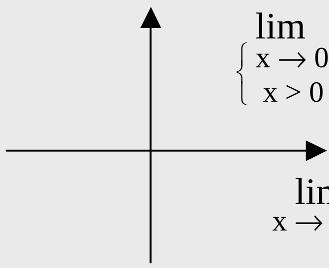
EXERCICES : LIMITES et FONCTIONS

•Exercice 1 : Relire et mémoriser les définitions 1,2,3,4 et 5 du cours.

Pour chacune des courbes suivantes, préciser la limite demandée et préciser s'il y a une droite asymptote ou non (si oui, préciser si elle est horizontale, verticale ou oblique)

 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ………..	 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ………..	 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ………..
 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ………..	 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ………..	 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ………..
 $\lim\limits_{x \to 1^-} =$ …………………	 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ………..	 $\lim\limits_{x \to 1^-} =$ …………………
 $\lim\limits_{x \to 1^+} =$ ………………….	 $\lim\limits_{x \to 1^+} =$ ………………….	 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ………..

•Exercice 2 : Relire et mémoriser la propriété 1 du cours.
Compléter le graphique ainsi que les limites et préciser s'il y a des asymptotes.

FONCTION **AFFINE : a > 0**  $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b =$	FONCTION **AFFINE : a < 0** $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b =$  $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b =$
CARREE $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$ 	CUBE  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 =$
RACINE CARREE  $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$	INVERSE  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} =$

•Exercice 3 : Relire et mémoriser la propriété 2 du cours.

1) Compléter le tableau suivant.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**et** $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)+v(x)$
m	p	
m	$+\infty$	
m	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

2) Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$; quand x tend vers 0^+, en 0^-.

b) $f(x) = x^3 + x^2$ quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$.

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 5$ quand x tend vers $+\infty$.

•Exercice 4 : Relire et mémoriser la propriété 3 du cours.

1) Compléter le tableau suivant.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**et** $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) \times v(x)$
m	p	
m > 0		
m < 0	+ ∞	
m = 0		
m > 0		
m < 0	– ∞	
m = 0		
+ ∞	+ ∞	
– ∞	– ∞	
+ ∞	– ∞	

2) Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x}$ quand x tend vers + ∞ ; quand x tend vers – ∞ ; quand x tend vers 0^+ , en 0^- .

b) $f(x) = x^2(x + 1)$ quand x tend vers – ∞.

c) $f(x) = (-3x + 4)\sqrt{x}$ quand x tend vers + ∞.

•Exercice 5 : Relire et mémoriser la propriété 4 du cours.

1) Compléter le tableau suivant.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	**Alors** $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)}$
m ≠ 0	
m = 0 et f positive	
m = 0 et f négative	
+ ∞	
– ∞	

2) Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers + ∞ ; quand x tend vers – ∞ ; quand x tend vers 0^+ , en 0^- .

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ quand x tend vers + ∞ ; quand x tend vers – ∞ ; quand x tend vers 0^+ , en 0^-

c) .$f(x) = \dfrac{1}{-3x + 4}$ quand x tend vers + ∞

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ quand x tend vers 1^+ , quand x tend vers 1^-

•Exercice 6 : Relire et mémoriser la propriété 5 du cours.

1) Compléter le tableau suivant.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$	Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{u(x)}{v(x)}$
m	$p \neq 0$	
m	$+\infty$	
	$-\infty$	
$+\infty$	$p < 0$	
	$p > 0$	
$-\infty$	$p < 0$	
	$p > 0$	
$-\infty$	p = 0 et v positive	
	p = 0 et v négative	
$+\infty$	p = 0 et v positive	
	p = 0 et v négative	
$m > 0$	p = 0 et v positive	
	p = 0 et v négative	
$m < 0$	p = 0 et v positive	

2) Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{10}{3x + 4}$ quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$

b) $f(x) = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}}$ quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$; quand x tend vers 0^+

c) .$f(x) = \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$.

•Exercice 7: Relire et mémoriser la propriété 6 du cours.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la ou les droite(s) asymptote(s).

a) $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$

b) $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x - 1}$ en 1^+

c) $f(x) = 10x - 5 + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$