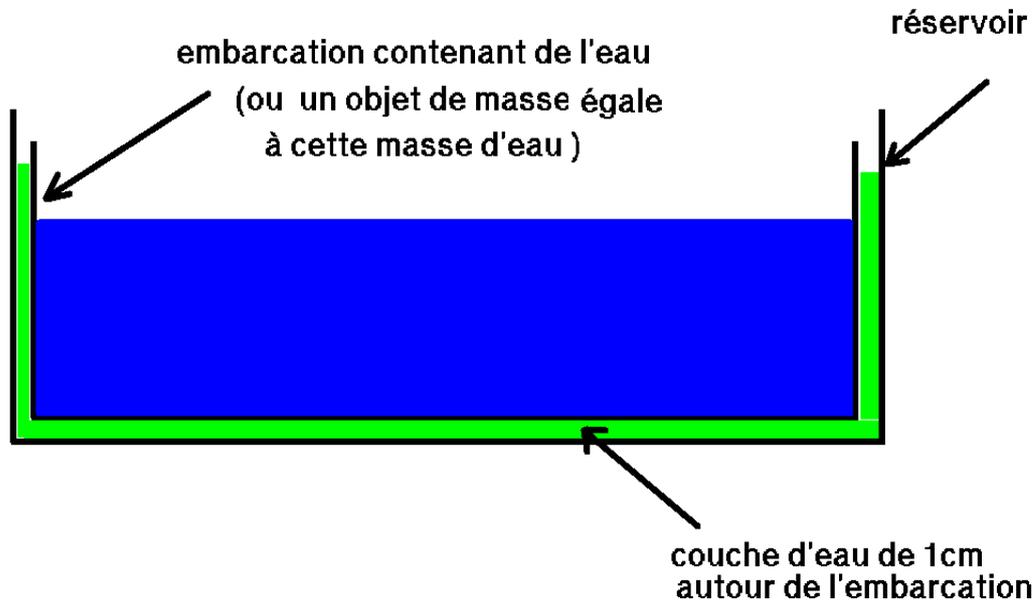


"Quantité d'eau minimale pour flotter et poussée d'Archimède"

1. Comment faire flotter un bateau en acier type "pavé droit creux à base carrée" de côté 100 m de hauteur 3 m d'épaisseur 10 cm et rempli aux $\frac{2}{3}$ d'eau dans un réservoir type "pavé droit creux à base carrée" de côté $100,02\text{ m}$ et contenant initialement une couche d'eau de $\simeq 1,1\text{ cm}$ dans le fond ?

Dessin non à l'échelle



Sauf erreur (*calculs ci-dessous à vérifier*)

L'embarcation pèserait au total : $\simeq 28229449,76\text{ kg}$

L'embarcation flotterait dans un volume de $\simeq 111,4\text{ m}^3$ d'eau d'une masse de $\simeq 111072,7\text{ kg}$ qui serait dans le fond du réservoir qui accueillerait l'embarcation, soit une couche d'eau d'épaisseur initiale $\simeq 1,11\text{ cm}$

Rapport masse d'eau dans laquelle flotte le bateau sur masse totale du bateau : $\simeq 0,004$

2. Embarcation

- (a) Volume du bateau type pavé droit creux à base carrée.

de côté : c

de hauteur : h

d'épaisseur : a

Volume du bateau : $V_B = c^2a + 4a(h - a)(c - a)$

(*formule homogène qui donne $V = c^2h$ si $a = \frac{c}{2}$ et qui donne 0 si $a = 0$*)

- (b) Masse du bateau en fonction de la masse volumique ρ_B de son matériau

Masse bateau $M_B = \rho_B \times V_B = \rho_B \cdot (c^2a + 4a(h - a)(c - a))$

- (c) Volume d'eau à l'intérieur du bateau pour l'alourdir encore plus en fonction de la hauteur h' d'eau dans le bateau.

$V_{EB} = h' \cdot (c - 2a)^2$

- (d) Masse d'eau dans le bateau en fonction de la masse volumique de l'eau ρ_e

$M_{EB} = \rho_e \times V_{EB} = \rho_e \cdot h' \cdot (c - 2a)^2$

- (e) Masse totale de l'embarcation (bateau + eau à l'intérieur)

$M_{TEB} = M_B + M_{EB}$

$M_{TEB} = \rho_B \cdot (c^2a + 4a(h - a)(c - a)) + \rho_e \cdot h' \cdot (c - 2a)^2$

3. Poussée d'Archimède

- (a) Volume immergé de l'embarcation en fonction de la hauteur d'immersion i de l'embarcation.

$$V_E = c^2 \cdot i$$

- (b) Masse du même volume d'eau que le volume immergé de l'embarcation

$$M_E = \rho_E \cdot c^2 \cdot i$$

- (c) Valeur de i pour que le bateau flotte par la poussée d'Archimède

On résout l'équation d'inconnue i ci-dessous

$$\rho_E \cdot c^2 \cdot i = M_{TEB}$$

$$i = \frac{M_{TEB}}{\rho_E \cdot c^2}$$

$$\text{Soit : } i = \frac{\rho_B \cdot (c^2 a + 4a(h-a)(c-a)) + \rho_e \cdot h' \cdot (c-2a)^2}{\rho_E \cdot c^2}$$

4. Volume de l'enveloppe d'eau type pavé droit creux à base carrée de côté $c + 2b$ de hauteur $i + b$ et d'épaisseur b autour du bateau

$$V_{EE} = (c + 2b)^2 b + 4b(i + b)(c + b)$$

5. Hauteur d'eau initiale H dans le réservoir type pavé droit creux à base carrée de côté $c + 2b$ autour de l'enveloppe d'eau (sans que l'embarcation soit présente) pour que l'enveloppe d'eau finale autour du bateau soit de 1 cm

$$H = \frac{V_{EE}}{(c + 2b)^2}$$

$$H = \frac{(c + 2b)^2 b + 4b(i + b)(c + b)}{(c + 2b)^2} \text{ avec } i = \frac{\rho_B \cdot (c^2 a + 4a(h-a)(c-a)) + \rho_e \cdot h' \cdot (c-2a)^2}{\rho_E \cdot c^2}$$

Soit :

$$H = \frac{(c + 2b)^2 b + 4b \left(\frac{\rho_B \cdot (c^2 a + 4a(h-a)(c-a)) + \rho_e \cdot h' \cdot (c-2a)^2}{\rho_E \cdot c^2} + b \right) (c + b)}{(c + 2b)^2}$$

6. Application numérique

- (a) Données :

Côté du bateau : $c = 100 \text{ m}$

épaisseur du bateau : $a = 0,1 \text{ m}$

hauteur du bateau : $h = 3 \text{ m}$

hauteur d'eau dans le bateau : $h' = 2 \text{ m}$

masse volumique du matériaux du bateau en acier : $\rho_B = 7500 \text{ kg/m}^3$

masse volumique de l'eau : $\rho_E = 997 \text{ kg/m}^3$

épaisseur de la couche d'eau autour du bateau : $b = 0,01 \text{ m}$

- (b) Calculs :

- i. Volume bateau

$$V_B = c^2 a + 4a(h-a)(c-a) = 100^2 \times 0,1 + 4 \times 0,1 \times (3-0,1)(100-0,1) \simeq 1115,884 \text{ m}^3$$

- ii. Masse bateau

$$M_B = \rho_B \times V_B \simeq 7500 \times 1115,884 \simeq 8369130 \text{ kg}$$

- iii. Volume d'eau dans le bateau

$$V_{EB} = h' \cdot (c-2a)^2 = 2 \times (100-2 \times 0,1)^2 = 19920,08 \text{ m}^3$$

- iv. Masse d'eau dans le bateau

$$M_{EB} = \rho_e \times V_{EB} = 997 \times 19920,08 \simeq 19860319,76 \text{ kg}$$

- v. Masse totale de l'embarcation (bateau + eau à l'intérieur)

$$M_{TEB} = M_B + M_{EB} \simeq 8369130 + 19860319,76 \simeq 28229449,76 \text{ kg}$$

- vi. Valeur de i pour que le bateau flotte par la poussée d'Archimède

$$i = \frac{M_{TEB}}{\rho_E \cdot c^2} \simeq \frac{28229449,76}{997 \times 100^2} \simeq 2,8314 \text{ m}$$

vii. Volume de l'enveloppe d'eau type pavé droit creux à base carrée de côté $c + 2b$ de hauteur $i + b$ et d'épaisseur b autour du bateau

$$V_{EE} = (c+2b)^2 b + 4b(i+b)(c+b) \simeq (100+2 \times 0,01)^2 \times 0,01 + 4 \times 0,01(2,8314+0,01)(100+0,01) \simeq 111,4067 \text{ m}^3$$

viii. Hauteur d'eau initiale H dans le réservoir type pavé droit creux à base carrée de côté $c + 2b$ autour de l'enveloppe d'eau (*sans que l'embarcation soit présente*)

$$H = \frac{V_{EE}}{(c+2b)^2} \simeq \frac{111,4067}{(100+2 \times 0,01)^2} \simeq 0,011136 \text{ m}$$

des erreurs ?