FICHE METHODE sur les EQUATIONS de DEGRE DEUX

I) A quoi sert une équation de degré 2 ?

Exemples :

① *Je veux une piscine carrée d'aire égale à 40m² !*
Quelle doit-être la mesure du coté du carré ? $\boxed{x^2 = 40}$

② *Ce mois ci, l'entrée était à 20 euros et il y a eu 500 entrées de vendues !*
Chaque mois, le nombre de clients diminue de 10 et le prix de l'entrée augmente de un euro !
Dans combien de temps la recette des ventes sera t-elle de 0 euros ? 10000 euros ? 12000 euros ?
$\boxed{(500 - 10x)(20 + x) = 0}$; $\boxed{(500 - 10x)(20 + x) = 10000}$; $\boxed{(500 - 10x)(20 + x) = 12000}$.

③ *Je veux un jardin rectangulaire dont la longueur est de 10m plus grande que la largeur et dont l'aire est de 100m² ! cela existe t-il ? :* $\boxed{x(x + 10) = 100}$

④ *Une Pierre qui tombe dans le vide, se trouve après x secondes à la distance* $d(x) = 5x^2$ *.*
Combien de temps mettra t-elle avant de se trouver à 100m ? $\boxed{5x^2 = 100}$

b) Remarques :

Les situations de la vie où l'on peut-être amené à chercher un nombre inconnu à partir de nombres connus sont innombrables (bricolage, comptabilité, achats, …).
Parfois, on trouve facilement la solution, m**ais, dans certains cas**, on ne peut pas trouver directement la solution par un simple calcul, on n'arrive pas à poser une opération qui donnerait le nombre cherché !
Parfois même, il est impossible de trouver la solution par essais successifs, on n'arrive pas à trouver avec plusieurs essais le nombre inconnu ! tout simplement parce qu'il n'y a pas de solution au problème ! ou bien parce que ce nombre « résiste » (par exemple si ce nombre n'est pas un nombre entier ou décimal, si le nombre cherché était $\sqrt{32}$! qu'est ce qui ferait penser à « essayer » avec ce nombre ?)
Il faut donc savoir que dans certains cas, il n'est pas possible de trouver le nombre inconnu par simple calcul numérique ! (avec des nombres uniquement !)
On TRADUIT alors, si possible le problème en une EQUATION où le nombre inconnu que l'on cherche est en général appelé « x » ; Puis on résout l'équation obtenue selon les méthodes algébriques connues (s'il existe des méthodes pour l'équation en question !) et, si l'équation est résolue on vérifie que le nombre trouvé convient et si tel est le cas, on a achevé nôtre problème !
Les équations peuvent permettent de résoudre des problèmes que l'on ne peut pas résoudre simplement « de tête », mais il faut alors **apprendre à traduire un problème en équation**, puis apprendre à **résoudre les équations les plus fréquentes** !
Les équations qui nous intéressent ici sont les équations que l'on appelle équation de degré 2 !
Ce qui suit donne les résultats à connaître et à savoir appliquer pour les résoudre !

II) Qu'est ce qu'une équation du second degré ?

Définition 1 : (EQUATION DU SECOND DEGRE).

Une **équation du second degré est une équation de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$**
Où : a,b et c sont trois réels donnés et connus avec $a \neq 0$ et x est un réel inconnu

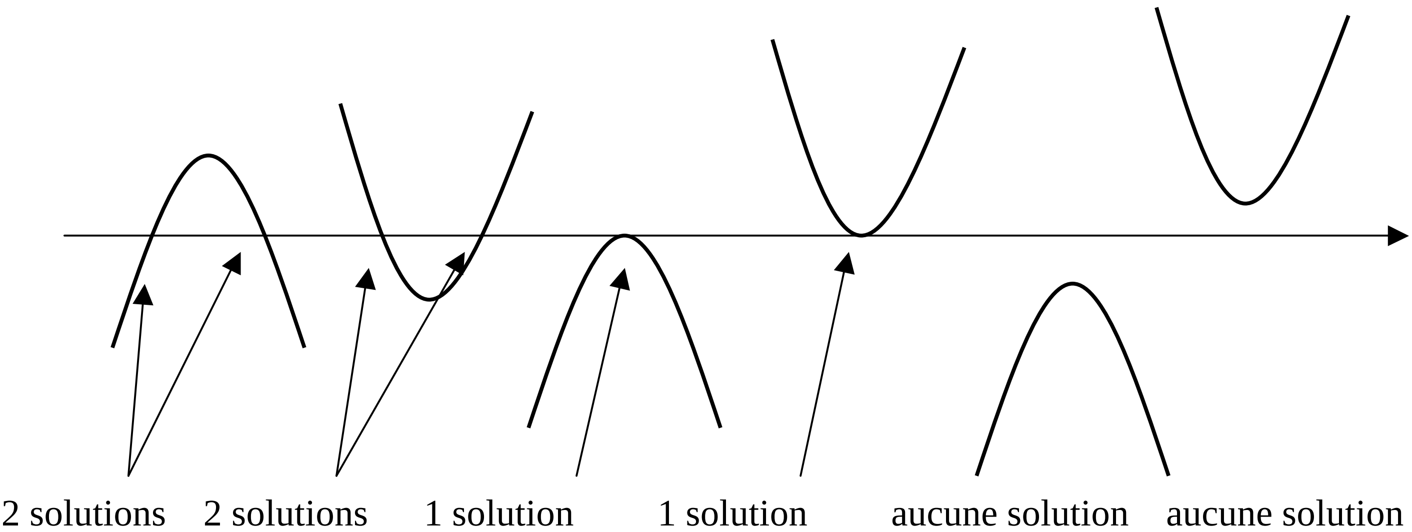
Exemples : ① $3x^2 + 4x + 6 = 0$ ici $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$ ② $x^2 - 5x = 0$ ici $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}$

③ $-x^2 + 5 = 0$ ici $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$

Remarques : • Si on considère la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où : a,b et c sont 3 réels donnés et connus avec $a \neq 0$ et x est un réel inconnu.

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à trouver (s'il y en a) les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe (ox) des abscisses.

Si on admet (provisoirement) que la courbe de f est nécessairement une parabole d'axe « vertical »
on a alors les cas suivants



→ Sous ces conditions, une équation de degré 2, admet ou bien aucune solution ou bien une seule solution, ou bien 2 solutions selon la position de la parabole par rapport à l'axe (ox).

Ce qui suit donne les méthodes de résolution algébrique, la résolution graphique ne donnant la plupart du temps que des valeurs approchées des solutions s'il y en a .

III) Propriétés des équations du second degré ?

On distingue 3 cas selon les valeurs de a,b et c.

A) 1er cas : $b = 0$ l'équation est donc de la forme $ax^2 + c = 0$

Exemples :

① Résoudre l'équation $\boxed{2x^2 - 32 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

L*e domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 32 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = 32 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{32}{2} = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16} \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

$4 \in D$ et $-4 \in D$ donc $\boxed{S = \{-4 ; 4\}}$.

(il y a deux solutions)

② Résoudre l'équation $\boxed{x^2 + 16 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

L*e domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$$\begin{aligned} & x^2 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = -16 \end{aligned}$$

. *Il n'y a pas de solution dans ℝ car le carré d'un réel ne peut-être égal à -16 qui est négatif (le carré d'un réel est positif ou nul)*

donc $\boxed{S = \varnothing}$.

---

③ Résoudre l'équation $\boxed{3x^2 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

L*e domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$$\begin{aligned} & 3x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{0}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \end{aligned}$$

$0 \in D$ donc $\boxed{S = \{ 0 \}}$.

(il y a une seule solutions)

④ Résoudre l'équation $\boxed{x^2 - 6 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

L*e domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$$\begin{aligned} & x^2 - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

$\sqrt{6} \in D$ et $-\sqrt{6} \in D$ donc $\boxed{S = \{ \sqrt{6} ; -\sqrt{6} \}}$.

(il y a deux solutions)

On isole x^2 puis on utilise la propriété suivante :

■ Propriété 1 : (élimination d'un carré)

Soit l'égalité $x^2 = a$ où a est un nombre réel connu et x un nombre réel inconnu.
On distingue ***3 cas*** :

Si $\boxed{a > 0}$ (a est positif) alors $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$ (2 solutions)

Si $\boxed{a = 0}$ (a est nul) alors $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ (une solution, égale à 0)

Si $\boxed{a < 0}$ (a est négatif) alors $x^2 = a$ n'a pas de solution dans ℝ. (pas de solution dans ℝ)

Preuve : (Admis)

B) $2^{ème}$ cas : $c = 0$ l'équation est donc de la forme $ax^2 + bx = 0$

Exemples :

① Résoudre $\boxed{x^2 + 4x = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Le *domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$x^2 + 4x = 0$ ***(on met x en facteur)***

$\Leftrightarrow x(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x \ 4 = -4$

$2 \in D$ et $-4 \in D$

donc $\boxed{S = \{ 0 ; -4 \}}$.

(un produit est nul si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul).

L'équation a deux solutions sur D

② Résoudre $\boxed{3x^2 - 4x = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Le *domaine de définition de l'équation est*
D = ℝ (il n'y a pas de valeur interdite)

$3x^2 - 4x = 0$ ***(on met x en facteur)***

$\Leftrightarrow \quad x(3x - 4) = 0$

$x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 3x = 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{4}{3}$

$0 \in D$ et $\dfrac{4}{3} \in D$

donc $\boxed{S = \{0 ; \dfrac{4}{3}\}}$.

(un produit est nul si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul).

L'équation a deux solutions sur D

On met x en facteur puis on utilise la propriété suivante :

■ Propriété 2 *(produit nul)*

> « un **produit de facteurs est nul** » équivaut à « **l'un ou l'autre des facteurs est nul** »
> $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

C) $3^{ème}$ cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ donc $ax^2 + bx + c = 0$

Exemples :

①Résoudre $\boxed{-2x^2 - 4x + 16 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

. $-2x^2 - 4x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 - 4x + 16}{-2} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2}{-2} + \dfrac{-4x}{-2} + \dfrac{16}{-2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\times1x + 1^2 - 1^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{9} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow x + 1 = 3 \text{ ou } x + 1 = -3$

$\Leftrightarrow x = 3-1 = 2 \text{ ou } x = -3 - 1 = -4$

donc $\boxed{S = \{-4 ; 2 \}}$.

L'équation a 2 solutions sur D

②Résoudre $\boxed{3x^2 + 18x + 30 = 0}$

$3x^2 + 18x + 30 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2 + 18x + 30}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{3} + \dfrac{18x}{3} + \dfrac{30}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\times3x + 3^2 - 3^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = -1$

donc il n'y a pas de solution dans ℝ.

donc $\boxed{S = \varnothing}$.

③ $\boxed{5x^2 - 20x + 20 = 0}$

$5x^2 - 20x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x^2 - 20x + 20}{5} = \dfrac{0}{5} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x^2}{5} + \dfrac{-20x}{5} + \dfrac{20}{5} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\times2x + 2^2 - 2^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

donc $\boxed{S = \{ 2 \}}$.

L'équation a une seule solution.

Cas général :

$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$	
$\Leftrightarrow \dfrac{ax^2 + bx + c}{a} = \dfrac{0}{a} = 0$	*On divise par $a \neq 0$*
$\Leftrightarrow \dfrac{ax^2}{a} + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$	*On « coupe » la fraction*
$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$	*On simplifie*
$\Leftrightarrow x^2 + 2\times\dfrac{b}{2a}x + (\dfrac{b}{2a})^2 - (\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{c}{a} = 0$	*On fait apparaître le carré parfait*
$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{4ac}{4a^2} = 0$	*On factorise le carré parfait et met le reste au même dénominateur*
$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$	
$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	*On distingue 3 cas selon $b^2 - 4ac$ ($4a^2$ est positif)*

Si $b^2 - 4ac = 0$

$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \dfrac{b}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc il n'y a qu'une seule solution $-\dfrac{b}{2a}$ si $b^2 - 4ac = 0$

Si $b^2 - 4ac < 0$

$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ = nombre négatif

$\Leftrightarrow$ Pas de solution dans $\mathbb{R}$ si $b^2 - 4ac < 0$ car le carré d'un réel est positif

Si $b^2 - 4ac > 0$

$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$\Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a}) = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ ou $(x + \dfrac{b}{2a}) = -\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Donc il y a deux solution si $b^2 - 4ac > 0$

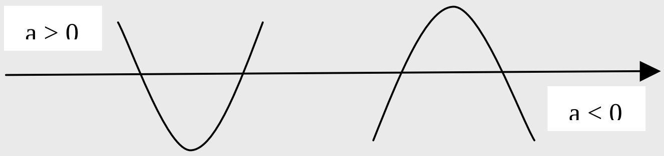
■ Propriété 3 : *(factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ et équation du second degré).*

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où x est un réel inconnu , a,b et c trois réels connus avec $a \neq 0$..

Soit $\boxed{\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}}$ (« delta » , appelé le « discriminant » de l'équation)

On distingue ***3 cas*** selon la valeur de Δ :

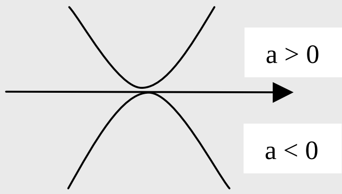
• Si $\boxed{\Delta > 0}$ (positif) alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **2 solutions** x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$,
et on a une des 2 courbes et les valeurs des solutions (des racines) suivantes :



Les **2 solutions** sont $\boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$; $\boxed{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$

• Si $\boxed{\Delta = 0}$ (nul) alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **une seule solution** x_0 dans $\mathbb{R}$,
et on a une des 2 courbes et la valeur de la solution suivante

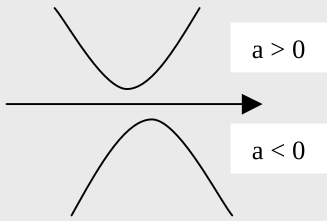
La solution est $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$



• Si $\boxed{\Delta < 0}$ (négatif)

alors l'équation n'admet **aucune solution dans $\mathbb{R}$**

et on a une des 2 courbes suivantes.



Preuve : ci dessus..

① Résoudre $\boxed{-x^2 - 2x + 8 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 8 \end{cases}$

donc $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times(8) = 36$.

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions.

$x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{36}}{2\times(-1)} = -4$.

$x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{36}}{2\times(-1)} = 2$.

donc $\boxed{S = \{-4 ;\ 2\}}$.

L'équation a 2 solutions

② Résoudre $\boxed{x^2 + 2x + 8 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 8 \end{cases}$

donc $\Delta = (2)^2 - 4\times(1)\times(8) = -28$.

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

donc $\boxed{S = \varnothing}$.

L'équation n'a pas de solutions

③ $\boxed{\text{Résoudre } x^2 - 2x + 1 = 0}$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times(1)\times(1) = 0$.

$\Delta = 0$ donc il y a une seule solution.

$x_0 = \dfrac{-(-2)}{2\times(1)} = 1$.

donc $\boxed{S = \{ 1 \}}$.

L'équation a une solution

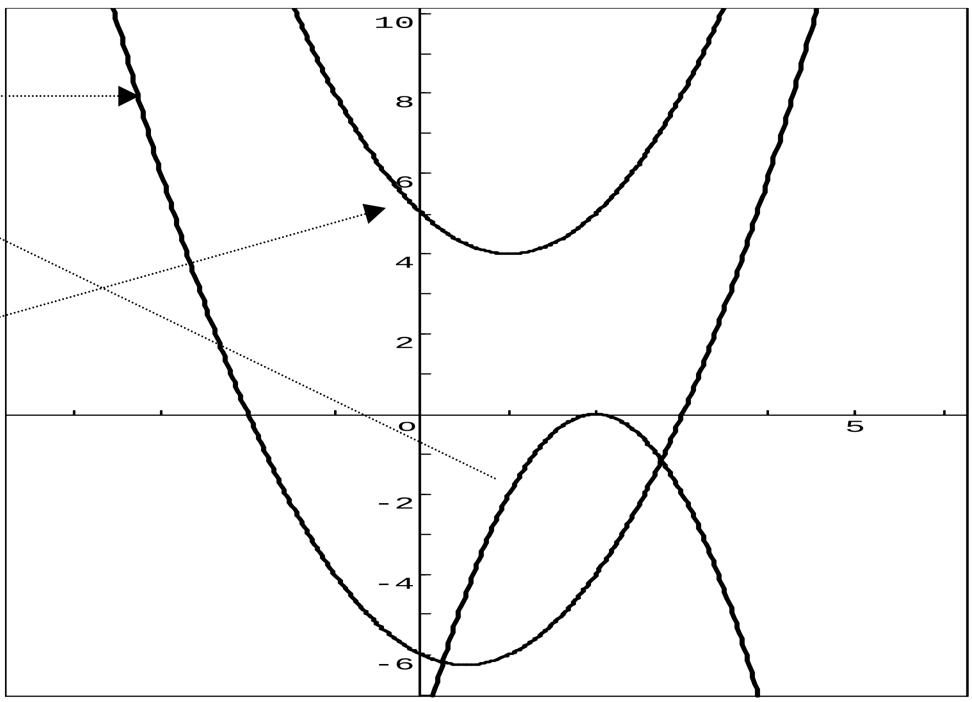
$\boxed{\text{EXERCICES}}$ EQUATIONS du SECOND DEGRE

- **Exercice 1 :** On a représenté (partiellement) les courbes (paraboles) correspondant aux équations réduites données ci dessous.

(p_1) : $y = x^2 - x - 6$

(p_2) : $y = -2x^2 + 8x - 8$

(p_3) : $y = x^2 - 2x + 5$



Soient les équations :

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $-2x^2 + 8x - 8 = 0$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

Résoudre graphiquement chacune des équations précédentes en donnant une valeur approchée de chaque solution à 0,1 près (si elle existe) et vérifier par le calcul.

- **<u>Exercice 2 :</u>** Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $x^2 = 1000$ b) $4x^2 - 5 = 23$ c) $3x^2 + 5 = 5$

- **<u>Exercice 3 :</u>** Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $3x^2 + 4x = 0$ b) $4x^2 + 2x = 5x$ c) $5x^2 + 8 = 10x + 8$

- **<u>Exercice 4 :</u>** Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $3x^2 + 6x + 3 = 0$ c) $4x^2 + x - 8 = 0$.

- **<u>Exercice 5 :</u>**

a) Résoudre l'équation $\mathbf{-10x^2 + 120x - 240 = 0}$

b) Résoudre le problème suivant et donner une phrase de conclusion.

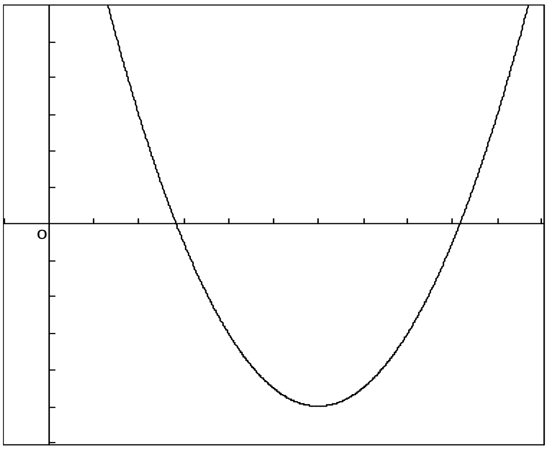
« S'il vend ses « sandwiches - boissons » 10 euros
alors il en vend 200 dans la journée et à chaque fois qu'il augmente le prix
de 1 euro alors il en vend 10 de moins !
de combien doit il augmenter le prix pour faire une recette de 2240 euros »

(On pourra appeler x la variation de prix cherchée et montrer que le problème se traduit en une équation qui se ramène à l'équation précédente du a))

- **<u>Exercice 6 :</u>**

On a représenté (en partie) la parabole d'équation réduite :

$$\mathbf{y = x^2 - 12x + 26}$$



a) Résoudre graphiquement l'équation $\mathbf{x^2 - 12x + 26 = 0}$ **à 0,1 près** (justifier)

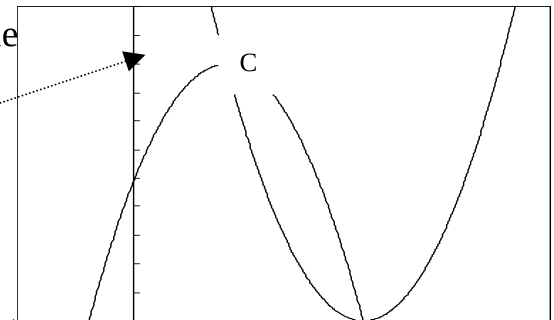
b) Déterminer par calcul les valeurs exactes des solutions de l'équation précédente puis de valeurs approchées à 0,01 près.

c) Donner les coordonnées des point A et B, points intersections de la parabole avec l'axe (Ox) du repère.

- **<u>Exercice 7 :</u>** On considère les 2 paraboles représentées en partie Ci contre et dont les équations réduites sont :

$y = x^2 - 10x + 32$

$y = -x^2 + 4x + 12$



a) Les 2 paraboles se coupent en 2 points C et D
Déterminer graphiquement à 0,1 près les coordonnées
de chacun de ces 2 points.

D

b) Résoudre par calcul l'équation : **$x^2 - 10x + 32 = -x^2 + 4x + 12$**
en donnant les valeurs exactes des solutions
En déduire les valeurs exactes des coordonnées des 2 points C et D.

- **<u>Exercice 8 :</u>**

Soit l'équation (E) $x^3 - 13x + 12$ (équation de degré trois)

a) Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation (E') : $(x^2 + x - 12)(x - 1) = 0$
b) Résoudre l'équation (E')
c) Donner les solutions de l'équation (E)

- **<u>Exercice 9 :</u>**

Soit l'équation (E) $2x^4 - 18x^2 + 40 = 0$ (équation de degré quatre)

a) On pose $X = x^2$, montrer que l'équation (E) équivaut alors à l'équation (E') : $X^2 - 9X + 20 = 0$
b) Résoudre l'équation (E')
c) Donner les solutions de l'équation (E)