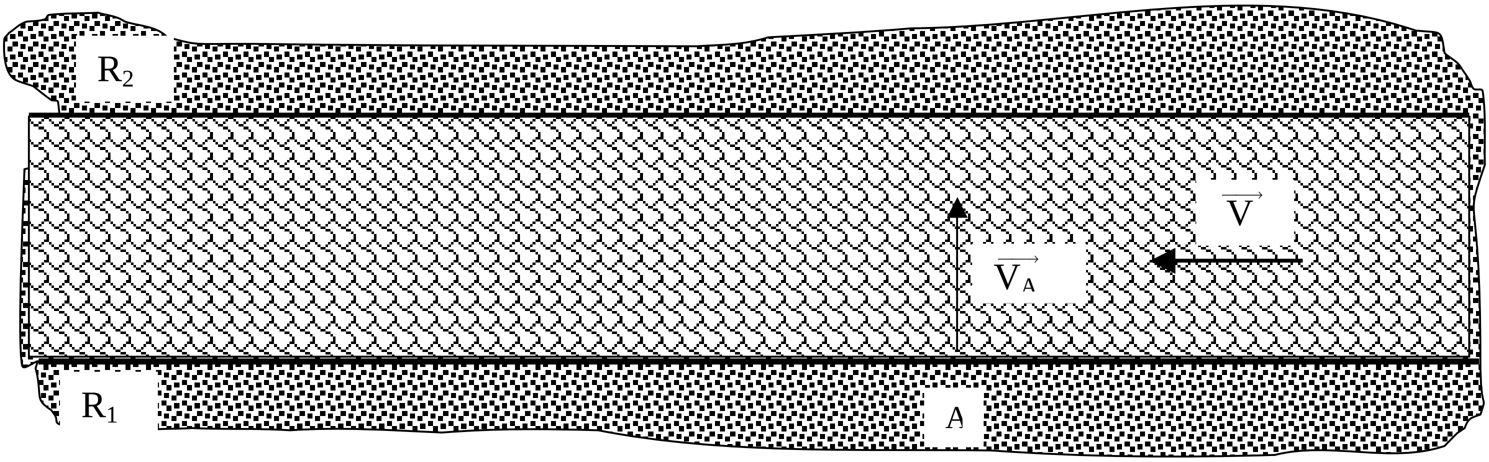
FICHE METHODE sur la GEOMETRIE VECTORIELLE

I) A quoi sert la géométrie vectorielle ?

Exemples :

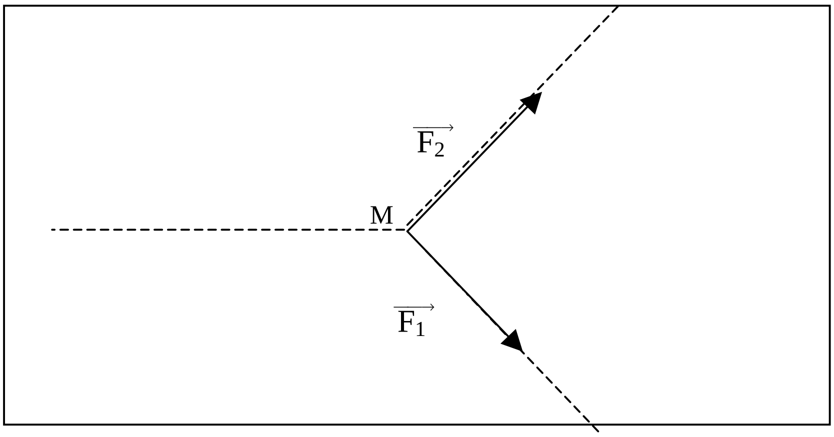
①La **vitesse du courant** est représentée par le vecteur $\overrightarrow{V}$,celle du nageur A par rapport à l'eau $\overrightarrow{V_A}$.



En quel point B de la rive R_2 le nageur A va t-il arriver ?

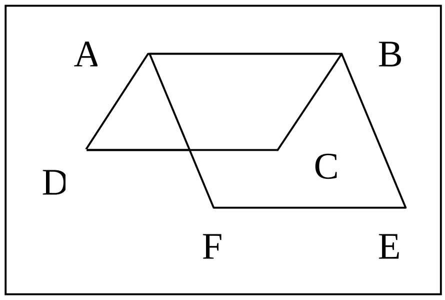
② 3 cordes sont liées au point M.
2 tireurs T1 et T2 exercent les forces représentées par $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.

Représenter la force $\overrightarrow{F_3}$ que doit exercer Le 3ème tireur T3 pour « équilibrer » les 2 autres.



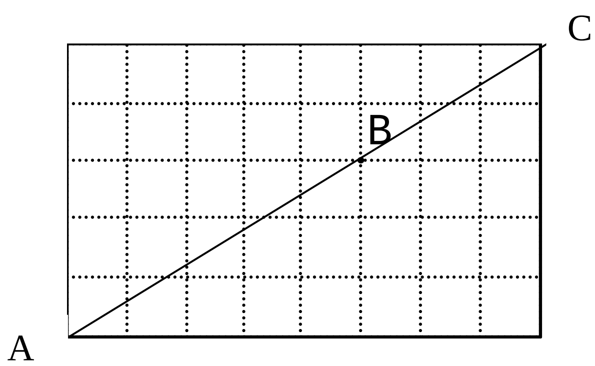
③ ABCD et ABEF sont des parallélogrammes !

Que semble t-il pour DCEF ?



④ Le quadrillage ci contre est régulier !

Que semble t-il pour les points Les points A, B et C ?



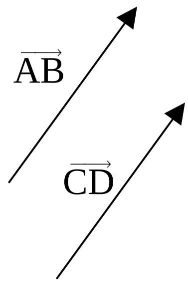
b) Remarques :

De nombreux *phénomènes naturels* sont caractérisés par la combinaison de ***trois choses***, qui sont une « ***direction*** », un « ***sens*** » selon cette direction et une « ***intensité*** ». Par exemple, un train qui roule selon la direction « Paris-Lille », dans le sens « Lille vers Paris », à la vitesse de 300 $km.h^{-1}$. Une goutte d'eau qui tombe selon la direction « verticale » dans le sens « haut-bas » à la vitesse de 10 $m.s^{-1}$. Une force d'attraction exercée par le soleil sur la terre selon la direction de la droite joignant le centre de la terre et celui du soleil, dans le sens « terre vers soleil » et avec l'intensité $F = 6{,}67.10^{-24} \times \dfrac{\text{masse terre} \times \text{masse soleil}}{(\text{ distance terre soleil})^2}$ *(loi de Newton)* .

Chacun de ces phénomènes peut être représenté par une « flèche » appelée « vecteur ».
Ce vecteur ayant une certaine direction, un certain sens, et une certaine longueur (représentant l'intensité du phénomène). On peut ainsi énoncer beaucoup de loi naturelles en utilisant la notion de vecteurs. Les mathématiciens utilisent aussi les vecteurs, car ils permettent de raccourcir la longueur des démonstrations, en effet, dire de deux vecteurs qu'ils sont égaux, c'est dire 3 choses en une seule (même direction, même sens et même longueur). Les vecteurs permettent aussi de transformer des problèmes de raisonnement de géométrie en des problèmes de calculs avec des vecteurs ce qui parfois simplifie la tache. Finalement, les vecteurs permettent de concevoir les repères dans lesquels ont peut associer des coordonnées à chaque point et ainsi ramener un problème de géométrie à un problème de calcul sur des nombres !
Ainsi, les vecteurs servent aussi bien aux physiciens à exprimer des lois naturelles qu'aux Mathématiciens à exprimer des propriétés, des théorèmes et à faire des démonstration.
Les vecteurs permettent de résoudre des problèmes de géométrie par des calculs avec des vecteurs ou avec des nombres.
Il faut alors apprendre quelques définitions et propriétés pour utiliser cet outil.

II) Qu'est ce que la géométrie vectorielle ?

Définition 1 : **(EGALITE DE 2 VECTEURS DU PLAN)**



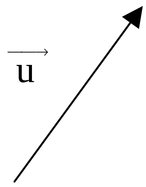
Soient A,B,C et D quatre points distincts du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ***égaux*** équivaut à (3 choses)

_ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont ***même direction*** *(les droites (AB) et (CD) sont parallèles).*
_ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont ***même sens.***
_ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont ***même longueur.*** *(AB = CD)*

- On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
  et on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux ***représentants*** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

- $\overrightarrow{AB}$ est le ***représentant d'origine A*** et ***d'extrémité B***.



Définition 2 : **(VECTEUR NUL)**

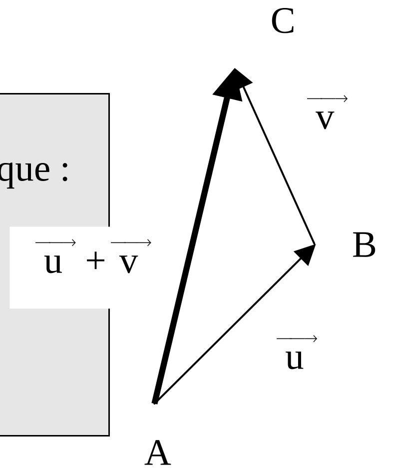
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$.
Si A et B sont confondus (A = B) alors on dit que $\overrightarrow{u}$ est le ***vecteur nul***
et on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ équivaut à A = B.

Exemples : ① $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$ ② $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$

<u>Définition 3 :</u> (NORME D' UN VECTEUR)

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.
La **norme** du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$ (« norme de u ») et est égale à la longueur AB.

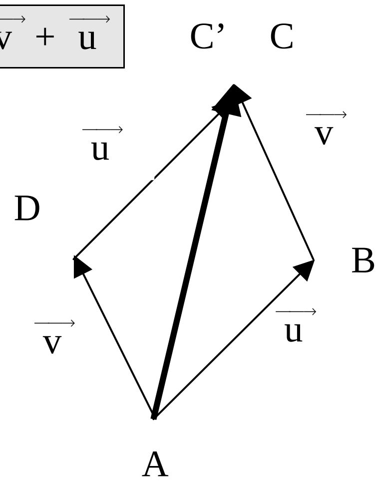
<u>Définition 4 :</u> (SOMME DE DEUX VECTEURS)



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ et tel que :
A étant un point du plan.
B et C étant deux points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$
On a : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On a donc pour tous les points A,B et C du plan $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$
(appelée relation de Chasles)

<u>Propriété 1 :</u> (COMMUTATIVITE DE L'ADDITION).

Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

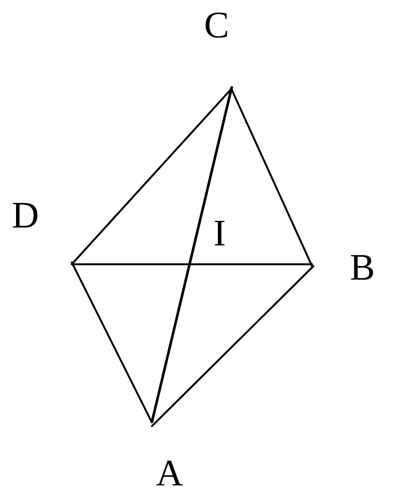


<u>Preuve :</u>
Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$
D et C' tels que $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{DC'} = \vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC'}$
Montrons que C = C' .
On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$
Donc : BC = AD et les segments [BC] et [AD] sont parallèles.
Donc ABCD est un parallélogramme.
De même on montre que ABC'D est un parallèlogramme
Conclusion : C = C' et $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

<u>Remarque :</u> Dans le parallélogramme ABCD on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

<u>Propriété 2 :</u> (VECTEUR ET PARALLELOGRAMME).

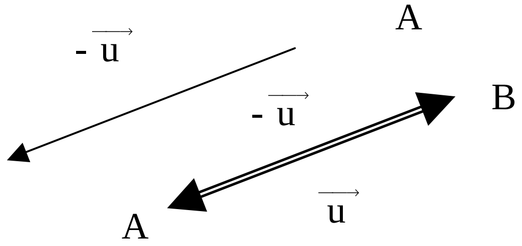
Les cinq phrases suivantes sont équivalentes :
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2) ABDC est un parallélogramme.
3) [AD] et [BC] ont même milieu.
4) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



<u>Preuve :</u> ***(admis)***

<u>Définition 4 :</u> (OPPOSE D' UN VECTEUR)

Soit un vecteur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.
L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$
et dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.



<u>Remarque :</u> $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même direction, même norme, mais ont des ***sens opposés***.

Propriété 3 : **(SOMME DE VECTEURS OPPOSES).**

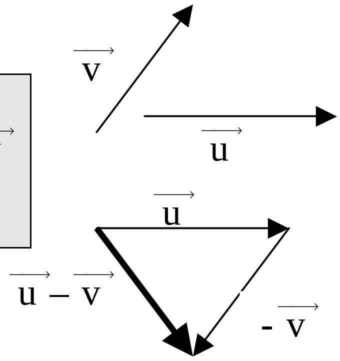
> Quel que soit le vecteur $\vec{u}$ on a : $\boxed{\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}}$

Preuve :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$, on a $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ***C.Q.F.D.***

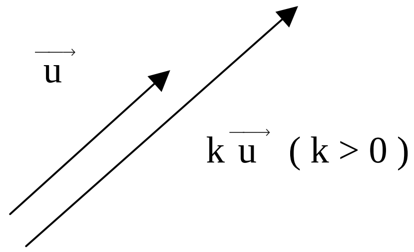
Définition 5 : **(DIFFERENCE DE DEUX VECTEURS)**

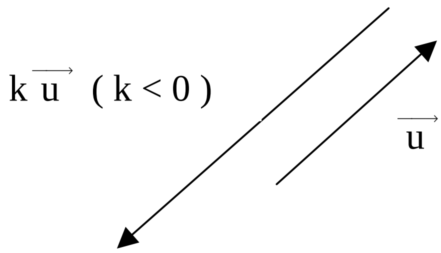
> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
> On appelle différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$
> tel que : $\boxed{\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})}$



Définition 6 : **(MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UNNOMBRE)**

> Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
> On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k ,
> le vecteur noté $k\vec{u}$ et défini par :
>
> • Si $\vec{u} = \vec{0}$ Alors $k\vec{u} = \vec{0}$
>
> • Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$ Alors $k\vec{u}$ a :
> _Pour direction : la direction de $\vec{u}$
> _Pour sens : le sens de $\vec{u}$
> _Pour norme : le produit $k\,\|\vec{u}\|$.
>
> • Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$ Alors $k\vec{u}$ a :
> _Pour direction : la direction de $\vec{u}$
> _Pour sens : le sens opposé à celui de $\vec{u}$
> _Pour norme : le produit $k\,\|\vec{u}\|$.





Remarques :

On a : $1\vec{u} = \vec{u}$; $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$; $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.

Propriété 4 : **(CALCUL VECTORIEL).**

> Quel que soit les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les réels k et k' on a :
> 1) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
> 2) $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
> 3) $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
> 4) $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Preuve : *(admis)*

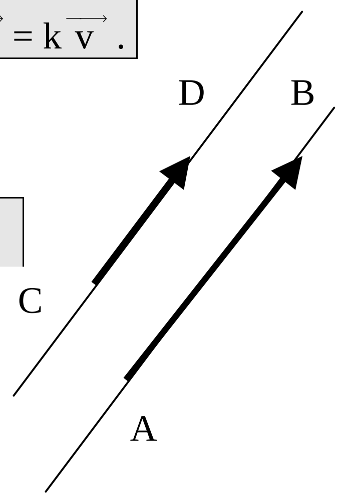
Exemples : ① $3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{AC}$ ② $3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} = (3 + 5)\overrightarrow{AB} = 8\overrightarrow{AB}$.

③ $2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \left(2\,\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

Définition 6 : **(VECTEURS COLINEAIRES)**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si :
Ou bien l'un des deux vecteurs est nul
Ou bien ni $\overrightarrow{u}$, ni $\overrightarrow{v}$ n'est nul et il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Propriété 5 : **(PARALLELISME DE DEUX DROITES).**



Soient A, B, C et D quatre points avec A ≠ B et C ≠ D.
Soient les deux droites (AB) et (CD). .
(AB) et (CD) sont parallèles équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

Preuve :

• Supposons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas nul car A ≠ B et C ≠ D donc
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

• Réciproquement : Supposons que (AB) et (CD) soient parallèles.
.Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont donc même direction.
.Distinguons 2 cas :

<u>Cas 1 :</u> Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens :

Posons le nombre $k = \dfrac{AB}{CD}$ et considérons le vecteur $\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CD}$.

$\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a même direction que $\overrightarrow{CD}$, même sens que $\overrightarrow{CD}$ et il a pour norme $\dfrac{AB}{CD} \times CD = AB$

$\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a même direction, même sens et même norme que $\overrightarrow{AB}$ donc il est égal à $\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{AB} = \dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CD}$ (il existe bien un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$)

<u>Cas 2 :</u> Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont des sens contraires :

Posons le nombre $k = -\dfrac{AB}{CD}$ et considérons le vecteur $-\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CD}$.

$-\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a même direction que $\overrightarrow{CD}$ donc même direction que $\overrightarrow{AB}$.

$-\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a un sens contraire à celui de $\overrightarrow{CD}$ donc même sens que $\overrightarrow{AB}$

$-\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a pour norme $\dfrac{AB}{CD} \times CD = AB$

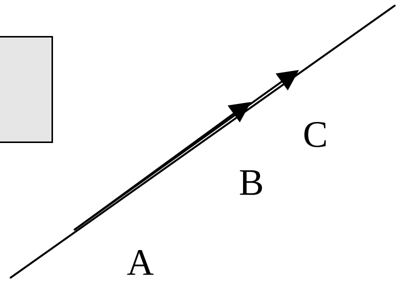
$-\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$ a même direction, même sens et même norme que $\overrightarrow{AB}$ donc il est égal à $\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{AB}{CD}\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CD}$ (il existe bien un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$).

Dans les deux cas il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

C.Q.F.D.

<u>Propriété 6 :</u> (ALIGNEMENT DE TROIS POINTS).



> Soient A, B et C trois points avec $A \neq B$ et $A \neq C$.
> A, B et C sont alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

<u>Preuve :</u>

- Supposons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas nul car $A \neq B$ et $A \neq C$ donc
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
ont même direction, donc (AB) et (AC) sont parallèles or A appartient aux deux droites donc les deux droites sont confondues et A,B et C sont bien alignées.

- Réciproquement : Supposons que A,B et C soient alignées.

Les droite (AB) et (AC) sont donc confondues donc parallèles.
Donc, d'après la propriété 5, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. ***C.Q.F.D.***