FICHE METHODE sur les PROBABILITES

I) A quoi servent les probabilités

a) Exemples :

①. On lance une pièce de un euro !

Quelle est la probabilité de faire Pile ? $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

②. On jette un dé à 8 faces numérotées de 1 à 8 !

Quelle est la probabilité de faire 2 points ? $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

③. On choisit au hasard un élève dans un groupe de 8 filles et 12 garçons !

Quelle est la probabilité de choisir une fille ? $\frac{8}{20} = 0{,}4 = 40\%$

b) Remarques :

Le monde dans lequel nous vivons n'est pas prévisible à 100% ! On ne peut connaître le temps qu'il fera dans un mois ! On ne peut savoir quels seront les numéros gagnants du prochain tirage du loto !…. Cependant, on peut constater que même le hasard respecte certaines lois et c'est l'objet de ce qui suit.

II) Qu'est ce qu'une probabilité ?

Définition 1 : (EXPERIENCE ALEATOIRE)

Une expérience est **ALEATOIRE** si
- **on connaît** chacun des résultats possibles
- **on ne connaît pas** le résultat qui va arriver à l'avance.

Exemples :

1) Lancer un dé
2) Lancer une pièce
3) Choisir au hasard une carte
4) Choisir un élève au hasard

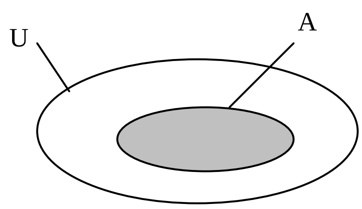
Définition 2 : (UNIVERS)

L'**ensemble** constitué des **résultats** (*des **issues** ou **événements élémentaires***) d'une expérience aléatoire est appelé l'**UNIVERS** de l'expérience aléatoire et en général

Exemples : 1) Pour le lancé d'un dé (à 6 faces numérotées) U = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }
2) Pour le lancé d'une pièce U = { PILE . FACE }

Définition 3 : (EVENEMENT)

Un sous-ensemble A de l'univers U est un **EVENEMENT** .
(c'est une partie de l'univers) on note $A \subset U$.



Exemples : 1) Pour le lancé d'un dé : {2 ; 4 ; 6 } « Obtenir un nombre pair » est un événement.
2) Pour le choix d'une carte dans un jeu usuel de 32 : {As de cœur ; As de carreau } est un événement.

Définition 4 : (FREQUENCE THEORIQUE dans le cas de L'EQUIPROBABILITE)

Soit U un univers et $A \subset U$ un événement de U.

- Si chacun des résultats de l'expérience aléatoire n'a **ni plus ni moins de chances** de se produire que chacun des autres résultats, on dit que l'on est en situation d'**équiprobabilité.**
- Dans le cas de l'**équiprobabilité,** la **fréquence théorique** d'un événement A notée $f_T(A)$ *(aussi appelée la probabilité de l'événement)* est égale à : $\boxed{f_T(A) = \frac{n_A}{n_U} = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif de U}}}$

Exemples :

1) Si on jette une pièce : U= {pile, face} et $\begin{cases} \text{fréquence théorique de "pile"} = \frac{1}{2} = 0,5 \\ f_T(\text{face}) = \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases}$

2) Si on lance un dé à 8 faces :

U = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8} et $\begin{cases} f_T(1) = \frac{1}{8} = 0,125 \\ f_T(\text{pair}) = \frac{4}{8} = 0,5 \\ f_T(\text{au moins 6 points}) = \frac{3}{8} = 0,375 \end{cases}$

Définition 5 : (ECHANTILLON de TAILLE n)

Si on **répète n fois une même expérience aléatoire**, on obtient une **série statistique** de n valeurs que l'on appelle un « **échantillon de taille n** » de l'expérience aléatoire.

Exemples :

1) On jette 10 fois une pièce et on obtient l'échantillon : { P,P,P,P,F,F,P,F,P,F } de taille 10.
2) On lance 5 fois un dé à 8 faces et on obtient l'échantillon : {6,1,3,6,8} de taille 5.

Définition 6 : (DISTRIBUTION DES FREQUENCES PRATIQUES)

Pour un échantillon de taille n donné, **l'ensemble des fréquences pratiques** de chacun des résultats est appelé la **distribution des fréquences pratiques.**

La **fréquence pratique d'un résultat** A est notée $f_P(A)$ définie par le nombre suivant :

$$\boxed{f_P(A) = \frac{\text{nombre de fois où l'on obtient le résultat A}}{\text{taille de l'échantillon (= n)}}}$$

Le tableau des fréquences obtenu est appelé **« tableau d'échantillonnage »**

Exemples :

1) Pour l'échantillon : {P,P,P,P,F,F,P,F,P,F} de taille 10.

On a : $\begin{cases} \text{fréquence pratique de « P »} = \frac{6}{10} = 0,6 \\ f_P(F) = \frac{4}{10} = 0,4 \end{cases}$

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,6	0,4	1

2) Pour l'échantillon : {6,1,3,6,8} de taille 5 :
On a le tableau d'échantillonnage suivant :

Résultat	1	3	6	8	Total
Fréquence	0,2	0,2	0,4	0,2	1

III) Propriétés fondamentales des probabilités.

Remarque 1 : (FLUCTUATIONS D'ECHANTILLONNAGE)

Pour une expérience aléatoire donnée :
Les tableaux d'échantillonnages de deux échantillons de **même taille** sont pratiquement toujours **différents.**
On appelle ce phénomène la « **fluctuation d'échantillonnage** ».

Exemples :

On jette 10 fois une pièce et on obtient les 2 échantillons :
{P,P,P,P,F,F,P,F,P,F} et {F,F,P,P,P,F,F,F,F,F} de taille 10.

On a donc les 2 tableaux d'échantillonnages différents:

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,6	0,4	1

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,3	0,7	1

THEOREME 1 : (LOI DES GRAND NOMBRES) ***(admis)***

Pour une expérience aléatoire donnée :
1) Plus la **taille de l'échantillon est grande** (plus n est grand) et plus les **fluctuations d'échantillonnages sont petites.**
2) Plus la taille de **l'échantillon est grande** (plus n est grand) et plus les **fréquences pratiques** f_P sont **proches des fréquences théoriques f_T.**

Exemples :

1) On lance une pièce de plus en plus de fois et on observe les fréquences pratiques :

n = 10 lancers

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,6	0,4	1

n = 100 lancers

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,42	0,58	1

n = 1000 lancers

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,482	0,518	1

n = 10000 lancers

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,4915	0,5085	1

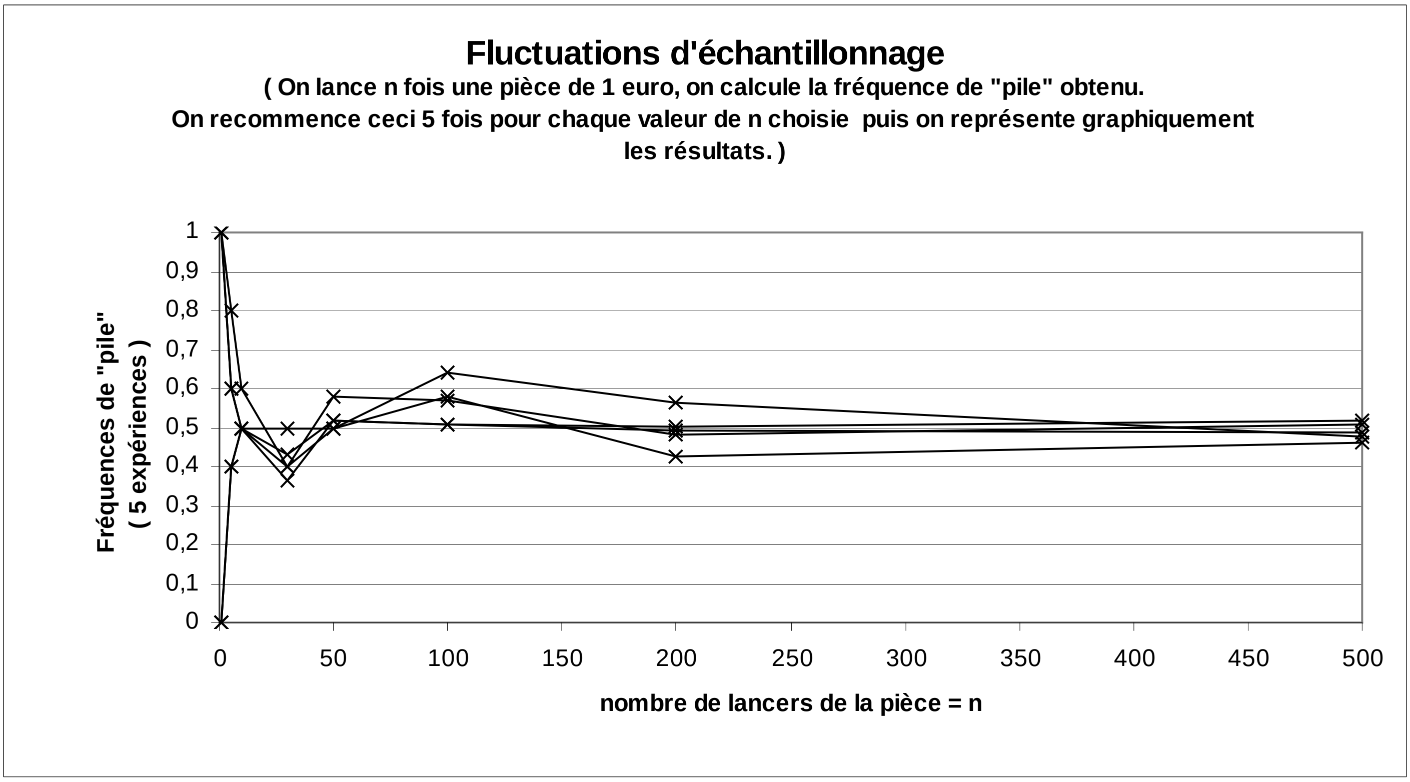
n = 100000 lancers

Résultat	Pile	Face	Total
fréquence	0,50121	0,49879	1

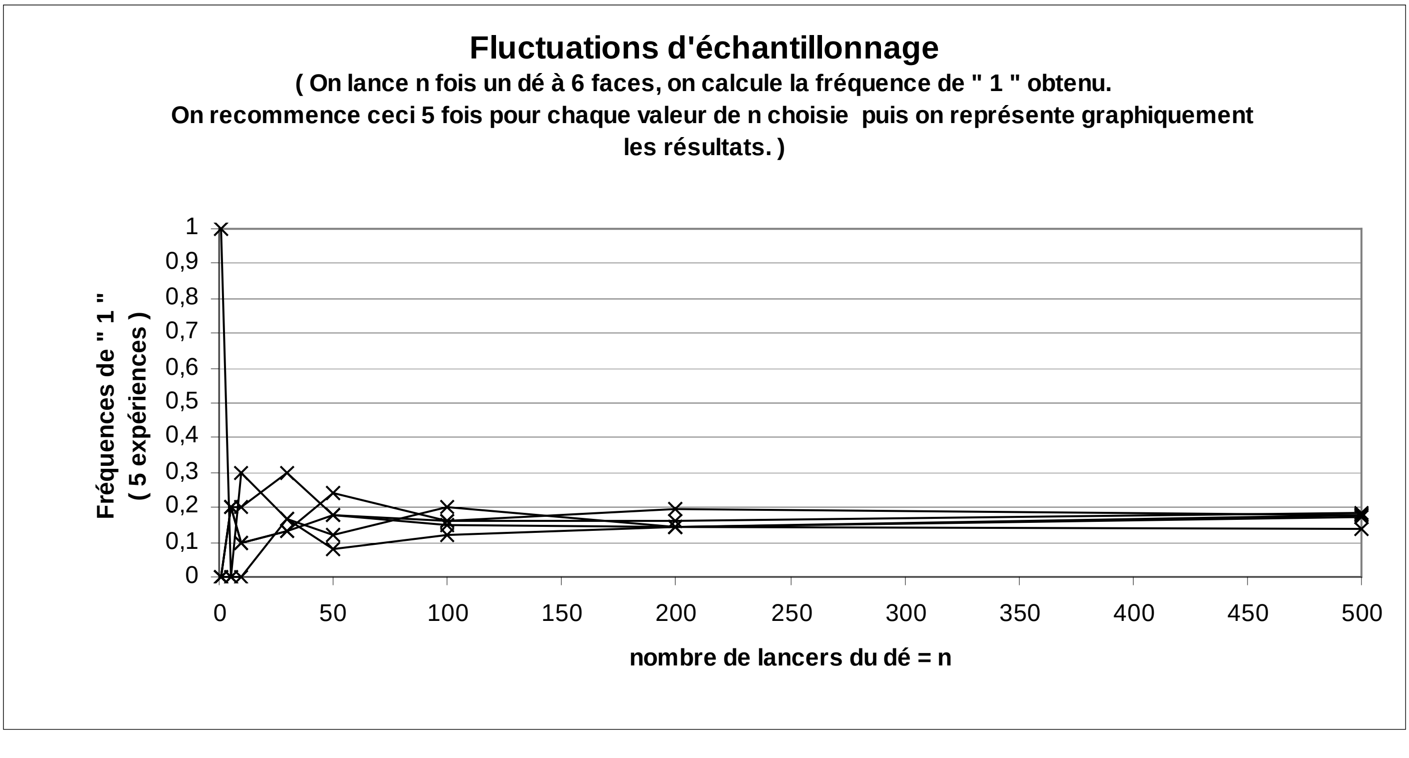
On remarque que plus la taille de l'échantillon est grande et plus les fréquences pratiques se rapprochent de la fréquence théorique égale à $\frac{1}{2}$ = 50%.

Illustrations graphiques.

nb lancer	1	5	10	30	50	100	200	500	1000
exp1	0	0,4	0,2	0,4	0,6	0,61	0,46	0,512	0,494
exp2	0	0,4	0,4	0,433333333	0,42	0,51	0,515	0,484	0,509
exp3	1	0,8	0,3	0,5	0,48	0,54	0,52	0,482	0,499
exp4	1	0,2	0,7	0,566666667	0,58	0,56	0,5	0,512	0,473
exp5	1	0,4	0,6	0,333333333	0,48	0,55	0,475	0,474	0,521



nb lancer	1	5	10	30	50	100	200	500	1000
exp1	0	0	0,1	0,233333333	0,08	0,16	0,135	0,174	0,182
exp2	0	0	0	0,2	0,3	0,16	0,155	0,162	0,165
exp3	0	0,4	0	0,2	0,1	0,11	0,19	0,182	0,16
exp4	0	0	0,3	0,066666667	0,14	0,2	0,135	0,16	0,165
exp5	0	0,2	0,1	0,133333333	0,14	0,14	0,195	0,2	0,164

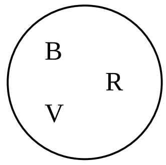


IV) Propriétés caractéristiques des probabilités.

Définition 7 : (PROBABILITE)

Soit U = { x_1 ; x_2 ; … x_n } l'univers d'une expérience aléatoire où les x_i sont les issues.
Une probabilité est une **fonction p de { x_1 ; x_2 ; … x_n } vers [0 ; 1]** qui à chacun des x_i associe un et un seul nombre compris entre 0 et 1 noté $p(x_i)$ et telle que
$\boxed{p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = 1}$ **(la somme des probabilités des issues vaut 1)**

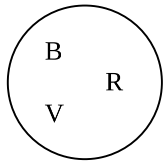
Exemple : 1) Pour la roue A représentée ci contre on a U = {B ; V ; R }



et on prendra : $\mathbf{p (R) = \frac{1}{2}}$; $\mathbf{p (V) = \frac{1}{4}}$; $\mathbf{p (B) = \frac{1}{4}}$

et on a : **p(R) + p(V) + p(B) = 0,5 + 0,25 + 0,25 = 1**

2) Pour la roue B représentée ci contre on a U = {B ; V ; R }



et on prendra : $\mathbf{p (R) = \frac{1}{3}}$; $\mathbf{p (V) = \frac{1}{3}}$; $\mathbf{p (B) = \frac{1}{3}}$

et on a : $\mathbf{p(R) + p(V) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1}$

■ **Propriété 1 : (PROBABILITE dans le cas de l' EQUIPROBABILITE)**

Soit U = { x_1 ; x_2 ; … x_n } l'univers d'une expérience aléatoire où les x_i sont les issues.
Si **toutes les issues ont la même probabilité** on dit qu'il y a équiprobabilité et on a :
$\boxed{\mathbf{p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = \frac{1}{n}}}$ (Chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{n}$)

Preuve : notons $p = p(x_1) = \ldots = p(x_n)$ on a $p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = 1$

Donc $p + p + p + \ldots + p = 1$ donc $np = 1$ donc $p = \frac{1}{n}$ C.Q.F.D

Exemple : ① Pour la roue A ci dessus **il n'y a pas** équiprobabilité .
② Pour la roue B ci dessus **il y a** équiprobabilité.

Remarque : On supposera qu'il y a EQUIPROBABILITE quand une éventualité n'a a priori **ni plus ni moins** de chance de se produire que chacune des autres .

Définition 8 : (PROBABILITE d'un EVENEMENT QUELCONQUE)

Soit U = { x_1 ; x_2 ; … x_n } un univers où les x_i sont les événements élémentaires.
Soit p une probabilité.
Soit $A \subset U$ un événement quelconque constitué des événements élémentaires x_i ; x_m ; ..; x_k .
La probabilité de A est le nombre noté p(A) tel que $\boxed{\mathbf{p(A) = p(x_i) + p(x_m) + \ldots + p(x_k)}}$
La **probabilité de A** est égale à la **somme des probabilités** des **événements élémentaires** qui **constituent A**
Si $A = \varnothing$ alors on pose p(A) = 0 et on dit que A est un événement IMPOSSIBLE
SI A = U alors on a p(A) = 1 et on dit que A est un événement CERTAIN.

Exemple : Pour la roue B si A est l' événement : A = { R ; V }
$p (A) = p (R) + p (V) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

■ **Propriété 2 : (PROBABILITE dans le cas de l' EQUIPROBABILITE)**

Si il y a **EQUIPROBABILITE**
Alors La probabilité d'un événement A est égale au QUOTIENT l'effectif n_A de A par l'effectif n_U de U.

$$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n_U} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}}\ .$$

Preuve : A est constitué de n_A éventualités et U de $n_U = n$ chacune ayant pour probabilité $\frac{1}{n}$.

$$\text{On a donc } p(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n_A \times \frac{1}{n} = \frac{n_A}{n} = \frac{n_A}{n_U}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

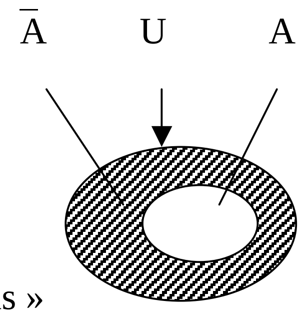
Exemple :
Si on lance un dé bien équilibré à huit faces.

① $p(\text{PAIR}) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{4}{8}$ ② $p(\text{score} \geq 6\ ) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{3}{8}$.

V) Propriétés d'OPERATIONS sur les EVENEMENTS.

Définition 9 : (EVENEMENT CONTRAIRE)

Soit A un événement de U.
L'événement **CONTRAIRE** de A est noté $\overline{\mathbf{A}}$ (« A barre »)
et est constitué des éventualités de U qui **ne sont pas dans** A



Exemple : A : « la carte est un as » , $\overline{A}$: « la carte n'est pas un as »

■ **Propriété 3 : (PROBABILITE du CONTRAIRE.)**

Quel que soit l'événement $A \subset U$ on a : $\boxed{\mathbf{p(\ \overline{A}\ ) = 1 - p\ (A)}}$

Preuve : On a $p(A\ ) + p(\ \overline{A}\ ) = 1$ (car on additionne ainsi les probabilités de toutes les issues)
Donc $p(\ \overline{A}\ ) = 1 - p(A\ )$. C.Q.F.D.

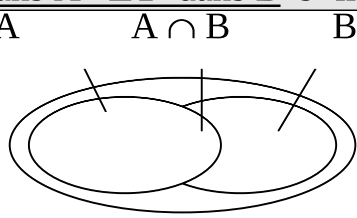
Exemple : On choisit une carte dans un jeu de 32 cartes avec équiprobabilité.

Soit A l'événement « La carte est un Roi » ; $\overline{A}$ est donc « La carte n'est pas un Roi »

On a : $p\ (\ A\ ) = \frac{4}{32}$ donc $p\ (\ \overline{A}\ ) = 1 - p\ (A\ ) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{32}{32} - \frac{4}{32} = \frac{28}{32}$.

Définition 10 : (INTERSECTION de deux EVENEMENTS)

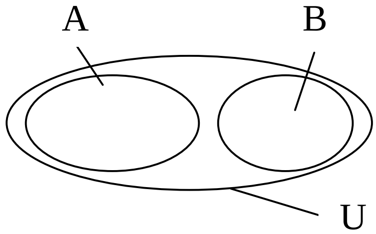
Soient A et B deux événements de U. $A \subset U$ et $B \subset U$.
L' **INTERSECTION** de A et B notée $\mathbf{A \cap B}$ (lire « A inter B ») est le sous ensemble de U constitué des éléments de U qui sont à la fois dans A **ET** dans B s' il y en a .



A et B **ont des** éléments en commun
On dit que
A et B sont **COMPATIBLES**

2 CAS

A et B **n'ont aucun** éléments en commun
On dit que
A et B sont **INCOMPATIBLES (disjoints)**



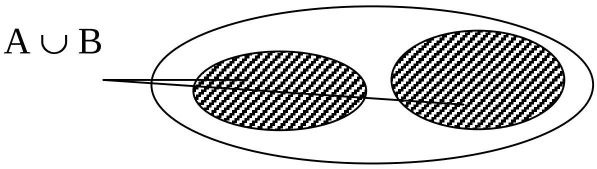
On note $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ (ensemble vide)

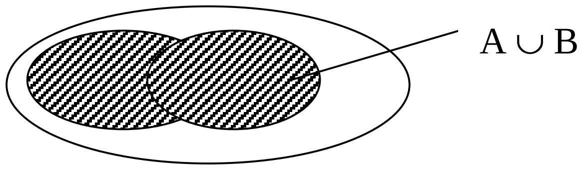
Exemple :

① Dans une classe, les événements Garçons et Filles sont incompatibles
② Les événements « droitiers » et « garçons » ne sont pas nécessairement incompatibles.
(il peut-y avoir des garçons gauchers)

Définition 11 : (**REUNION de deux EVENEMENTS**)

Soient A et B deux événements de U. $A \subset U$ et $B \subset U$.
La REUNION de A et B notée $\mathbf{A \cup B}$ (lire « A union B »)
est le sous ensemble de U constitué
des éléments de E qui sont dans **au moins un** des 2 sous ensembles A ou B .





■ **Propriété 4 :** ***(Probabilité de $A \cup B$)***

Quels que soient les événements $A \subset U$ et $B \subset U$.
On a : $\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p (A) + p (B) - p (A \cap B)}}$

Preuve : (admis)

Illustration : Dans un jeu de 32 cartes.

p (Roi ∪ Cœur) = p (Roi) + p (Cœur) – p (Roi ∩ Cœur)

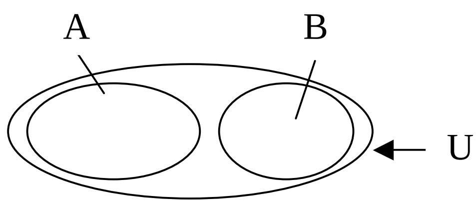
$$p (\text{Roi} \cup \text{Cœur}) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$

ou bien

$$p (\text{Roi} \cup \text{Cœur}) = \frac{4 + 8 - 1}{32} = \frac{11}{32}$$

Remarque :

Dans le cas particulier où A et B sont **incompatibles**
on a alors $\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p (A) + p(B)}}$



Par exemple :

Si p(Fille gauchère) = p(F ∩ g) = 0,2 et p(Garçon gaucher) = p(G ∩ g) = 0,3
p (gaucher) = p(F ∩ g) + p(G ∩ g) = 0,2 + 0,3 = 0,5.

VI) EXPERIENCES ALEATOIRES COMPOSEES et ARBRE

Définition 12 : (EXPERIENCE ALEATOIRE COMPOSEE)

Une expérience aléatoire est composée si elle consiste en la succession de plusieurs expériences aléatoires simples.

Exemple :

1) Une urne contient 2 boules noires et 3 blanches; on choisit une boule au hasard; **on la remet dans l'urne** puis on choisit encore une boule.
Que vaut la probabilité de choisir 2 boules noires ? (on suppose qu'il y a équiprobabilité)

2) Une urne contient 2 boules noires et 3 blanches; on choisit une boule au hasard; **on ne la remet pas dans l'urne** puis on choisit encore une boule.
Que vaut la probabilité de choisir 2 boules noires ? (on suppose qu'il y a équiprobabilité

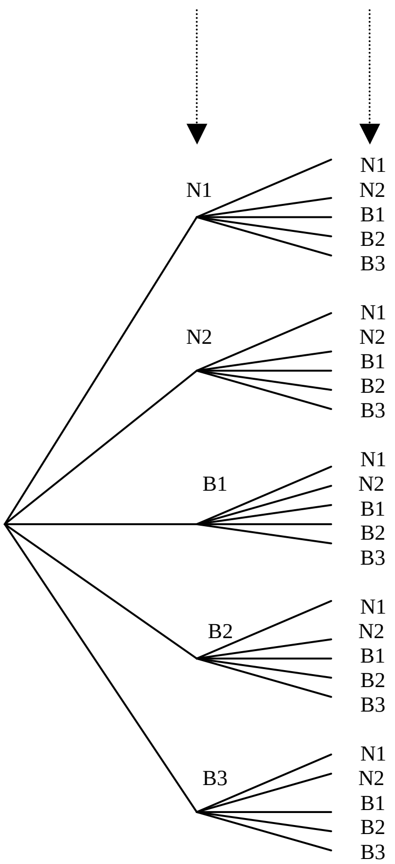
Solution : Notons A l'événement « les 2 boules choisies sont noires »

On cherche à utiliser : $p(A) = \dfrac{n_A}{n_U}$; il suffit de déterminer n_A et n_U

Pour cela on peut utiliser un **ARBRE de DENOMBREMENT** :

Situation 1) (**Avec remise**)

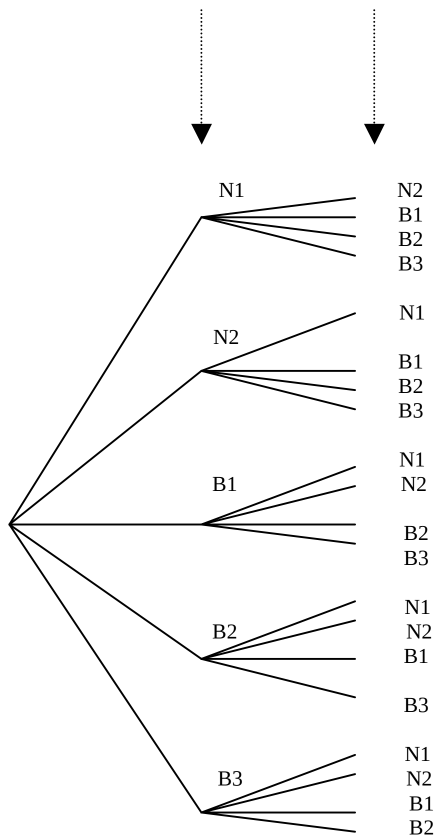
1^{er} Tirage $2^{ème}$ Tirage



On a : $n_U = 5 \times 5 = 25$

Situation 2) (**Sans remise**)

1^{er} Tirage $2^{ème}$ Tirage



on a : $n_U = 5 \times 4 = 20$

$n_A = 4$	$n_A = 2$
p (2 noires) = $\mathbf{\frac{4}{25}}$ **(= 0,16)**	**p (2 noires) =** $\mathbf{\frac{2}{20}}$ **(= 0,1)**

Il est donc plus probable de tomber sur 2 boules noires avec remise plutôt que sans remise

<u>**Remarque :**</u> Soit B l'événement : « Au moins une des 2 boules est blanche »
Il est commode de savoir que **B est l'événement CONTRAIRE de A**
Pour calculer p (B) simplement comme suit :

$p(B) = 1 - p(A)$	$p(B) = 1 - p(A)$
$p(B) = 1 - \frac{4}{25}$	$p(B) = 1 - \frac{2}{25}$
$\mathbf{p(B) = \frac{21}{25}}$	$\mathbf{p(B) = \frac{23}{25}}$

Le contraire de « **les 2 sont …** » est « **au moins une n'est pas …** ».