FICHE METHODE sur les SYSTEMES LINEAIRES

I) A quoi sert un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues ?

a) Exemples :

① $\begin{cases} \text{Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes} \\ \text{La bouteille pèse 100g de plus que le bouchon !} \end{cases}$: $\begin{cases} x + y = 110 \\ x - y = 100 \end{cases}$

_ Combien pèse le bouchon ? Combien pèse la bouteille ?

② $\begin{cases} \text{Une boisson et un gâteau coûtent 20 écus} \\ \text{2 boissons et 3 gâteaux coûtent 45 écus} \end{cases}$: $\begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ 1x + 1y = 20 \end{cases}$

_ Quel est le prix d'une boisson, quel est le prix d'un gâteau ?

③ $\begin{cases} \text{4 mars et 8 kit-kats valent ensemble 10 euros} \\ \text{5 mars et 6 kit-kats valent ensemble 6,5 euros} \end{cases}$: $\begin{cases} 4x + 8y = 10 \\ 5x + 6y = 6{,}5 \end{cases}$

_Quel est **le prix d'un mars, quel est le prix d'un kit-kat ?**

b) Remarques :

Parmi tous les problèmes que l'on peut rencontrer, il en est une infinité qui peuvent être résolus de la même façon par la résolution d'un système linéaire. Quels sont ces problèmes ? qu 'ont-ils de commun ? Comment les résoudre ?

II) Qu'est ce qu'un système linéaire ?

Définition 1: (SYSTEME LINEAIRE)

Un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues x et y est de la forme : $\boxed{\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}}$

où a, b, c, d, e et f sont 6 nombres réels connus et non tous nuls.
x et y deux réels inconnus.

Exemples : ① $\begin{cases} x + y = 110 \\ x - y = 100 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ 1x + 1y = 20 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y = \pi \\ -0{,}125x - 3y = \sqrt{2} \end{cases}$.

Définition 2 : (COUPLE SOLUTION)

Soit : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ un système linéaire.
Un couple de nombres réels ***(x_0 ;y_0)*** est un ***couple-solution du système*** si et seulement si les égalités obtenues en ***remplaçant x par x_0 et y par y_0*** sont des ***égalités vraies.***

Exemples et contres-exemples :

① (105 ; 5) est un couple-solution du système $\begin{cases} x + y = 110 \\ x - y = 100 \end{cases}$ car $\begin{cases} 105 + 5 = 110 : \text{ vrai} \\ 105 - 5 = 100 : \text{vrai} \end{cases}$

② (107 ; 3) n'est pas un couple-solution du système $\begin{cases} x + y = 110 \\ x - y = 100 \end{cases}$ car $\begin{cases} 107 + 3 = 110 : \text{ vrai} \\ 107 - 3 = 104 : \text{Faux} \end{cases}$

III) Comment résoudre un système linéaire ?

Définition 3 : (RESOUDRE UN SYSTEME)

Soit : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ un système linéaire.

Résoudre le système linéaire, c'est ***trouver ,*** *s'il y en a* ***tous les couples-solution-*** du système.

Propriété 1 : (EXISTENCE DE COUPLE-SOLUTION)

Soit : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ un système linéaire.

On distingue 2 cas selon les valeurs des produits ad et bc.

Si $ad \neq bc$ alors le système admet ***un unique couple-solution***.

Si $ad = bc$ alors le système est « particulier » et il ***n'admet pas un unique couple-solution*** et on distingue 2 cas selon les équations réduites * que l'on obtient.

Cas 1 : Si les **équations réduites** sont **égales** alors il y a une **infinité de couple-solution**.

Cas 2 : Si les **équations réduites** sont **différentes** alors il n'y a **aucun couple-solution**.

* (Pour obtenir l'équation réduite, on isole y).

Preuve :

Soit le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

Si on réduit les deux équations on obtient les équations de droites suivantes: $\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{e}{b} \\ y = -\dfrac{c}{d}x + \dfrac{f}{d} \end{cases}$

•Si $-\dfrac{a}{b} \neq -\dfrac{c}{d}$ alors les coefficients directeurs des droites sont différents et les droites ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un unique point appelé $M(x_0 ;y_0)$.

Puisque M est sur chacune des droites, ses coordonnées vérifient $\begin{cases} y_0 = -\dfrac{a}{b}x_0 + \dfrac{e}{b} \\ y_0 = -\dfrac{c}{d}x_0 + \dfrac{f}{d} \end{cases}$

donc $\begin{cases} ax_0 + by_0 = e \\ cx_0 + dy_0 = f \end{cases}$ donc $(x_0 ;y_0)$ est couple solution du système et est unique.

•Si $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{c}{d}$ alors les coefficients directeurs des droites sont égaux et les droites sont parallèles.

_Si $\dfrac{e}{b} = \dfrac{f}{d}$ alors les ordonnées à l'origine des droites sont égales et les deux droites sont confondues et se coupent en une infinité de points, et il y a une infinité de couples-solution.

_Si $\dfrac{e}{b} \neq \dfrac{f}{d}$ alors les droites sont parallèles mais ne se coupent pas, il n'y a aucun couple solution pour le systèmes.

Exemples :

① $\begin{cases} 2x + 3y = 33 \\ 5x + 4y = 58 \end{cases}$ On a : $2\times4 = 8$ et $3\times 5 = 15$ $2\times4 \neq 3\times 5$

donc le système admet un **unique couple-solution**.

② $\begin{cases} 4x + 8y = 10 \\ 3x + 6y = 6{,}5 \end{cases}$ On a : $4\times6 = 3\times8 = 24$

donc le système **n'admet pas un unique couple-solution** et de plus :

Les équations réduites des droites sont : $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{8}x + \dfrac{10}{8} \\ y = -\dfrac{3}{6}x + \dfrac{6{,}5}{6} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{12} \end{cases}$

Les deux droites ont le même coefficient directeur : $-\dfrac{1}{2}$ donc elles sont parallèles, mais elles n'ont pas la même ordonnée à l'origine $\dfrac{5}{4} \neq \dfrac{13}{12}$ donc elles ne se coupent en aucun point et le système n'admet **aucun couple-solution.**

③ $\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 5x + 10y = 30 \end{cases}$: $3\times10 = 5\times6 = 30$

donc le système **n'admet pas un unique couple-solution** et de plus :

Les équations réduites des droites sont : $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{6}x + \dfrac{18}{6} \\ y = -\dfrac{5}{10}x + \dfrac{30}{10} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

Les deux droites ont les mêmes équations réduites donc elles sont confondues et se coupent en une infinité de points donc le système admet **une infinité de couples-solutions.**

Propriété 2 : (SYSTEMES EQUIVALENTS)

Soit $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ un système.

On dit que 2 systèmes sont ***équivalents*** s'ils ont ***le même ensemble de couples solutions***.
de plus :

1) Si on **multiplie**, une ou les deux **équations** du système par un **nombre non nul**
Alors on obtient un **système équivalent au premier**.

2) Si on **remplace** une équation du système par sa **somme** ou sa **différence** avec l'autre équation
Alors on obtient un **système équivalent au premier**.

Admis.

Exemples : ① $\begin{cases} 2x + 3y = 33 \ (L_1) \\ 5x + 4y = 58 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 165 \ (L_1 \leftarrow 5\times L_1) & \text{"5 fois } L_1\text{"} \\ 10x + 8y = 116 \ (L_2 \leftarrow 2\times L_2) & \text{"2 fois } L_2\text{"} \end{cases}$

② $\begin{cases} 10x + 15y = 165 \ (L_1) \\ 10x + 8y = 116 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 7y = 49 \ (L_1 - L_2) & \text{"} L_1 \text{ moins } L_2\text{"} \\ 2x + 3y = 33 \ (L_1) \end{cases}$

METHODE DE RESOLUTION PAR ELIMINATION (COMBINAISON) :

On utilise la propriété 2 pour résoudre les systèmes par la méthode d'élimination.

Exemples :

① $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x + y = 110} \\ \mathbf{x - y = 100} \end{cases}}$

- $1\times(-1) - 1\times1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$ donc le système admet un **unique couple-solution.**

- *Dès le départ, après avoir observé le système, on remarque que les y vont « s'éliminer x » si on additionne la première ligne à la seconde. On trouve alors la valeur de x, puis on remplace x par sa valeur dans l'équation restante et on trouve ainsi la valeur de y. Il reste alors à conclure.*

$$\begin{cases} x + y = 110 \ (L_1) \\ x - y = 100 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 110 \quad (L_1) \leftarrow (L_1) \\ 2x = 210 \quad (L_2) \leftarrow (L_1) + (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 110 \\ x = \dfrac{210}{2} = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105 + y = 110 \\ x = 105 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 110 - 105 = 5 \\ x = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 105 \end{cases}$$

- Conclusion : l'ensemble des solutions est noté **S = $\{$(105 ;5)$\}$**

② $\boxed{\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 45} \\ \mathbf{1x + 1y = 20} \end{cases}}$: • $2\times1 - 3\times1 = -1 \neq 0$ donc le système admet un **unique couple-solution**

- Dès le départ, après avoir observé le système, on remarque que les x vont « s'éliminer x » si on multiplie la 2ème ligne par 2 puis que l'on soustrait la seconde ligne de la première. On trouve alors la valeur de y, puis on remplace y par sa valeur dans l'équation restante et on trouve ainsi la valeur de x. Il reste alors à conclure.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 45 \\ 2x + 2y = 40 \ (L_2 \leftarrow 2\times L_2) \end{cases})\Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 1y = 5 \quad L_1 \leftarrow (L_1 - L_2) \\ 2x + 2y = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 2x + 2\times5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{40 - 10}{2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

- Conclusion : **S = $\{$(15 ;5)$\}$** .

③ $\boxed{\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 33 \ (L_1)} \\ \mathbf{5x + 4y = 58 \ (L_2)} \end{cases}}$

- $2\times4 - 3\times5 = 8 - 15 =$ **$-7 \neq 0$** donc le système admet un **unique couple-solution.**
- Dès le départ, après avoir observé le système, on remarque que les x vont « s'éliminer » si on multiplie la première ligne par 5 et la deuxième par 2 puis que l'on soustrait la seconde ligne de la première. On trouve alors la valeur de y, puis on remplace y par sa valeur dans l'équation restante et on trouve ainsi la valeur de x. Il reste alors à conclure.
- $$\begin{cases} 2x + 3y = 33 \ (L_1) \\ 5x + 4y = 58 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 165 \ (L_1 \leftarrow 5\times L_1) \\ 10x + 8y = 116 \ (L_2 \leftarrow 2\times L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 7y = 49 \ \ L_1 \leftarrow (L_1 - L_2) \\ 2x + 3y = 33 \ (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{49}{7} = 7 \\ 2x + 3\times7 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ 2x = 33 - 21 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = \dfrac{12}{2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 6 \end{cases}$$

(on remplace y par 7)

- Conclusion : l'ensemble des solutions est noté **S =** $\{(6\,;7)\}$.

Remarque : (RESOLUTION GRAPHIQUE)

Pour résoudre un système graphiquement :
① On construit la droite correspondant à chaque équation. (un tableau de valeur pour chacune)
② On constate si les droites sont confondues (infinité de couples solution), parallèles strict (aucun couple solution) ou sécantes en un point (un seul couple solution) .