graphes

Table des matières

1 graphe, matrices d'adjacence, chaînes et cycles **3**

1.1 activités . . . 3

1.1.1 activité 1 . . . 4

1.1.2 activité 2 . . . 7

1.1.3 activité 3 . . . 8

1.2 à retenir . . . 9

1.3 exercices . . . 11

1.4 corrigés exercices . . . 14

2 graphe connexe, trajet Eulérien et algorithme d'Euler **19**

2.1 activités . . . 19

2.1.1 activité 1 . . . 19

2.1.2 activité 2 . . . 20

2.1.3 activité 3 . . . 21

2.2 à retenir . . . 22

2.3 exercices . . . 24

2.4 corrigés exercices . . . 26

3 graphe orienté, matrice d'adjacence, graphe étiqueté **32**

3.1 activités . . . 32

3.1.1 activité 1 . . . 32

3.1.2 activité 2 . . . 33

3.1.3 activité 3 . . . 34

3.2 à retenir . . . 35

3.3 exercices . . . 36

3.4 corrigés exercices . . . 37

4 graphes pondérés **39**

4.1 activités . . . 39

4.1.1 activité 1 . . . 39

4.1.2 activité 2 . . . 40

4.2 à retenir . . . 41

4.3 exercices . . . 43

4.4 corrigés exercices . . . 44

5 graphe probabiliste, matrice de transition, état stable **47**

5.1 activités . . . 47

5.1.1 activité 1 . . . 47

5.1.2 activité 2 . . . 49

5.1.3 activité 3 . . . 50

5.2 à retenir . . . 51

5.3 exercices . . . 52

5.4 corrigés exercices . . . 53

5.5 travaux pratiques . . . 55

5.5.1 tableur . . . 55

6 Minima **58**
6.1 activités 58
6.1.1 activité 1 58
6.1.2 corrigé activité 1 59
6.1.3 activité 2 60
6.1.4 activité 3 61
6.1.5 activité 4 62
6.1.6 activité 5 63

7 Coloration d'un graphe et nombre chromatique **64**
7.1 activités 64
7.1.1 activité 1 64
7.2 à retenir 65
7.3 exercices 66

8 devoir maison **67**
8.1 corrigé devoir maison 67

9 exercices bac blanc **71**

1 graphe, matrices d'adjacence, chaînes et cycles

1.1 activités

1.1.1 activité 1

tournois *(ordre d'un graphe, degré d'un sommet, propriété des poignées de mains)*

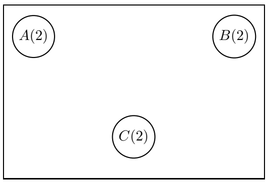
un tournois est organisé entre des équipes,dans chaque cas *(si possible)* :

- construire au moins un graphe *(indiquer le degré de chaque sommet, une arête représente un match)*
- construire un tableau de la forme

Σd = total de participations	
Σa = total de matchs	

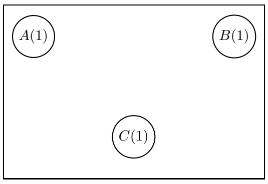
- donner l'ordre du graphe *(nombre de sommets)* et indiquer s'il est complet *(tous les sommets adjacents 2 à 2)*

1. (a) $\begin{cases} \text{trois équipes } A, B \text{ et } C \\ \text{2 matchs chacune} \end{cases}$



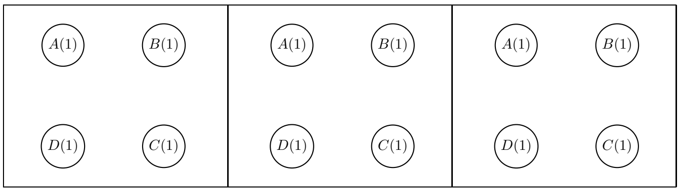
Σd = participations	...
Σa = matchs	...

(b) $\begin{cases} \text{trois équipes } A, B \text{ et } C \\ \text{1 match chacune} \end{cases}$



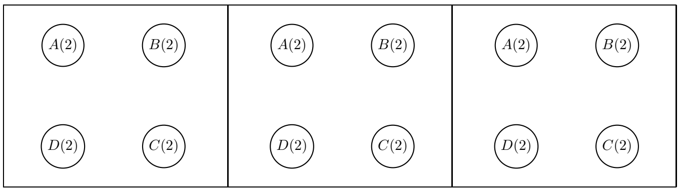
Σd = participations	...
Σa = matchs	...

2. (a) $\begin{cases} \text{4 équipes } A, B, C \text{ et } D \\ \text{1 match chacune} \end{cases}$



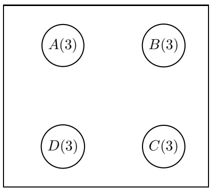
Σd	
Σa	

(b) $\begin{cases} \text{4 équipes } A, B, C \text{ et } D \\ \text{2 matchs chacune} \end{cases}$



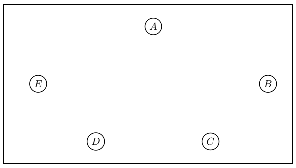
Σd	
Σa	

(c) $\begin{cases} \text{4 équipes } A, B, C \text{ et } D \\ \text{3 matchs chacune} \end{cases}$



Σd	
Σa	

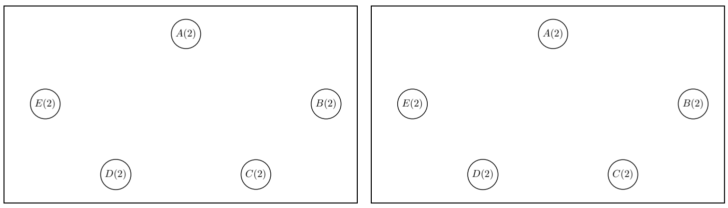
3. $\begin{cases} \text{5 équipes } A, B, C, D \text{ et } E \\ \text{1 match chacune} \end{cases}$



Σd	
Σa	

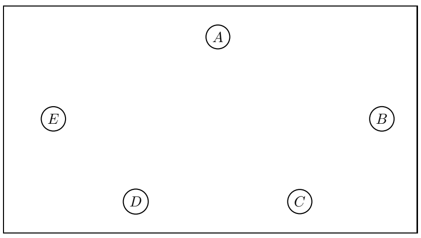
4. $\begin{cases} \text{5 équipes } A, B, C, D \text{ et } E \\ \text{2 matchs chacune} \end{cases}$

Σd	
Σa	



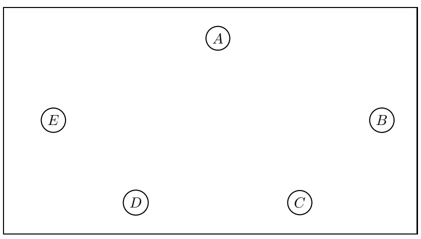
5. $\begin{cases} \text{5 équipes } A, B, C, D \text{ et } E \\ \text{3 matchs chacune} \end{cases}$

Σd	
Σa	



6. $\begin{cases} \text{5 équipes } A, B, C, D \text{ et } E \\ \text{4 matchs chacune} \end{cases}$

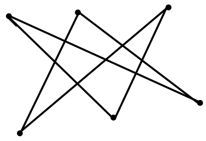
Σd	
Σa	



7. (a) est-il possible d'organiser un tournois avec 6 équipes où chacune joue 5 matchs ? (justifier)
   (b) est-il possible d'organiser un tournois avec 7 équipes où chacune joue 5 matchs ? (justifier)
   (c) quelle relation y a t-il entre le nombre d'arêtes d'un graphe et la somme des degrés de chaque sommet ? (justifier)

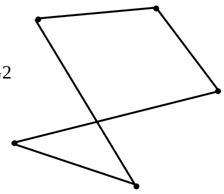
1.1.2 activité 2

parmi les graphes ci dessous, lesquels peuvent décrire une même situation ?
(on pourra indiquer le degré de chaque sommet ainsi que l'ordre du graphe)

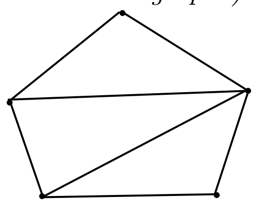


G1

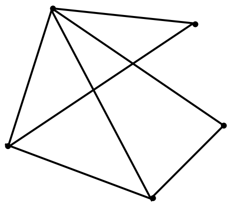
G2



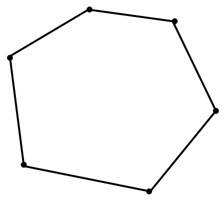
G3



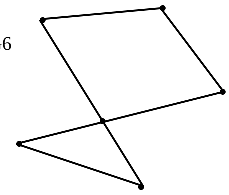
G4



G5



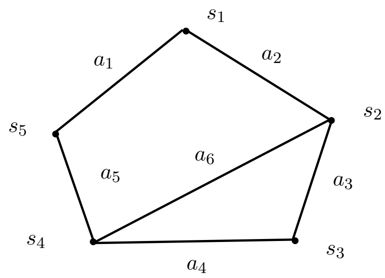
G6



1.1.3 activité 3

1.2 à retenir

définition 1 : *(graphe non orienté, ...)*



(1) un graphe est défini par la donnée de deux ensembles,
$\begin{cases} \text{l'ensemble de ses } n \text{ sommets } S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}, n \in \mathbb{N}^* \\ \text{l'ensemble de ses } p \text{ arêtes } A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}, p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
où chaque arête est un sous ensemble $\{s_i; s_j\}$ de deux sommets du graphe

(2) un $\boxed{\text{graphe est d'ordre } n}$ $(n \in \mathbb{N}) \iff$ il a exactement $\boxed{n}$ sommets

(3) un $\boxed{\text{sommet est de degré } n}$ $(n \in \mathbb{N}) \iff$ il appartient à exactement $\boxed{n \text{ arêtes}}$

(4) deux sommets sont $\boxed{\text{adjacents}} \iff \boxed{\text{il existe une arête qui les contient tous les deux}}$

(5) un graphe est $\boxed{\text{complet}} \iff$ tous ses sommets *(distincts)* sont $\boxed{\text{adjacents deux à deux}}$

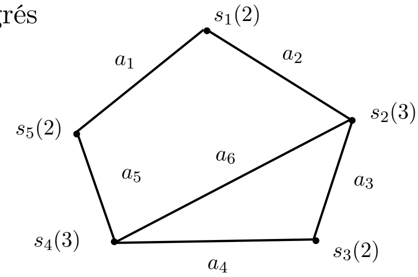
exemple :

le graphe G dessiné ci dessus
- est d'ordre 5 car il a 5 sommets $\{s_1; s_2; s_3; s_4; s_5\}$
- a 6 arêtes $\{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$
- le sommet s_1 est de degré 2 car il appartient à exactement 2 arêtes a_1 et a_2
- s_1 et s_2 sont adjacents par l'arête a_2
- s_1 et s_3 ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet

propriété 1 :

quel que soit le graphe non orienté G
$\boxed{\text{somme des degrés des sommets} = 2 \times \text{nombre d'arêtes}}$

justification : chaque arête compte pour 2 dans la somme des degrés



exemple :

pour le graphe G
nombre d'arêtes $\times 2 = 6 \times 2 = 12$
somme des degrés des sommets $= 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12$

remarques : *(découle de la propriété précédente)*

1. la somme des degrés des sommets d'un graphe est nécessairement pair
2. le nombre de sommets de degré impair est nécessairement pair

définition 2 : *(matrice d'adjacence d'un graphe non orienté)*

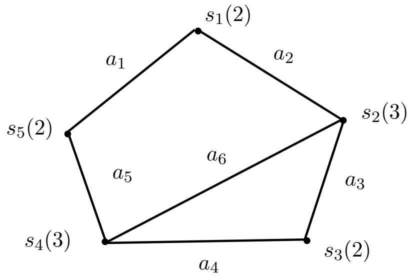
quel que soit le graphe non orienté G à n sommets $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
A est matrice d'adjacence de G
$\iff \begin{cases} A \text{ est une matrice carrée d'ordre } n \\ \text{quel que soit le coefficient } a_{ij} \text{ de la matrice } A, \boxed{a_{ij} = \text{nombre d'arêtes reliant } s_i \text{ à } s_j} \end{cases}$

exemple

pour le graphe G,

matrice d'adjacence $= A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$a_{12} = 1$ car 1 arête relie s_1 à s_2
$a_{31} = 0$ car 0 arête relie s_3 à s_1



remarque

la matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique

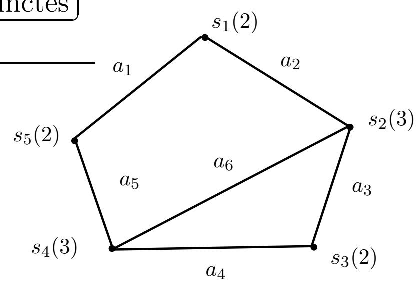
définition 3 : *(chaîne, cycle)*

quel que soit le graphe non orienté G à n sommets $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

(1) une chaîne est une liste ordonnée de sommets adjacents

(2) une chaîne est fermée si ses extrémités sont égales

(3) un cycle est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes



exemple :

pour le graphe G

$s_2s_3s_4s_2$ est une chaîne fermée et un cycle

$s_2s_3s_4s_2s_3s_4s_2$ est une chaîne fermée mais pas un cycle

propriété 2

quel que soit le graphe non orienté G à n sommets $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et de matrice d'adjacence de A

le terme a_{ij} de la matrice A^p ou $p \in \mathbb{N}^*$

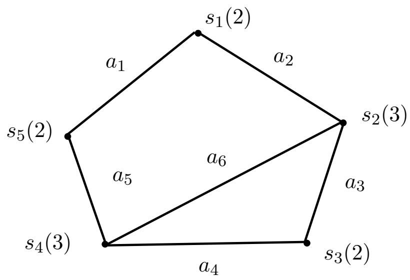
est égal

au nombre de chaînes de longueur p qui relient les sommets s_i et s_j

exemple

pour le graphe G,

$$\text{on a : } A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{la calculatrice donne : } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{5} & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 5$ donc 5 chaînes de longueur 3 relient s_1 à s_2 :

$s_1s_2s_1s_2$, $s_1s_2s_4s_2$, $s_1s_2s_3s_2$, $s_1s_5s_1s_2$, $s_1s_5s_4s_2$

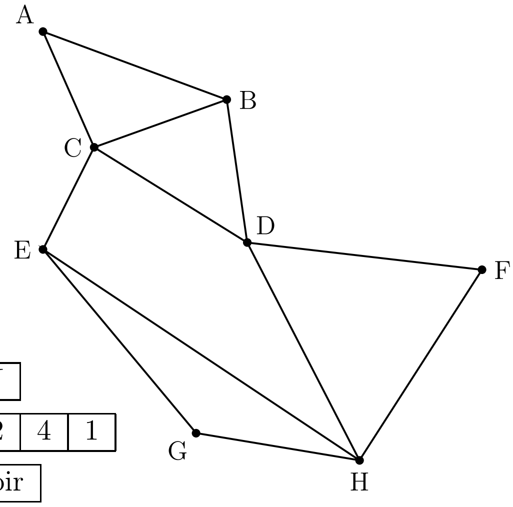
$a_{31} = 2$ donc 2 chaînes de longueur 3 relient s_3 à s_1 :

$s_3s_4s_2s_1$, $s_3s_4s_5s_1$

1.3 exercices

exercice 1 :

soit le graphe G représenté ci contre :



1. quel est l'ordre de ce graphe ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
2. combien a t-il d'arêtes ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
3. quel est le degré du sommet C ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
4. quel sommet est de degré 1 ? | A | B | F | aucun |
5. quel sommet est adjacent au sommet D ? | A | E | G | H |
6. combien de sommets sont adjacents au sommet H ? | 3 | 2 | 4 | 1 |
7. le graphe est-il complet ? | oui | non | on ne peut pas savoir |
8. combien ajouter d'arêtes pour que le graphe soit complet ? | 0 | 3 | 15 | 16 |
9. quelle est la longueur de la chaine $ABCDFH$? | 0 | 2 | 5 | 6 |
10. quelle chaine est fermée ? | ABD | $ACDB$ | $ABACA$ | $ABDCAB$ |
11. quelle chaine est un cycle ? | ABD | $ACDB$ | $ABACA$ | $ABDCA$ |
12. combien de lignes la matrice d'adjacence M a t-elle ? | 8 | 9 | 12 | 13 |
13. combien de colonnes la matrice d'adjacence M a t-elle ? | 8 | 9 | 12 | 13 |
14. que vaut le coefficient m_{33} de la matrice d'adjacence M ? | 0 | 1 | 4 | on ne peut pas savoir |
15. que vaut le coefficient m_{23} de la matrice d'adjacence M ? | 0 | 1 | 4 | on ne peut pas savoir |
16. que vaut le coefficient M^2_{14} de la matrice d'adjacence au carré M^2 ? | 0 | 1 | 2 | on ne peut pas savoir |

exercice 2 :

1. quelle matrice peut-être la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence d'un graphe G

   (a) combien de sommet G a t-il ? | 3 | 4 | 16 | on ne peut pas savoir |

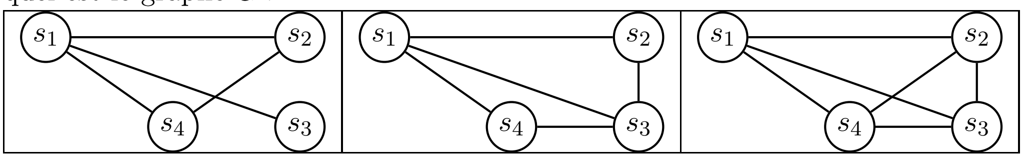
   (b) combien d'arêtes G a t-il ? | 4 | 5 | 10 | on ne peut pas savoir |

   (c) quel est le degré du premier sommet ? | 3 | 4 | 5 | on ne peut pas savoir |

   (d) les 2^e et 4^e sommets sont-ils adjacents ? | oui | non | on ne peut pas savoir |

   (e) les 2^e et 3^e sommets sont-ils adjacents ? | oui | non | on ne peut pas savoir |

   (f) quel est le graphe G ?



   (g) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

      i. combien de chemins de longueur 2 de s_3 à s_3 ? | 0 | 1 | 2 | 3 |

      ii. combien de chemins de longueur 3 de s_4 à s_2 ? | 2 | 3 | 4 | 5 |

      iii. combien de chemins de longueur 4 de s_2 à s_3 ? | 9 | 10 | 14 | 15 |

exercice 3 :

1. dessiner les graphes complets pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$
2. dessiner les graphes simples d'ordres $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ dont tous les sommets sont de degré 2
3. dessiner tous les graphes simples possible d'ordre $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$

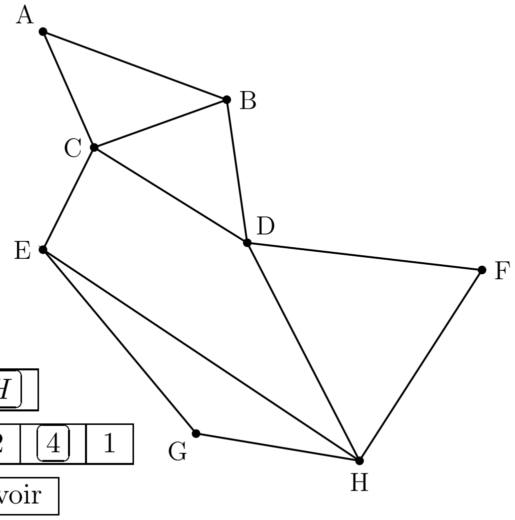
exercice 4 :

1. est-i possible de relier en réseau, 15 ordinateurs tels que chacun soit relié à exactement 5 ordinateurs ? (justifier)
2. à une soirée ou sont présentes 17 personnes, est-il possible que chacune des personnes serre la main d'exactement 15 personnes ? (justifier)
3. dans un graphe simple *(une arête au maximum entre deux sommets)*, combien y a t-il de sommets de degré impair ? (justifier)
4. comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

1.4 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

soit le graphe G représenté ci contre :



1. quel est l'ordre de ce graphe ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
2. combien a t-il d'arêtes ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
3. quel est le degré du sommet C ? | 12 | 8 | 4 | 13 |
4. quel sommet est de degré 1 ? | A | B | F | aucun |
5. quel sommet est adjacent au sommet D ? | A | E | G | H |
6. combien de sommets sont adjacents au sommet H ? | 3 | 2 | 4 | 1 |
7. le graphe est-il complet ? | oui | non | on ne peut pas savoir |
8. combien ajouter d'arêtes pour que le graphe soit complet ? | 0 | 3 | 15 | 16 |
9. quelle est la longueur de la chaine $ABCDFH$? | 0 | 2 | 5 | 6 |
10. quelle chaine est fermée ? | ABD | $ACDB$ | $ABACA$ | $ABDCAB$ |
11. quelle chaine est un cycle ? | ABD | $ACDB$ | $ABACA$ | $ABDCA$ |
12. combien de lignes la matrice d'adjacence M a t-elle ? | 8 | 9 | 12 | 13 |
13. combien de colonnes la matrice d'adjacence M a t-elle ? | 8 | 9 | 12 | 13 |
14. que vaut le coefficient m_{33} de la matrice d'adjacence M ? | 0 | 1 | 4 | on ne peut pas savoir |
15. que vaut le coefficient m_{23} de la matrice d'adjacence M ? | 0 | 1 | 4 | on ne peut pas savoir |
16. que vaut le coefficient M^2_{14} de la matrice d'adjacence au carré M^2 ? | 0 | 1 | 2 | on ne peut pas savoir |

corrigé exercice 2 :

1. quelle matrice peut-être la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\boxed{E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2. soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence d'un graphe G

   (a) combien de sommet G a t-il ? | 3 | $\boxed{4}$ | 16 | on ne peut pas savoir |

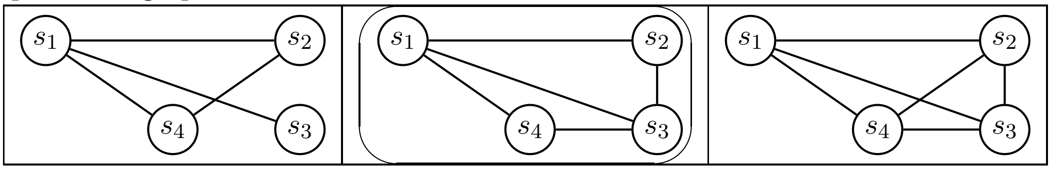
   (b) combien d'arêtes G a t-il ? | 4 | $\boxed{5}$ | 10 | on ne peut pas savoir |

   (c) quel est le degré du premier sommet ? | $\boxed{3}$ | 4 | 5 | on ne peut pas savoir |

   (d) les 2^e et 4^e sommets sont-ils adjacents ? | oui | $\boxed{\text{non}}$ | on ne peut pas savoir |

   (e) les 2^e et 3^e sommets sont-ils adjacents ? | $\boxed{\text{oui}}$ | non | on ne peut pas savoir |

   (f) quel est le graphe G ?



   (g) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

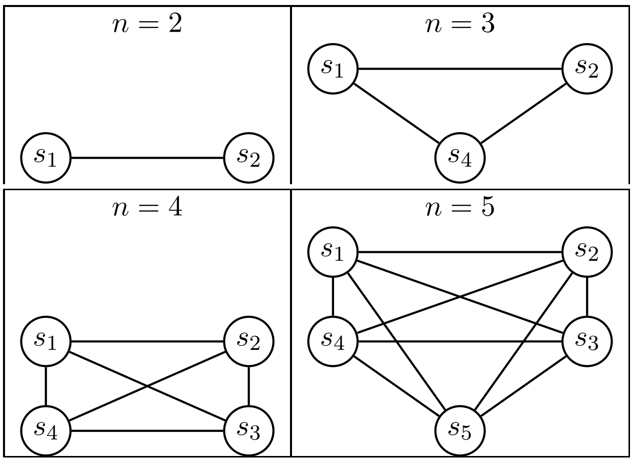
      i. combien de chemins de longueur 2 de s_3 à s_3 ? | 0 | 1 | 2 | $\boxed{3}$ |

      ii. combien de chemins de longueur 3 de s_4 à s_2 ? | $\boxed{2}$ | 3 | 4 | 5 |

      iii. combien de chemins de longueur 4 de s_2 à s_3 ? | $\boxed{9}$ | 10 | 14 | 15 |

corrigé exercice 3 :

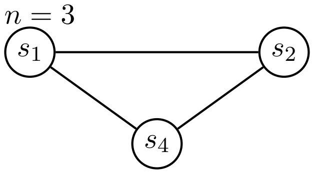
1. dessiner les graphes complets pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$



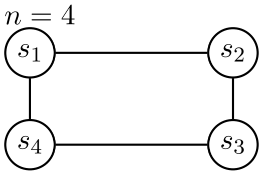
2. graphes simples d'ordres $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ dont tous les sommets sont de degré 2

$n = 2$: il n'y en a pas

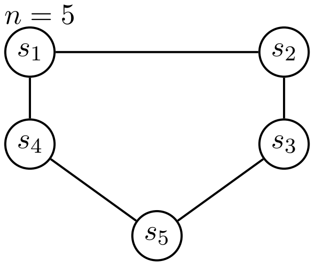
$n = 3$



$n = 4$

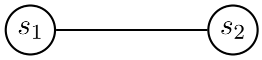


$n = 5$

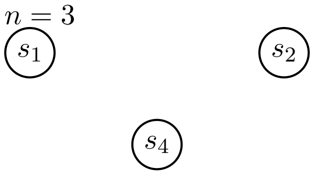


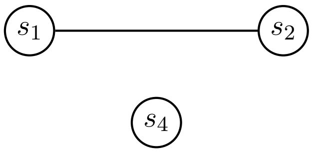
3. dessiner tous les graphes simples possible d'ordre $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$

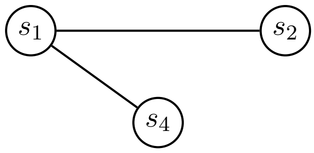
$n = 2$

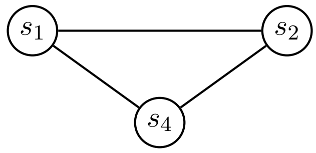


$n = 3$

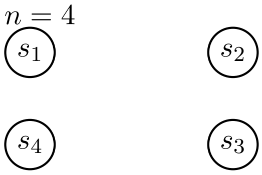


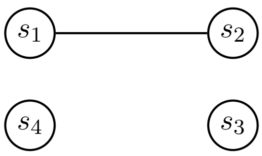


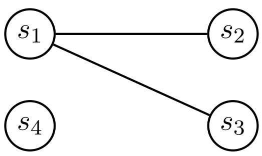


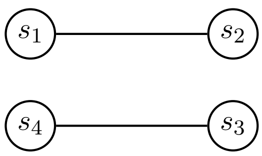


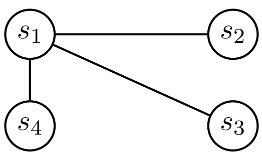
$n = 4$

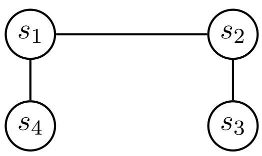


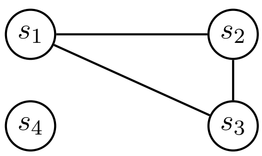


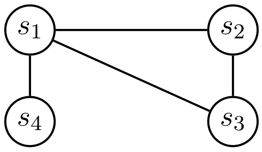


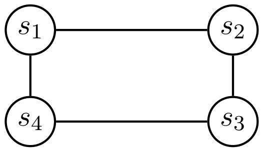


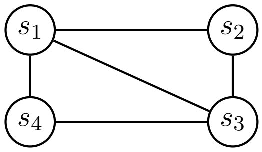


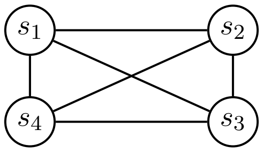












corrigé exercice 4 :

1. est-i possible de relier en réseau, 15 ordinateurs tels que chacun soit relié à exactement 5 ordinateurs ? (justifier)
   non car la somme des degrés serait $\Sigma d = 15 \times 5 = 75$ et $\dfrac{75}{2} = 37,5$ serait égal au nombre d'arêtes du graphe

2. à une soirée ou sont présentes 17 personnes, est-il possible que chacune des personnes serre la main d'exactement 15 personnes ? (justifier) non car la somme des degrés serait $\Sigma d = 15 \times 17 = 255$ et $\dfrac{255}{2} = 127,5$ serait égal au nombre d'arêtes du graphe

3. dans un graphe simple *(une arête au maximum entre deux sommets)*, combien y a t-il de sommets de degré impair ? (justifier)
   il y a un nombre pair de sommets de degrés impairs sinon Σd serait impair, ce qui ne convient pas pour un graphe

4. comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?
   c'est impossible car pour le graphe correspondant où sommet = "segment" , arête = "se coupent" on aurait $\Sigma d = 3 \times 5 = 15$ et $\dfrac{15}{2} = 7,5$ serait égal au nombre d'arêtes du graphe

2 graphe connexe, trajet Eulérien et algorithme d'Euler

2.1 activités

2.1.1 activité 1

2.1.2 activité 2

2.1.3 activité 3

2.2 à retenir

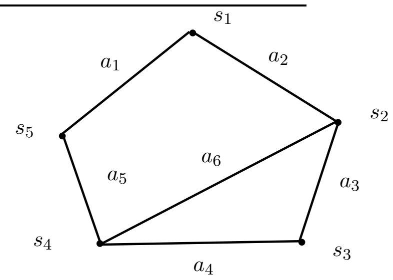
définition 4 : *(graphe connexe non orienté, chaîne et cycle eulérien)*

(1) un graphe G est $\boxed{\text{connexe}}$ $\iff \begin{cases} \text{quels que soient les sommets distincts de } G \ s_i \text{ et } s_j, \\ \boxed{\text{il existe une chaîne d'extrémités } s_i \text{ et } s_j} \end{cases}$

(2) la $\boxed{\text{chaîne est eulérienne}}$ $\iff$ la chaîne contient $\boxed{\text{une unique fois chaque arête de } G}$

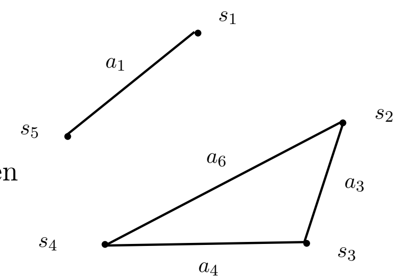
(3) le $\boxed{\text{cycle est eulérien}}$ $\iff$ le cycle contient une $\boxed{\text{unique fois chaque arête de } G}$

exemples :



pour le graphe G ci contre

- G est connexe car pour chaque couple de sommets, il existe une chaine d'extrémités ces sommets par exemple : pour s_1 et s_3, la chaîne : $s_1s_2s_3$
- $s_2s_4s_5s_1s_2s_3s_4$ est une chaîne eulérienne car elle contient chaque arête une unique fois
- $s_1s_2s_3s_4s_5s_1$ n'est pas eulérienne car elle ne contient pas a_6
- $s_2s_4s_5s_1s_2s_3s_4s_2$ est un cycle eulérienne car il contient chaque arête une unique fois et est un cycle



pour le graphe G ci contre

- G n'est pas connexe car il n'existe aucune chaine dont s_1 et s_2 soient les extrémités il ne peut-y avoir aucune chaîne eulérienne et aucun cycle eulérien

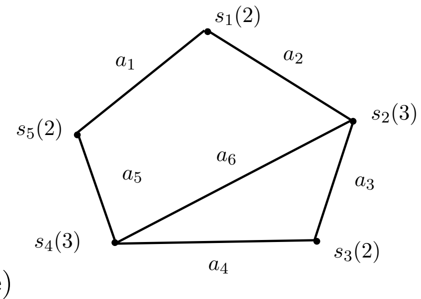
propriété 3 : (existence de chaîne ou de cycle eulérien)

quel que soit le graphe non orienté et connexe G

(1) il existe une $\boxed{\text{chaîne eulérienne}}$ $\iff$ il y a uniquement $\boxed{\text{0 ou 2 sommets de degré impair}}$

(1) il existe un $\boxed{\text{cycle eulérien}}$ $\iff$ tous les sommets $\boxed{\text{sont de degré pair}}$

exemple :



pour le graphe G

- il existe une chaîne eulérienne car uniquement 2 sommets s_4 et s_2 sont de degré impair (3)
- il n'existe pas de cycle eulérien car tous les sommets ne sont pas de degré pair

propriété 4 : (algorithme de détermination d'une chaine eulérienne)

quel que soit le graphe non orienté et connexe G

si G admet une chaîne eulérienne alors l'algorithme suivant conduit à l'écriture d'une chaine eulérienne

```
début
  si G a deux sommets de degré impair
  |  alors écrire une chaîne C joignant les deux sommets
  sinon
  |  écrire un cycle C à partir d'un sommet quelconque
  fin si
  tans que C n'est pas eulérienne faire
  |    pour chaque sommet de C remplacer si possible
  |    le sommet par un cycle de début ce sommet
  |    ne contenant que des arêtes non prises
  fin tans que
fin
```

pour G ci dessus

début

s_2s_4

$\underbrace{s_2}_{s_2s_1s_5s_4s_3s_2} \ \underbrace{s_4}_{\textit{gardé}}$

$s_2s_1s_5s_4s_3s_2s_4$

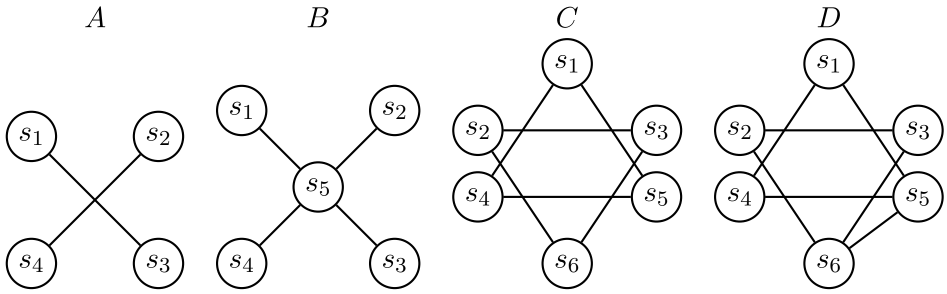
fin

2.3 exercices

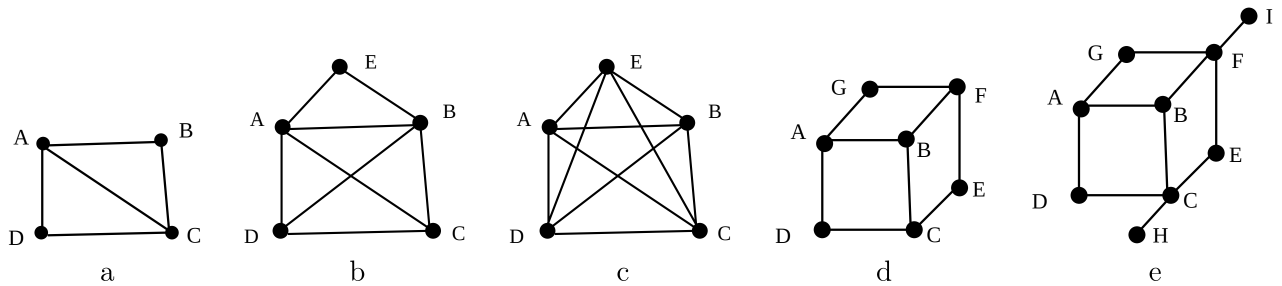
exercice 5 :

1. quels graphes sont connexes ?

A et C	A et B	B et C	B et D



2.



(a) quels graphes admettent au moins une chaîne eulérienne ?

a	b	c	d	e	aucun

(b) quels graphes admettent au moins un cycle eulérien ?

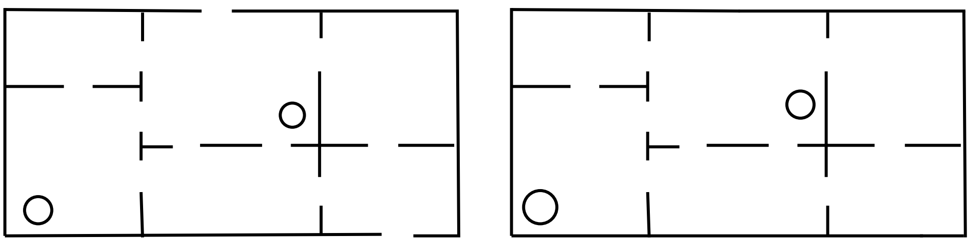
a	b	c	d	e	aucun

(c) donner une chaîne eulérienne pour le graphe b : ...

(d) donner un cycle eulérien pour le graphe c : ...

exercice 6 :

voici le plan d'une maison



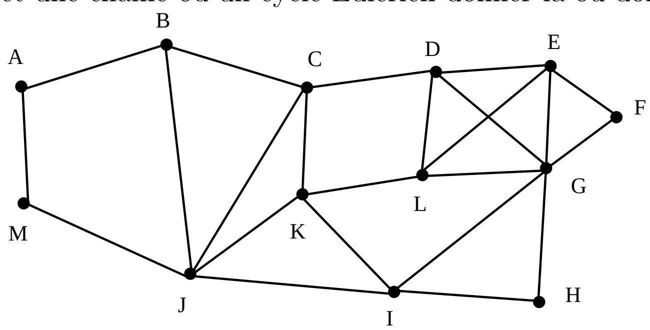
rez de chaussée étage

1. existe t-il un chemin qui permet de parcourir le rez de chaussée de la maison en passant par toutes les portes du rez de chaussée ?(en ne passant qu'une seule fois par chaque porte) (justifier), si tel est le cas, donner un tel chemin
2. existe t-il un chemin qui permet de parcourir l'étage de la maison en passant par toutes les portes de l'étage ? (en ne passant qu'une seule fois par chaque porte)(justifier), si tel est le cas, donner un tel chemin
3. sachant que les cercles représentent des escaliers en colimaçon, existe t-il un chemin qui permet de parcourir toute la maison en passant par toutes les portes de la maison ainsi que par les deux escaliers (en ne passant qu'une seule fois par chaque porte)(justifier), si tel est le cas, donner un tel chemin
4. est-il possible de trouver un circuit qui passe par toutes les portes ?
   (a) du rez de chaussée
   (b) de l'étage
   (c) de la maison

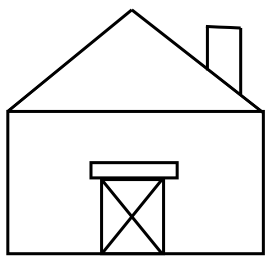
exercice 7 :

1. existe t-il un moyen de parcourir la France en passant une et une seule fois par chacune des frontières entre les zones géographiques données par la carte ? (justifier), si tel est le cas, donner un parcours
2. peut-on faire la même chose que précédemment en revenant à son point de départ ?(justifier), si tel est le cas, donner un parcours

exercice 8 :
si le graphe ci dessous admet une chaîne ou un cycle Eulérien donner la ou donner le



exercice 9 :
Est-il possible de dessiner cette maison sans lever le crayon, et sans repasser par le même trait ? *(si oui, justifier pourquoi et donner la méthode)*

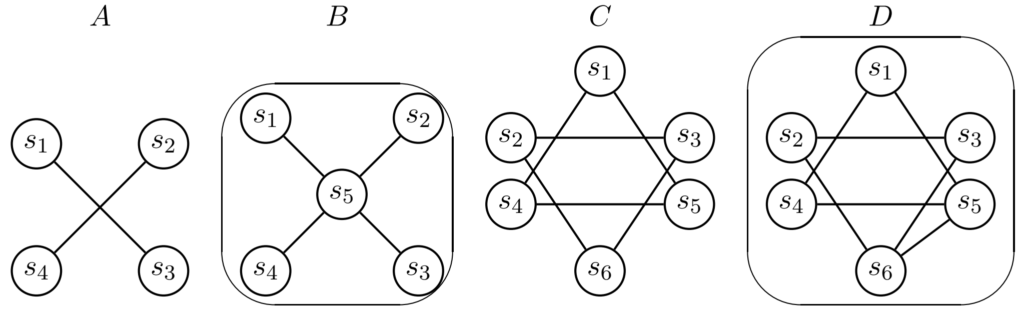


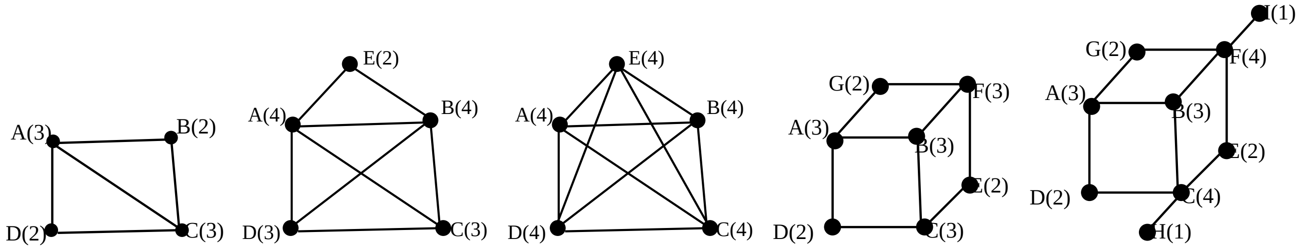
2.4 corrigés exercices

corrigé exercice 5 :

1. quels graphes sont connexes ?

A et C	A et B	B et C	$\boxed{\text{B et D}}$



2. 

a b c d e

   (a) quels graphes admettent au moins une chaîne eulérienne ?

$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	d	e	aucun

   (b) quels graphes admettent au moins un cycle eulérien ?

a	b	$\boxed{c}$	d	e	aucun

   (c) chaîne eulérienne pour le graphe b :

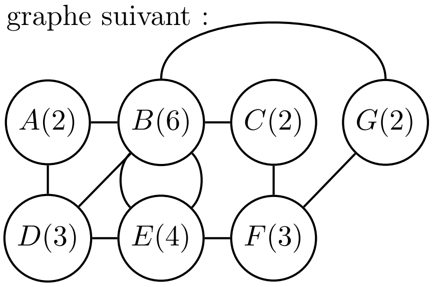
$$\underbrace{D\ \ C}$$
$$\overbrace{D\ \underbrace{A}\ BD}C$$
$$D\overbrace{AEBCA}BDC$$
$$\boxed{DAEBCABDC}$$

   (d) cycle eulérien pour le graphe c :

$$\underbrace{D\ \ }CBD$$
$$\overbrace{D\ \underbrace{E}\ AD}CBD$$
$$D\overbrace{EBACE}ADCBD$$
$$\boxed{DEBACEADCBD}$$

corrigé exercice 6 :

1. on modélise le problème grâce au graphe suivant :



Il n'y a que deux sommets de degré impair
par conséquent, il existe une chaîne Eulérienne

$$\underbrace{D}\,EF$$

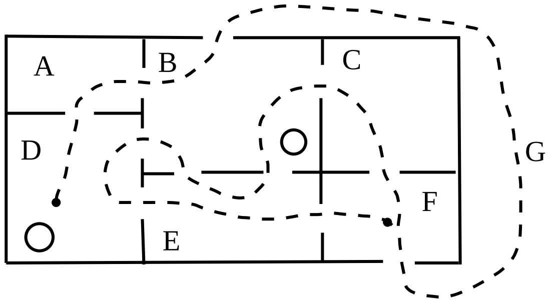
$$\overbrace{DA\underbrace{B}D}\,EF$$

$$DA\overbrace{\underbrace{B}EB}\,DEF$$

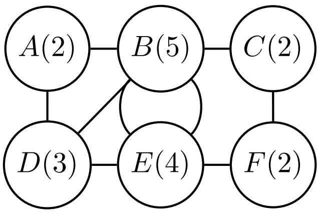
$$DA\overbrace{BGFCB}\,EBDEF$$

$$\boxed{DABGFCBEBDEF}$$

ce qui correspond à ce chemin



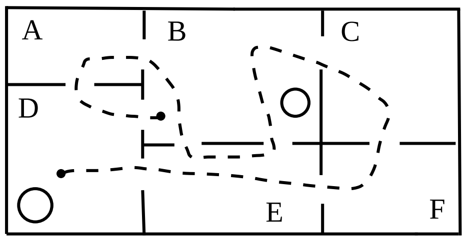
2. on modélise le problème grâce au graphe suivant :



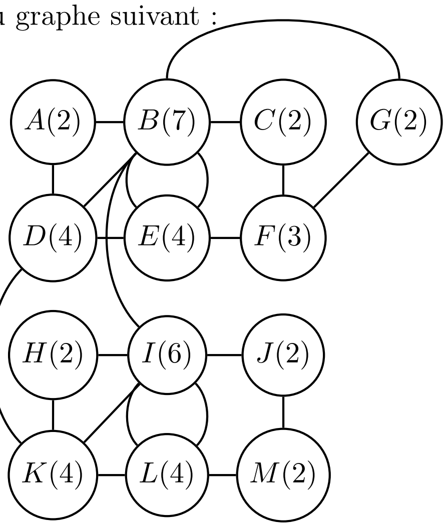
Il n'y a que deux sommets de degré impair
par conséquent, il existe une chaîne Eulérienne

$$\underbrace{D}\ B$$
$$\overbrace{D\ \underbrace{E}\ BAD}\ B$$
$$D\,\overbrace{EFCBE}\,BADB$$
$$\boxed{DEFCBEBADB}$$

ce qui correspond au chemin suivant



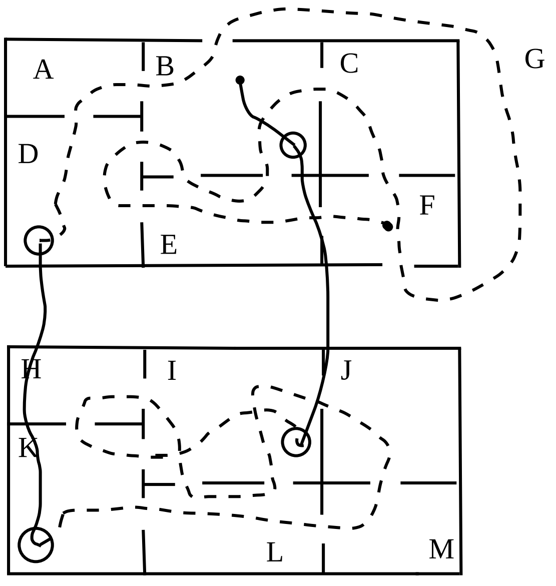
3. on modélise le problème grâce au graphe suivant :



Il n'y a que deux sommets de degré impair
par conséquent, il existe une chaîne Eulérienne
(on utilise la chaîne du rdc à l'envers de F à D
puis on passe à l'étage avec DK
puis une chaîne Eulérienne de l'étage de K à I
puis on redescend avec IB

$$\underbrace{FEDBEBCFGBAD}K\underbrace{HIKLILMJI}B$$
$$\boxed{FEDBEBCFGBADKHIKLILMJIB}$$

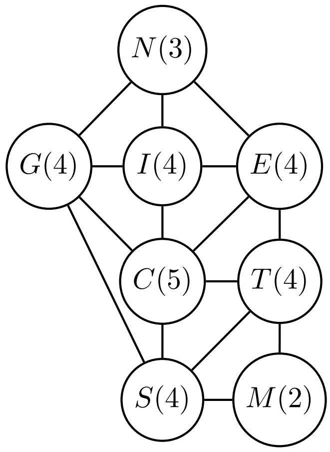
ce qui correspond au parcours suivant



4. (a) pas de circuit car tous les sommets ne sont pas de degré pair
   (b) pas de circuit car tous les sommets ne sont pas de degré pair
   (c) pas de circuit car tous les sommets ne sont pas de degré pair

corrigé exercice 7 :

1. on modélise le problème grâce au graphe suivant :



   Il n'y a que deux sommets de degré impair
   par conséquent, il existe une chaîne Eulérienne

$$\underbrace{N}IC$$
$$\overbrace{N\underbrace{G}CEN}IC$$
$$N\overbrace{G\underbrace{S}TEIG}CENIC$$
$$NG\overbrace{SMTCS}TEIGCENIC$$
$$\boxed{NGSMTCSTEIGCENIC}$$

2. pas de circuit car tous les sommets ne sont pas de degré pair

corrigé exercice 8 :

corrigé exercice 9 :

3 graphe orienté, matrice d'adjacence, graphe étiqueté

3.1 activités

3.1.1 activité 1

Championnats du monde de handball

Lors des championnats du monde de handball masculin de 2011, la poule B était constituée des équipes suivantes : Autriche (notée ① par la suite), Brésil (②), Hongrie (③), Islande (④), Japon (⑤), Norvège (⑥).
Voici les résultats des matchs de la poule B.

Islande	32 25	Hongrie	Brésil	26 34	Islande	Norvège	26 25	Brésil
Norvège	35 29	Japon	Hongrie	38 24	Brésil	Autriche	23 26	Islande
Autriche	34 24	Brésil	Norvège	33 27	Autriche	Brésil	32 33	Japon
Hongrie	26 23	Norvège	Islande	36 22	Japon	Islande	29 22	Norvège
Japon	33 30	Autriche	Japon	24 28	Hongrie	Autriche	30 32	Hongrie

On se propose d'établir le classement de la poule B à l'aide des graphes.

1 Avec un graphe orienté

a) Schématiser les résultats de cette poule à l'aide d'un graphe orienté où chaque arête ⓘ ⟶ ⓙ signifie que l'équipe ⓘ a battu l'équipe ⓙ.

b) Recopier le tableau et compléter chaque case :

- par 1 lorsque l'équipe indiquée dans la 1re colonne a battu l'équipe indiquée dans la 1re ligne ;
- par 0 sinon.

La matrice carrée M associée à ce tableau est appelée **matrice d'adjacence** associée au graphe orienté de la question **a)**.

a battu	①	②	③	④	⑤	⑥
①	0	1				
②						
③						
④						
⑤						
⑥						

2 Propriétés de la matrice M

a) Expliquer pourquoi M n'est pas symétrique par rapport à sa première diagonale.

b) Donner une interprétation pour la situation, de :

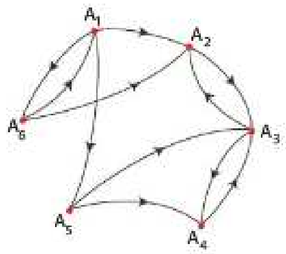
- la somme de chaque ligne de la matrice ;
- la somme de chaque colonne de la matrice ;
- la somme de tous les nombres de la matrice.

c) Sachant qu'une victoire apporte 2 points et une défaite 0 point, établir le classement de la poule B en utilisant l'une des interprétations données à la question **b)**.

3.1.2 activité 2

Liens Internet

Six amis notés $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ont chacun créé un blog pour parler de leur passion.
Chaque arête du graphe G ci-contre indique la présence d'un lien Internet pour mener à un autre de leurs blogs.



On se propose de déterminer le nombre de possibilités pour passer d'un blog à un autre en un nombre donné de clics.

a) Indiquer toutes les possibilités pour passer du blog de A_1 à chacun des autres blogs :

- en 2 clics ;
- en 3 clics.

b) M est la matrice d'adjacence du graphe orienté G.
Utiliser la calculatrice pour déterminer M^2, puis M^3.
Relier les nombres trouvés à la question **a)** à certains termes de ces matrices.

c) On admet que le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant A_i à A_j.
De combien de façons un internaute peut-il passer en 4 clics :

- du blog de A_1 au blog de A_3 ?
- du blog de A_3 au blog de A_1 ?

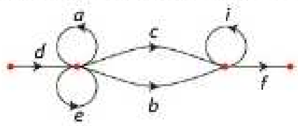
3.1.3 activité 3

Codes d'accès à un réseau informatique

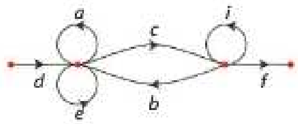
Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès.

1 Acceptation ou refus de codes

L'accès au réseau informatique est régi par l'un des **graphes étiquetés** ci-dessous. Ce sont des graphes orientés où une lettre est inscrite sur chaque arête.



Graphe G_1



Graphe G_2

On se propose de donner la liste des codes d'accès à 5 lettres obéissant à certaines règles.

Un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par *d* et terminant par *f*, associé à une chaîne du graphe.

Pour chacun des graphes étiquetés G_1 et G_2 ci-dessus :

a) les mots « *decif* » et « *daaeebiif* » sont-ils des codes d'accès ?

b) donner la liste des codes d'accès à 5 lettres.

2 Construction d'un graphe étiqueté

On se propose de construire un graphe étiqueté pour réaliser des codes d'accès pour 10 personnes, avec les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et *i*.

On choisit les contraintes suivantes :

- chaque code comporte 5 lettres dans l'ordre alphabétique ;
- chaque code commence par la lettre *a* et finit par la lettre *i* ;
- seules les lettres *b* et *f* peuvent être répétées.

Réaliser un graphe étiqueté pour faire ce travail et écrire une liste de 10 codes d'accès.

3.2 à retenir

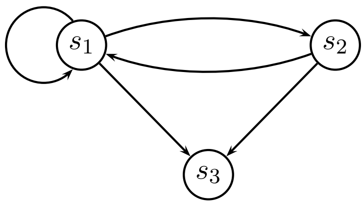
définition 5 : *(graphe orienté, boucle)*

(1) un graphe G est $\boxed{\text{orienté}}$
$\iff$ chaque arête est orientée et $\boxed{\text{ne peut-être parcourue que dans le sens de la flèche}}$

(2) une boucle est une arête dont l'origine est aussi l'extrémité

exemples :

pour le graphe G ci contre
– G est orienté par le sens des flèches
– G a une boucle de sommet s_1



définition 6 : *(matrice d'adjacence d'un graphe orienté)*

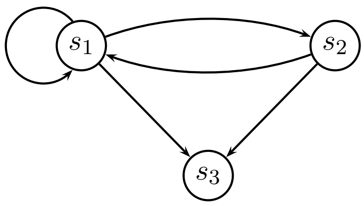
quel que soit le graphe orienté G à n sommets $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
A est matrice d'adjacence de G

$$\iff \begin{cases} A \text{ est une matrice carrée d'ordre } n \\ \text{quel que soit le coefficient } a_{ij} \text{ de la matrice } A, \begin{cases} \boxed{a_{ij} = 1} \text{ s'il } \boxed{\text{existe une arête de } s_i \text{ vers } s_j} \\ \boxed{a_{ij} = 0} \text{ s'il } \boxed{\text{n'existe pas d'arête de } s_i \text{ vers } s_j} \end{cases} \end{cases}$$

exemple

pour le graphe G,

$$\text{matrice d'adjacence} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



remarque

la matrice d'adjacence d'un graphe orienté n'est pas nécessairement symétrique

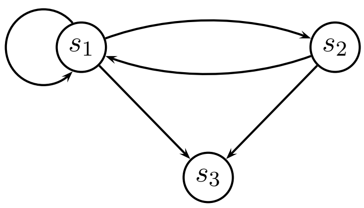
propriété 5 : *(nombre de chaînes de longueur p)*

quel que soit le graphe orienté G à n sommets $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et de matrice d'adjacence de A
$\boxed{\text{le terme } a_{ij} \text{ de la matrice } A^p}$ ou $p \in \mathbb{N}^*$
est égal
au $\boxed{\text{nombre de chaînes de longueur } p \text{ qui relient les sommets } s_i \text{ et } s_j}$

exemple

pour le graphe G,

$$\text{matrice d'adjacence} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



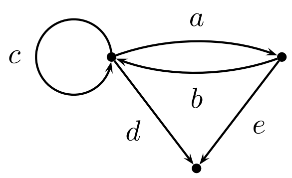
la calculatrice donne : $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a_{13} = 8$ donc 8 chaînes de longueur 5 relient s_1 à s_3

définition 7 : *(graphe étiqueté)*

un graphe orienté G est $\boxed{\text{étiqueté}}$
$\iff$ chaque arête est affectée d'une étiquette *(lettre, mot, nombre, ...)*

exemples :

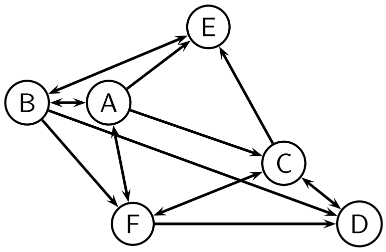
G ci contre est étiqueté



3.3 exercices

exercice 10 :

un réseau de pages web est schématisé par le graphe G ci dessous



1. déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe G
2. déterminer les matrices M^2, M^3, M^4
   (a) combien y a t-il de chemins en 2 clics de A à D ? de D à A ?
   (b) combien y a t-il de chemins en 3 clics de A à D ? de D à A ?
   (c) combien y a t-il de chemins en 4 clics de A à D ? de D à A ?
   (d) combien y a t-il de chemins en 4 clics ou moins de A à D ? de D à A ?
3. sachant que la "distance" entre deux sommets est égale à "la plus petite longueur" parmi les longueurs des chaines qui les relient,
   (a) quelle est la distance entre E et D ?
   (b) quelle est la distance entre C et A ?
4. sachant que le "diamètre" d'un graphe est égal à "la plus grande distance" parmi les distances entre les points pris 2 à 2
   quel est le diamètre du graphe ?

exercice 11 :

soit le graphe dont M est la matrice d'adjacence où $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. sans le dessiner, trouver l'ordre de ce graphe (justifier)
2. sans le dessiner, trouver si ce graphe est orienté (justifier)
3. sans le dessiner, trouver si ce graphe est complet ? (justifier)
4. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $M^4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 21 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 21 & 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 21 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 20 & 21 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   $M^5 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 60 & 61 & 61 & 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 60 & 61 & 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 61 & 60 & 61 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 61 & 61 & 60 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ $M^6 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 183 & 182 & 182 & 182 & 0 & 0 \\ 0 & 182 & 183 & 182 & 182 & 0 & 0 \\ 0 & 182 & 182 & 183 & 182 & 0 & 0 \\ 0 & 182 & 182 & 182 & 183 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 21 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

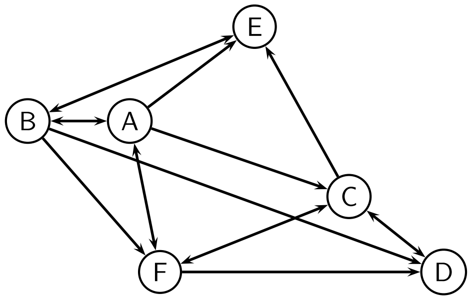
   $M^7 = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 43 \\ 0 & 546 & 547 & 547 & 547 & 0 & 0 \\ 0 & 547 & 546 & 547 & 547 & 0 & 0 \\ 0 & 547 & 547 & 546 & 547 & 0 & 0 \\ 0 & 547 & 547 & 547 & 546 & 0 & 0 \\ 43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 43 \\ 43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 42 \end{pmatrix}$

   (a) la distance entre A et B est-elle comprise entre 1 et 7 ? supérieure ou égale à 8 ? quelle valeur peut-on donner ?
   (b) sans le dessiner, trouver si ce graphe est connexe ?
   (c) dessiner le graphe G

3.4 corrigés exercices

corrigé exercice 10 :

un réseau de pages web est schématisé par le graphe G ci dessous



1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. la calculatrice donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 & 15 & 14 & 14 \\ 8 & 9 & 15 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 11 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

   (a) nombre de chemins en 2 clics de A à D : $M^2_{14} = 3$

   nombre de chemins en 2 clics de D à A : $M^2_{41} = 0$

   (b) nombre de chemins en 3 clics de A à D : $M^3_{14} = 4$

   nombre de chemins en 3 clics de D à A : $M^3_{41} = 1$

   (c) nombre de chemins en 4 clics de A à D : $M^4_{14} = 15$

   nombre de chemins en 4 clics de D à A : $M^4_{41} = 1$

   (d) nombre de chemins en 4 clics ou moins de A à D : $3 + 4 + 15 = 22$

   nombre de chemins en 4 clics ou moins de D à A : $0 + 1 + 1 = 2$

3. sachant que la "distance" entre deux sommets est égale à "la plus petite longueur" parmi les longueurs des chaines qui les relient,

   (a) la distance entre E et D est égale à 2

   (b) la distance entre C et A est égale à 2

4. sachant que le "diamètre" d'un graphe est égal à "la plus grande distance" parmi les distances entre les points pris 2 à 2, le diamètre du graphe est 3
   en effet, il est de diamètre inférieur ou égal à 4 (plus de 0 dans M^4)
   il est de diamètre supérieur strict à 2 (pas de chaine de longueur 1 ou 2 entre D et A)
   les seuls couples de points associés aux 0 de M^3 ne sont pas associés à des 0 dans M^2 donc le diamètre du graphe est inférieure ou égal à 3
   le diamètre est donc égal à 3

corrigé exercice 11 :

4 graphes pondérés

4.1 activités

4.1.1 activité 1

Le plus court ou le moins cher

Sur une carte autoroutière, on a lu que pour se rendre d'une ville D à une ville A, on peut passer par la ville B ou par la ville C.

On se propose de déterminer à l'aide d'un graphe, le trajet le plus court ou le moins cher en péage pour aller de D à A.

1 Trajet le plus court

Voici les distances séparant deux villes par les autoroutes existantes :

- de D à C : 210 km ;
- de D à B : 420 km ;
- de C à A : 420 km ;
- de B à A : 200 km ;
- de C à B : 105 km.

a) Réaliser un graphe étiqueté dont les sommets sont les villes et les étiquettes les distances entre les villes reliées.
On dit qu'il s'agit d'un graphe pondéré.

b) Déterminer le trajet le plus court pour aller de D à A.

2 Trajet le moins cher

a) Réaliser le graphe pondéré de la situation précédente en remplaçant les distances par les prix des péages, qui sont les suivants :

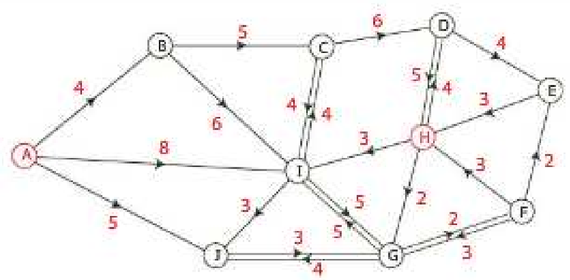
- 20 € de D à C ;
- 19 € de C à A ;
- 40 € de B à A ;
- 45 € de D à B ;
- 20 € de C à B.

b) Quel est le trajet pour lequel la somme dépensée en péage est minimale ?

4.1.2 activité 2

1 Recherche de la plus courte chaîne

Ce graphe pondéré indique la durée du trajet en minutes selon les rues empruntées dans un quartier d'une ville. Lorsqu'une rue à double sens rejoint deux lieux, il se peut qu'elle soit plus empruntée dans un sens que dans l'autre, d'où des durées différentes dans chaque sens.



On se propose de déterminer le trajet de A à H de durée minimale.

1 Poids d'une chaîne

Le **poids** d'une chaîne est la somme des durées inscrites sur les arêtes qui la composent.
Quel est le poids de chacune des chaînes ci-dessous :

- A B J I H ?
- A K I F H ?

2 Algorithme de Dijkstra-Moore

Cet algorithme permet de déterminer le trajet de poids minimal, appelé **plus courte chaîne**, menant de A à H.

Étape	Tâches à effectuer
1	• Placer tous les sommets du graphe dans la 1re ligne d'un tableau. • Sur la 2e ligne du tableau, écrire le coefficient 0 sous le sommet de départ et le coefficient ∞ sous les autres sommets.
2	• Sur la dernière ligne écrite, repérer le sommet X de coefficient minimal. • Commencer une nouvelle ligne et rayer toutes les cases vides sous X.
3	• Pour chaque sommet Y adjacent à X, calculer la somme P du coefficient de X et du poids de l'arête reliant Y à X. • Si P est strictement inférieur au coefficient de Y, inscrire P_X dans la case correspondante de la colonne Y. • Sinon, inscrire le coefficient de Y et compléter la ligne par des coefficients de la ligne précédente.
4	• S'il reste des sommets non sélectionnés, recommencer à l'étape 2. • Sinon, passer à l'étape 5.
5	• La longueur minimale est le nombre lu sur la dernière ligne du tableau.

Recopier et compléter le tableau commencé ci-contre en suivant les étapes de l'algorithme.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
|	4_A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8_A	5_A

3 Conclusion

Sur le tableau précédent, lire la durée minimale du trajet pour aller de A à H et préciser cette plus courte chaîne.

4.2 à retenir

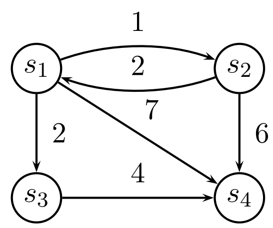
définition 8 : *(graphe pondéré)*

(1) un graphe G est $\boxed{\text{pondéré}}$ $\iff \begin{cases} G \text{ est étiqueté} \\ \text{chaque étiquette est un nombre positif} \end{cases}$

(2) le $\boxed{\text{poids}}$ d'une chaine est la $\boxed{\text{somme des poids}}$ *(étiquettes)* des arêtes qui la compose

(3) une $\boxed{\text{plus courte chaîne}}$ entre deux sommets est une $\boxed{\text{chaine de poids minimal}}$ qui relie ces sommets

exemples :



pour le graphe pondéré G ci contre
- la chaîne $s_1s_2s_4$ a pour poids $1+6=7$
- la plus courte chaîne entre s_1 et s_4 est $s_1s_3s_4$ avec un poids de 6

propriété 6 : (algorithme de Dijkstra et chaîne de poids minimal)

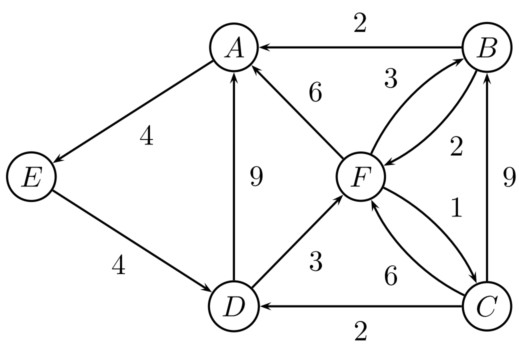
quel que soit le graphe pondéré connexe G,
l'algorithme suivant donne la liste des chaines les plus courtes à partir d'un sommet
jusqu'à un autre sommet quelconque du graphe

début
.placer les noms des sommets sur la première ligne d'un tableau *(sommet de départ s_1 en premier)*,
avec une dernière colonne pour écrire les chaînes les plus courtes.
.2^e ligne : écrire la chaîne $s_1(0)$ dans la colonne de s_1
puis cocher cette chaîne dans le tableau et cocher la colonne du tableau de cette chaîne.
.3^e ligne : pour chaque sommet s_i adjacent à s_1 dans une colonne non cochée, écrire la chaîne $s_1s_i(p)$
où p_{1i} est la poids de la chaîne s_1s_i,
écrire dans la dernière colonne la *(les)* chaîne la plus courte non cochée avec son poids $s_1s_k(p)$,
puis cocher cette chaîne dans le tableau et cocher la colonne de cette chaîne.
.(*) ligne suivante, pour chaque sommet s_i dans une colonne non cochée et adjacent au *(aux)* dernier(s)
sommet(s) de la *(les)* chaîne(s) la (les) plus courte(s) précédente(s) *(ici s_k)*,
écrire la chaîne $s_1s_ks_i(p)$ où p est le poids de la chaîne $s_1s_ks_i$,
écrire dans la dernière colonne la *(les)* chaîne(s) la (les) plus courte(s) parmi les chaînes non cochées
des colonnes non cochées présentes dans le tableau avec son poids *(ex : $s_1s_ks_m(p)$)*,
puis cocher cette chaîne dans le tableau et cocher la colonne de cette chaîne.
. lignes suivantes, et jusqu'à ce que toutes les colonnes soient cochées :
on reprend (*) *(à partir du (des) dernier(s) sommet(s) de la (les) chaîne(s) la (les) plus courte(s)*
précédente(s))
fin

les chaines les plus courtes à partir de s_1 sont dans la dernière colonne ainsi que leurs poids

exemple :

pour le graphe G,
on cherche la chaîne la plus courte à partir de C jusqu'à E

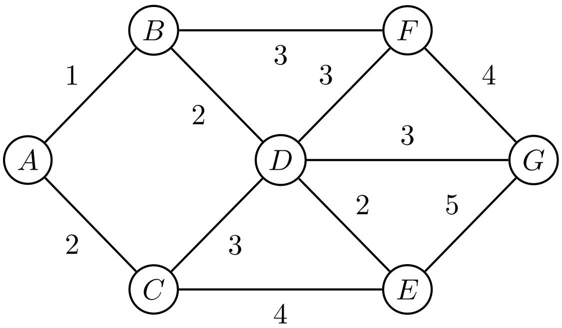


On utilise l'algorithme de Dijkstra :

C	B	F	D	E	A	chaînes minimales
$\boxed{\text{C(0)}}$						C(0)
×	CB(9)	CF(6)	$\boxed{\text{CD(2)}}$			CD(2)
×		$\boxed{\text{CDF(5)}}$	×		CDA(11)	CDF(5)
×	$\boxed{\text{CDFB(8)}}$	×	×		CDFA(11)	CDFB(8)
×	×	×	×		CDFBA(10)	CDFBA(10)
×	×	×	×	$\boxed{\text{CDFBAE(14)}}$	×	CDFBAE(14)
×	×	×	×	×	×	

la chaîne la plus courte de C à E est donc $CDFBAE$ avec un poids de 14
la chaîne la plus courte de C à A est donc $CDFBA$ avec un poids de 10
la chaîne la plus courte de C à B est donc $CDFB$ avec un poids de 8
la chaîne la plus courte de C à F est donc CDF avec un poids de 5
la chaîne la plus courte de C à D est donc CD avec un poids de 2

autre exemple
on cherche la chaîne la plus courte à partir de A jusqu'à G



algorithme de Dijkstra :

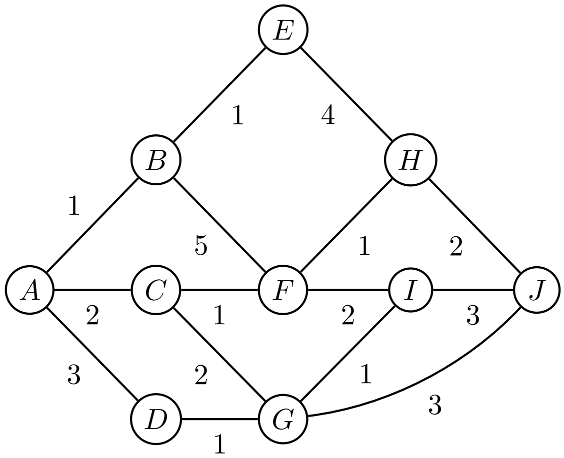
A	B	C	D	E	F	G	chaînes mini
$\boxed{\text{A(0)}}$							A(0)
×	$\boxed{\text{AB(1)}}$	$\boxed{\text{AC(2)}}$					$\boxed{\text{AB(1)}}$
×	×		$\boxed{\text{ABD(3)}}$		$\boxed{\text{ABF(4)}}$		$\boxed{\text{AC(2)}}$
×	×	×	ACD(5)	ACE(6)			$\boxed{\text{ABD(3)}}$
×	×	×	×	$\boxed{\text{ABDE(5)}}$		$\boxed{\text{ABDG(6)}}$	$\boxed{\text{ABF(4)}}$
×	×	×	×		×	ABFG(8)	$\boxed{\text{ABDE(5)}}$
×	×	×	×	×	×	ABDEG(11)	$\boxed{\text{ABDG(6)}}$
×	×	×	×	×	×		

la chaîne la plus courte de A à G est donc $ABDG$ avec un poids de 6
la chaîne la plus courte de A à B est donc AB avec un poids de 1
la chaîne la plus courte de A à C est donc AC avec un poids de 2
la chaîne la plus courte de A à D est donc ABD avec un poids de 3
la chaîne la plus courte de A à E est donc $ABDE$ avec un poids de 5
la chaîne la plus courte de A à F est donc ABF avec un poids de 4

4.3 exercices

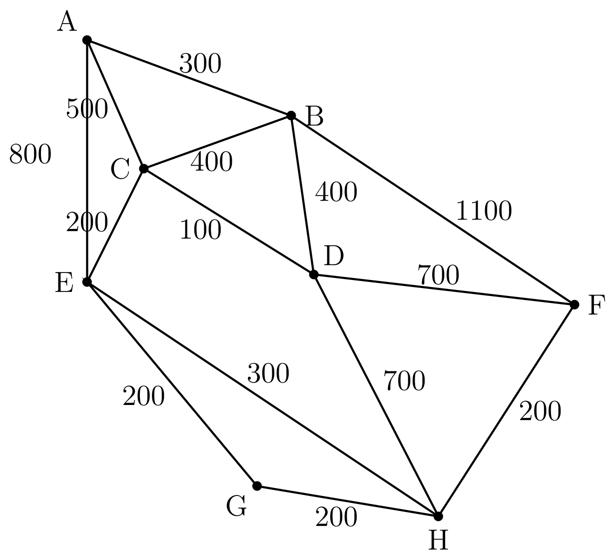
exercice 12 :

déterminer la chaîne la plus courte à partir de A jusqu'à J en utilisant l'algorithme de Dijkstra



exercice 13 :

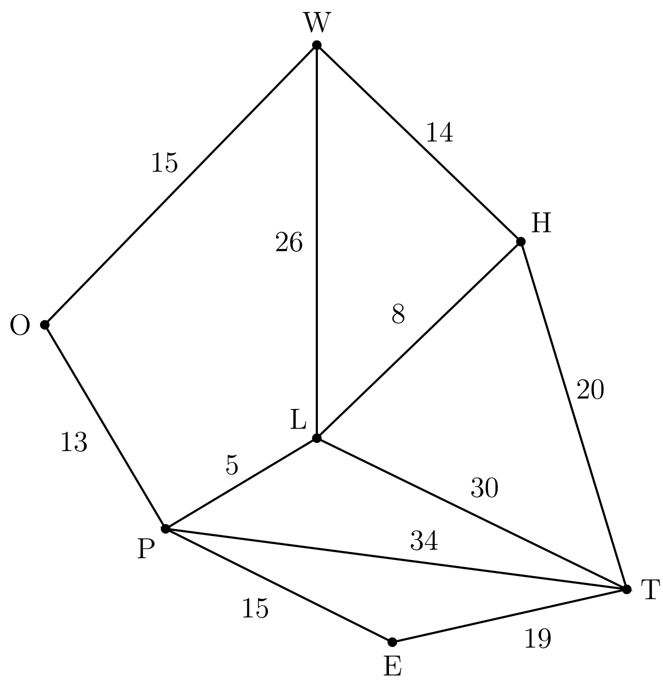
Des contraintes de calendrier imposent d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.
Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).
Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.



exercice 14 : (Voyage scolaire)

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre. Plusieurs sites de Londres sont visités : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe Γ donné (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites) .
Les élèves sont laissés en autonomie deux heures. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes sont sur le graphe. Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

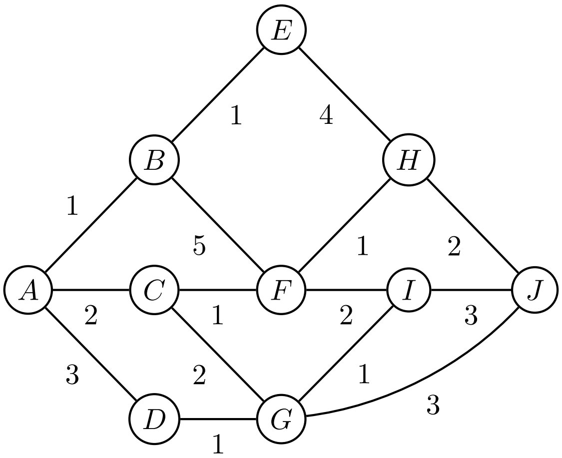
1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme. Arthur sera-t-il en retard ?



4.4 corrigés exercices

corrigé exercice 12 :

déterminer la chaîne la plus courte à partir de A jusqu'à J en utilisant l'algorithme de Dijkstra



algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	chaînes mini
A(0)										A(0)
×	AB(1)	AC(2)	AD(3)							AB(1)
×	×	×	×	ABE(2)	ABF(6)					AC(2) ABE(2)
×	×	×	×	×	ACF(3)	$\overline{ACG}(4)$	ABEH(6)			ACF(3) AD(3)
×	×	×	×	×	×	$\overline{ADG}(4)$	$\overline{ACFH}(4)$	ACFI(5)		ADG(4) ACG(4) ACFH(4)
×	×	×	×	×	×	×	×	ACGI(5)	ACGJ(7)	
×	×	×	×	×	×	×	×	ADGI(5)	ADGJ(7)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACFHJ(6)	ACFI(5) ACGI(5) ADGI(5)
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACFIJ(8)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACGIJ(8)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ADGIJ(8)	ACFHJ(6)

la chaîne la plus courte de A à J est donc $ACFHJ$ avec un poids de 6

corrigé exercice 13 :

corrigé exercice 14 :

5 graphe probabiliste, matrice de transition, état stable

5.1 activités

5.1.1 activité 1

2 Gestion municipale

Un village a la charge de l'entretien d'une route. Lors du dernier conseil municipal de l'année, la route peut être déclarée dans un état correct (C) ou un état détérioré (D) ou un état neuf (N). Les statistiques municipales montrent que, d'une année à l'autre, l'état de la route peut évoluer selon les aléas (météo, trafic, travaux, budget du conseil municipal…) comme indiqué ci-dessous.

- Étant dans un état correct, elle peut le rester avec une probabilité de 0,72 ou devenir détériorée avec une probabilité de 0,28.
- Étant dans un état détérioré, elle peut le rester avec une probabilité de 0,33 ou être refaite à neuf avec une probabilité de 0,67.
- Étant dans un état neuf, elle peut le rester avec une probabilité de 0,59 ou passer à un état correct avec une probabilité de 0,41.

Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, on note C_n (resp. D_n ou N_n) l'événement « La route est dans un état correct (resp. détérioré ou neuf) l'année 2008 + n ».

On note $p_n = P(C_n)$, $q_n = P(D_n)$ et $r_n = P(N_n)$.

À son élection en 2008, le nouveau maire considère que la route peut être dans l'un des trois états avec la même probabilité. Ainsi $p_0 = q_0 = r_0 = \frac{1}{3}$.

On se propose d'étudier l'évolution de la probabilité de l'état de la route.

1 Utilisation d'un arbre pondéré

a) Représenter les situations de 2008 et 2009 à l'aide d'un arbre pondéré, puis calculer p_1, q_1 et r_1.

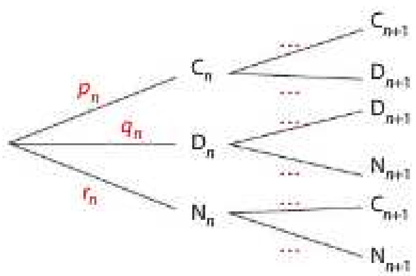
b) Calculer de même p_2, q_2 et r_2.

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

d) Expliquer pourquoi :

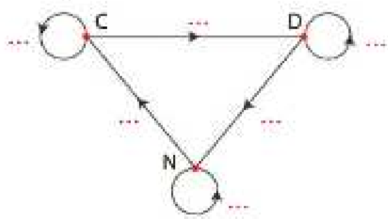
$$p_{n+1} = 0{,}72p_n + 0{,}41r_n$$

Établir des relations analogues pour q_{n+1} et r_{n+1}.



2 Utilisation d'un graphe probabiliste

a) Recopier et compléter le graphe pondéré ci-contre par les probabilités conditionnelles qui traduisent les changements d'état d'une année à l'autre.



b) Calculer la somme des probabilités des arêtes issues du sommet C, puis de N et de D.

c) Reproduire et compléter le tableau ci-contre.
La matrice M qui résume ce tableau est appelée **matrice de transition**.

	C	D	N
C	0,72		
D			
N			

d) Pour tout nombre entier naturel n, **l'état probabiliste** l'année $2008 + n$ est la matrice ligne $P_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$.

Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Vérifier en utilisant les résultats de la question **1**, que :

- $P_0 \times M = P_1$
- $P_1 \times M = P_2$
- $P_n \times M = P_{n+1}$

e) On peut montrer de proche en proche et on admet ici que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathbf{P_n = P_0 \times M^n}$.
Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste de cette route à la fin du mandat du maire en 2014. Interpréter ce résultat.

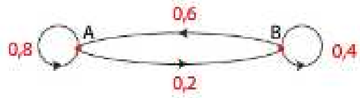
f) Observer des valeurs approchées des matrices P_{10}, P_{15} et P_{20}.
Conjecturer un état « limite » $P = (x \quad y \quad z)$ vers lequel semble converger l'état d'une route au bout d'un grand nombre d'années.

g) Modifier l'état probabiliste P_0 et analyser si l'évolution à long terme semble dépendre ou non de l'état initial.

5.1.2 activité 2

Recherche de l'état stable

Voici un graphe probabiliste à deux états.
Pour tout nombre entier naturel n, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste au bout de n évolutions.



On se propose de savoir s'il existe un état probabiliste P stable, c'est-à-dire tel que $P \times M = P$ où M est la matrice de transition.

1 Avec les suites

a) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}6b_n$.

b) Sachant que $a_n + b_n = 1$, en déduire que $a_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}6$.

c) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}75$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2. En déduire les limites des suites (u_n), (a_n) puis (b_n) quelque soit l'état probabiliste initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

d) En déduire la matrice P vers laquelle converge la suite (P_n).

2 Avec les matrices

a) Écrire la matrice de transition M du graphe.

b) On note $P = (x \quad y)$ avec $x + y = 1$.
Écrire l'égalité matricielle $P \times M = P$ sous forme d'un système **(S)**.

c) Montrer que **(S)** est équivalent à $\begin{cases} -0{,}2x + 0{,}6y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

d) Résoudre **(S)**. Vérifier la cohérence du résultat avec la question **1 d)**.

5.1.3 activité 3

Évolution d'une maladie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'être atteint par une maladie.
Il peut être, au cours d'un mois donné, dans l'un des trois états suivants :
i : immunisé ; m : malade ; s : pas malade et pas immunisé.
On sait que d'un mois sur l'autre, son état peut changer selon la règle suivante :

- étant immunisé, il peut le rester avec la probabilité 0,9 ou passer à l'état s avec la probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état s, il peut le rester avec la probabilité 0,5 ou passer à l'état m avec la probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec la probabilité 0,2 ou passer à l'état i avec la probabilité 0,8.

On se propose d'étudier l'évolution de la maladie afin de lancer ou non une campagne de vaccination, puis d'en mesurer les effets.

1 Un graphe probabiliste

a) Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets i, m et s.
b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

2 Décision de vaccination

Les autorités médicales de la région décident qu'elles procéderont à une vaccination de la population si les prévisions conduisent à une probabilité supérieure à 0,09 pour qu'un individu choisi au hasard soit malade.
On admet que quelque soit l'état probabiliste initial, l'évolution de l'état probabiliste se stabilise autour de la matrice $P = (a \quad b \quad c)$ telle que $P = P \times M$ et $a + b + c = 1$.
Traduire cette égalité matricielle par un système d'équations.
Résoudre ce système et conclure quant à la décision de vaccination.

3 Évaluation des effets de la vaccination

La vaccination a modifié l'évolution de la maladie selon les règles suivantes :

- étant immunisé, un individu peut le rester avec une probabilité de 0,95 ou passer à l'état s ;
- étant dans l'état s, un individu peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état m avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état i ;
- étant dans l'état m, un individu peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état i.

a) Représenter cette situation par un nouveau graphe probabiliste dont on donnera la matrice de transition M′.
b) On admet que ce graphe probabiliste possède un état stable P′.
Déterminer cet état stable et conclure quant à l'efficacité de la vaccination.

5.2 à retenir

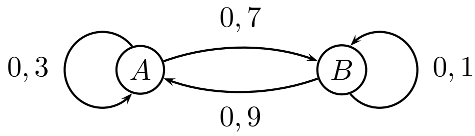
définition 9 : *(graphe probabiliste)*

le graphe G est $\boxed{\text{probabiliste}}$
$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{G est } \boxed{\text{orienté}} \\ \text{G est } \boxed{\text{pondéré}} \\ \text{pour chaque sommet, la } \boxed{\text{somme des poids des arêtes sortantes vaut 1}} \\ \text{pour chaque couple de sommets i et j , il existe au plus une arête de i vers j} \end{cases}$$

exemple :

le graphe G ci contre est probabiliste
0,3 + 0,7 = 1 et 0,9 + 0,1 = 1

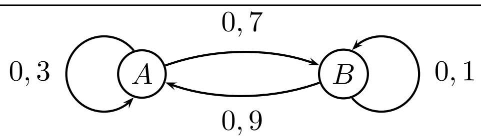


définition 10 : *(matrice de transition)*

la matrice de transition d'un graphe probabiliste G d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice M, carrée d'ordre n où le coefficient M_{ij} est tel que :

$$M_{ij} = \begin{cases} \text{poids de l'arête qui va de } i \text{ vers } j \text{ si cette arête existe} \\ 0 \text{ s'il n'y a pas d'arête de } i \text{ vers } j \end{cases}$$

exemple :



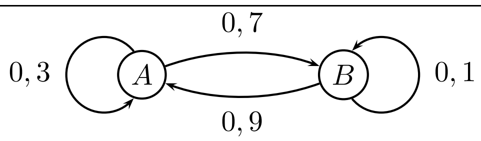
a pour matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

remarque : la somme des coefficients des lignes vaut toujours 1

propriété 7 : *(état probabiliste à l'étape n)*

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste G
Soit P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial
P_n est l'état probabiliste à l'étape $n \Longrightarrow \boxed{P_n = P_0 \times M^n}$

exemple :



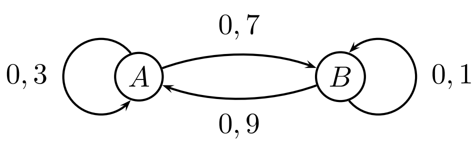
matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

état initial : $P_0 = (0,4; 0,6)$
on a alors : $P_2 = P_0 \times M^2 = (0,504; 0,496)$ *(calculatrice)*

propriété 8 : *(état stable)*

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste G d'ordre 2
Si M ne comporte pas de 0
alors la suite (P_n) converge vers un état $P = (x; y)$ avec $x + y = 1$ qui vérifie l'équation matricielle
$\boxed{P = P \times M}$
P est appelé "l'état stable"

exemple :



$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

5.3 exercices

exercice 15 :

on souhaite étudier l'évolution des populations respectives dans les deux seules régions X et Y d'un pays P sachant que :
_la population est supposée rester constante pour les prochaines années
_au départ (année de rang 0) : 25% de la population du pays est dans la région X (donc 75% en Y)
_chaque année, la probabilité qu'un individu quelconque de la région X parte pour la région Y est de 5%
_chaque année, la probabilité qu'un individu quelconque de la région Y parte pour la région X est de 20%

1. représenter cette situation par un graphe probabiliste
2. donner la matrice de transition M ainsi que le vecteur ligne P_0 correspondant à l'état initial
3. donner l'état probabiliste à l'étape 1 puis 2 puis 20
4. que semble devenir l'état probabiliste quand n est de plus en plus grand ?
5. justifier que la suite (P_n) converge vers un état stable et déterminer cet état stable puis interpréter ce résultat dans le contexte

exercice 16 :

on souhaite étudier l'évolution des populations respectives dans les trois seules régions X et Y d'un pays P sachant que :
_la population est supposée rester constante pour les prochaines années
_au départ, 20% de la population du pays est dans la région X, 30% est en Y et le reste en Z
_chaque année, 90% de la population de X reste en X et le reste part pour Y
_chaque année, 50% de la population de Y reste en Y et le reste part pour Z
_chaque année, 20% de la population de Z reste en Z et le reste part pour X

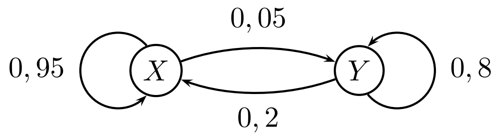
1. représenter cette situation par un graphe probabiliste
2. donner la matrice de transition M ainsi que le vecteur ligne P_0 correspondant à l'état initial
3. donner l'état probabiliste à l'étape 1 puis 2 puis 20
4. que semble devenir l'état probabiliste quand n est de plus en plus grand ?
5. on admet que la suite (P_n) converge vers un état stable $P = (x; y; z)$ tel que $x + y + z = 1$
   déterminer cet état stable sachant qu'il vérifie l'équation matricielle $P = PM$ puis interpréter ce résultat dans le contexte

5.4 corrigés exercices

corrigé exercice 15 :

on souhaite étudier l'évolution des populations respectives dans les deux seules régions X et Y d'un pays P sachant que :
_la population est supposée rester constante pour les prochaines années
_au départ (année de rang 0) : 25% de la population du pays est dans la région X (donc 75% en Y)
_chaque année, la probabilité qu'un individu quelconque de la région X parte pour la région Y est de 5%
_chaque année, la probabilité qu'un individu quelconque de la région Y parte pour la région X est de 20%

1. représenter cette situation par un graphe probabiliste



2. donner la matrice de transition M ainsi que le vecteur ligne P_0 correspondant à l'état initial
   $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ état initial : $P_0 = (0,25; 0,75)$

3. donner l'état probabiliste à l'étape 1 puis 2 puis 20
   $P_1 = P_0 \times M^1 = (0,3875; 0,6125)$
   $P_2 = P_0 \times M^2 = (0,490625; 0,509375)$
   $P_{20} = P_0 \times M^{20} = (\simeq 0,8; \simeq 0,2)$

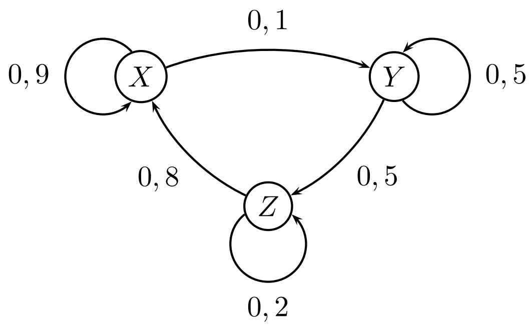
4. que semble devenir l'état probabiliste quand n est de plus en plus grand ?

   il semble converger vers $(0,8; 0,2)$

5. justifier que la suite (P_n) converge vers un état stable et déterminer cet état stable puis interpréter ce résultat dans le contexte
   M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste G d'ordre 2
   M ne comporte pas de 0
   donc (propriété du cours), la suite (P_n) converge vers un état $P = (x; y)$ avec $x + y = 1$ qui vérifie l'équation matricielle $\boxed{P = P \times M}$
   il suffit de trouver P
   $P = P \times M$ et $x + y = 1 \iff \begin{cases} x = 0,95x + 0,2y \\ y = 0,05x + 0,8y \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,05x - 0,2y = 0 \\ 0,05x - 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,05x - 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$
   ce qui équivaut aux système matriciel $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,05 & -0,2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   que l'on résoud à la calculatrice en calculant $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$
   on a donc : état stable $= P = (0,8; 0,2)$
   ce qui se traduit par le fait, qu'à long terme, la répartition dans les deux villes se rapproche de 80% en X et 20% en Y

corrigé exercice 16 :

1. représenter cette situation par un graphe probabiliste



2. donner la matrice de transition M ainsi que le vecteur ligne P_0 correspondant à l'état initial
$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$ état initial : $P_0 = (0,2; 0,3; 0,5)$

3. donner l'état probabiliste à l'étape 1 puis 2 puis 20
$P_1 = P_0 \times M^1 = (\simeq 0,58; \simeq 0,17; \simeq 0,25)$
$P_2 = P_0 \times M^2 = (\simeq 0,72; \simeq 0,14; \simeq 0,14)$
$P_{20} = P_0 \times M^{20} = (\simeq 0,75; \simeq 0,15; \simeq 0,09)$

4. que semble devenir l'état probabiliste quand n est de plus en plus grand ?

il semble converger vers $(\simeq 0,75; \simeq 0,15; \simeq 0,09)$

5. la suite (P_n) converge vers un état $P = (x; y; z)$ avec $x + y + z = 1$ qui vérifie l'équation matricielle $\boxed{P = P \times M}$
il suffit de trouver P
$P = P \times M$ et $x + y + z = 1 \iff \begin{cases} x = 0,9x + 0y + 0,8z \\ y = 0,1x + 0,5y + 0z \\ z = 0x + 0,5y + 0,2z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1x + 0y - 0,8z = 0 \\ -0,1x + 0,5y - 0z = 0 \\ 0x - 0,5y + 0,8z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} -0,1x + 0,5y - 0z = 0 \\ 0x - 0,5y + 0,8z = 0 \qquad (\text{car } l_2 + l_3 = -l_1) \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
ce qui équivaut au système matriciel $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
que l'on résoud à la calculatrice en calculant $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \simeq 0.754716981132 \\ \simeq 0.150943396226 \\ \simeq 0.094339 \end{pmatrix}$
on a donc : état stable $= P = (\simeq 0,754716981132; \simeq 0,150943396226; \simeq 0,094339)$
ce qui se traduit par le fait, qu'à long terme, la répartition dans les trois villes se rapproche de $\simeq 75,5\%$ en X, $\simeq 15,1\%$ en Y et $\simeq 9,4\%$

5.5 travaux pratiques

5.5.1 tableur

Nom :

TP : $\boxed{\text{Graphes : transition et évolution de population}}$

1. ouvrir une feuille de calcul de type tableur *(Excel)*
2. sauvegarder cette feuille de calcul sous le nom "tp_graphe _probabiliste _transition" dans votre dossier "Mes Documents" dans le sous-dossier appelé "Math" *(créé au préalable)*
3. le but est d'utiliser cette feuille de calcul pour étudier l'évolution des populations respectives dans les deux seules régions X et Y d'un pays P sachant que :
   _la population du pays reste constante et égale à 1 million d'habitants pour les années à venir
   _au départ (année de rang 0) : 25% de la population du pays est dans la région X (donc 75% en Y)
   _chaque année, 5% de la population de X part pour Y
   _chaque année, 20% de la population de Y part pour X
   (a) recopier dans cette feuille de calcul le contenu des cellules comme indiqué ci dessous

	A	B	C	D
1	transition de X vers Y (en proportion)	0,05		
2	transition de Y vers X (en proportion)	0,20		
3				
4	prop de la pop totale en X au départ	0,25		
5				
6	rang de l'année	prop de la pop totale en X	prop de la pop totale en Y	total
7	0			
8				

   (b) on souhaite obtenir dans la colonne A, de la cellule $A7$ à la cellule $A30$, les valeurs des rangs (de 0 à 23) des années pour les 23 années à venir, pour cela entrer dans la cellule $A8$ la formule : $= A7 + 1$ puis, tirer la formule vers le bas jusqu'à $A29$ et constater que cela fonctionne !
   (c) on souhaite obtenir les valeurs des colonnes B, C et D
      i. entrer dans la cellule $B7$ la formule : $= B4$
      ii. entrer dans la cellule $C7$ la formule : $= 1 - B4$
      iii. entrer dans la cellule $D7$ la formule : $= B7 + C7$
      iv. entrer dans la cellule $B8$ la formule : $= B7 * (1 - B\$1) + C7 * B\$2$
      à quoi servent les dollars ? : ...
      v. entrer dans la cellule $C8$ la formule qu'il faut et la recopier ci dessous : ...
      vi. entrer dans la cellule $D8$ la formule qu'il faut et la recopier ci contre : ...
      vii. sélectionner la plage de cellules A8 :D8 puis étirer cette plage de cellules jusqu'à la ligne 30
   (d) on souhaite obtenir la représentation graphique de l'évolution des populations dans un repère
      i. sélectionner la plage de cellules $A7 : B30 puis$ → insertion → graphique → Nuages de points → Nuage de points reliés par une courbe → terminer
      ii. déplacer le graphique sur la plage de cellules $E6 : J30$
   (e) que semble t-il se passer à long terme pour la population $\begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \\ \text{de la ville Y ? : ...} \end{cases}$
   (f) si au départ : 0% de la population du pays est dans la région X (mettre 0 en B4)
      que semble t-il se passer à long terme pour la population $\begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \\ \text{de la ville Y ? : ...} \end{cases}$
   (g) de même si au départ : $10\%, 40\%, 50\%, 90\%, 100\%$ de la population du pays est dans la région X
      que semble t-il se passer à long terme pour la population $\begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \\ \text{de la ville Y ? : ...} \end{cases}$
   (h) à long terme, les populations dépendent-elles des populations initiales ? : ...
   (i) que se passe t-il à long terme si on prend pour proportions de transitions 10% et 10% ? : ...
   (j) que se passe t-il à long terme si on prend pour proportions de transitions 10% et 0% ? : ...

4. ouvrir un nouvel onglet
   (a) le but est d'utiliser cette feuille de calcul pour étudier l'évolution des populations respectives dans les trois seules régions X, Y et Z d'un pays P sachant que :
   _la population du pays reste constante et égale à 1 million d'habitants pour les années à venir
   _au départ, 20% de la population du pays est dans la région X, 30% est en Y et le reste en Z
   _chaque année, 90% de la population de X reste en X et le reste part pour Y
   _chaque année, 50% de la population de Y reste en Y et le reste part pour Z
   _chaque année, 20% de la population de Z reste en Z et le reste part pour X

5. utiliser une feuille de calcul pour déterminer se qui se passe à long terme pour chacune des villes.

$$\text{à long terme, la population} \begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \text{de la ville Y ? : ...} \\ \text{de la ville Z ? : ...} \end{cases}$$

6. utiliser une feuille de calcul pour déterminer se qui se passe à long terme pour chacune des villes si au départ, 100% de la population du pays est dans la région X

$$\text{à long terme, la population} \begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \text{de la ville Y ? : ...} \\ \text{de la ville Z ? : ...} \end{cases}$$

7. utiliser une feuille de calcul pour déterminer se qui se passe à long terme pour chacune des villes si au départ, 100% de la population du pays est dans la région Y

$$\text{à long terme, la population} \begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \text{de la ville Y ? : ...} \\ \text{de la ville Z ? : ...} \end{cases}$$

8. utiliser une feuille de calcul pour déterminer se qui se passe à long terme pour chacune des villes si au départ, 100% de la population du pays est dans la région Z

$$\text{à long terme, la population} \begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \text{de la ville Y ? : ...} \\ \text{de la ville Z ? : ...} \end{cases}$$

9. utiliser une feuille de calcul pour déterminer se qui se passe à long terme pour chacune des villes si au départ, la répartition de la population du pays est quelconque

$$\text{à long terme, la population} \begin{cases} \text{de la ville X ? : ...} \\ \text{de la ville Y ? : ...} \\ \text{de la ville Z ? : ...} \end{cases}$$

10. à long terme, la répartition de la population semble t-elle dépendre des répartitions initiales ? ...

6 Minima

6.1 activités

6.1.1 activité 1

Problème 6 **Modèle de Leslie** B2i

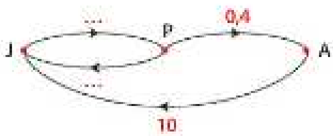
Objectif
Découvrir des modèles très utilisés dans la dynamique de population.

On s'intéresse à une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de 3 ans, répartie en trois catégories : juvéniles (J), pré-adultes (P) (rongeurs de 1 an) et adultes (A) (rongeurs de 2 ans).
On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles. On suppose que chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et 40 % de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.
En 2012, cette population de rongeurs comportait 30 juvéniles, 50 pré-adultes et 50 adultes.

On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.

1 Avec un graphe pondéré

a) Recopier et compléter le graphe pondéré ci-contre traduisant la situation.



b) Donner la matrice de transition M associée construite de manière analogue à celle d'un graphe probabiliste en choisissant comme ordre des sommets : J, P, A.

Note
Cette matrice M est appelée **matrice de Leslie**.

c) Si l'on désigne respectivement par j_n, p_n et a_n le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en 2012 + n, justifier que la situation peut se traduire par le système ci-contre.

$$\begin{cases} j_{n+1} = 6p_n + 10a_n \\ p_{n+1} = 0{,}5j_n \\ a_{n+1} = 0{,}4p_n \end{cases}$$

d) En notant X_n la matrice ligne $(j_n \quad p_n \quad a_n)$ donnant la répartition de la population en 2012 + n, vérifier que $X_{n+1} = X_nM$.

e) Montrer que $X_2 = X_0M^2$.

On admet par la suite que, pour tout nombre entier naturel n, $X_n = X_0M^n$.

f) Donner avec la calculatrice le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

2 Avec un tableur

Note
Le statisticien anglais Patrick Leslie a développé en 1945 un modèle pour décrire l'évolution du nombre de femelles chez les rongeurs qui provoquent de gros dégâts dans les réserves alimentaires.
De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes et son usage est facilité par l'emploi d'ordinateurs.

On souhaite conjecturer l'évolution de cette population à l'aide d'un tableur.

a) Réaliser cette feuille de calcul. Saisir la formule adéquate dans la cellule E2, puis les formules adéquates dans la plage B3 : E3, puis recopier vers le bas.

	A	B	C	D	E	F
1	Rang de l'année	Juvéniles	Pré adultes	Adultes	Nombre total de rongeurs	Rapport
2	0	30	50	50	130	
3	1	800	15	20	835	6,4230769
4	2					

b) Retrouver le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

c) Pour avoir une idée de l'évolution de cette population, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux trois catégories ainsi qu'à la population totale. De quel type d'évolution s'agit-il ?

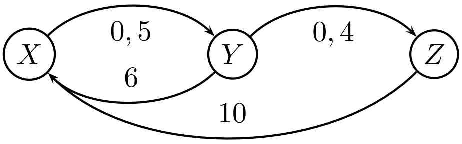
d) Dans la colonne F, on décide de faire apparaître les rapports entre le nombre total de rongeurs et le nombre total de rongeurs l'année précédente.

- Saisir en F3 la formule adéquate afin d'obtenir, par recopie vers le bas, ce rapport au cours des années suivantes.
- Quelle conjecture peut-on émettre sur l'évolution de ce rapport ? La représenter dans une nouvelle fenêtre graphique.
- Émettre alors une conjecture sur l'évolution de cette population de rongeurs.

6.1.2 corrigé activité 1

1. on suppose la durée de vie maximale de 3 ans

   (a) graphe

   (b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 6 & 0 & 0,4 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{cases} \text{nb juvéniles année n+1} = 6\times \text{ nb pré-adultes année n} + 10\times \text{ nb adultes année n} \\ \text{nb pré-adultes année n+1} = 0,5\times \text{ nb jeunes} \\ \text{nb adultes année n+1} = 0,4\times \text{ nb pré-adultes année n} \end{cases}$

   $\begin{cases} j_{n+1} = 6p_n + 10a_n \\ p_{n+1} = 0,5j_n \\ a_{n+1} = 0,4p_n \end{cases}$

   (d) $\begin{pmatrix} j_n & p_n & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 6 & 0 & 0,4 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p_n + 10a_n & 0,5j_n & 0,4p_n \end{pmatrix}$

   donc $X_{n+1} = X_n \times M$

   (e) $X_2 = X_1M = (X_0M)M = X_0M^2$

   (f) en 2027 : $n = 2027 - 2012 = 15$

   $X_{15} = X_0M^{15} = \begin{pmatrix} 6993540 & 1746205 & 350056 \end{pmatrix}$

2. avec tableur

   (a)

	A	B	C	D	E	F
1	Rang année	Juvéniles	pré-adultes	adultes	total	rapport
2	0	30	50	50	130	
3	1	800	15	20	835	6,4230769
4	2					

   A3 = A2 + 1, B3 =6*C2+10*D2, C3 =0,5*B2, D3 =0,4*C2, E3 = B3+C3+D3, F3 = E3/E2

   (b) le tableau donne : $\begin{pmatrix} 6993540 & 1746205 & 350056 \end{pmatrix}$

   (c) les croissances semblent exponentielles

   (d) le rapport semble converger vers 2
   à long terme, la population totale double chaque année

6.1.3 activité 2

Problème 7 Proies et prédateurs : le modèle de Lotka-Volterra B2i

Objectif
Découvrir un modèle important non linéaire.

On s'intéresse à l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse.
On note T_n et B_n une estimation du nombre de truites et de brochets respectivement dans la Meuse le premier juin de l'année $2001 + n$ (où n désigne un nombre entier naturel).
On estime qu'entre une année et la suivante :

- le nombre de truites augmente de 10 % mais lors des $T_n \times B_n$ rencontres possibles entre les deux espèces, seules 0,1 % ont effectivement lieu et à chacune d'entre elles la truite est dévorée par le brochet ;
- parmi les B_n brochets, 5 % meurent uniquement à cause de leur sensibilité à la toxicité de l'eau de la Meuse. Mais le fait de dévorer des truites permet aux brochets de se reproduire.

Ainsi le nombre de nouveaux brochets est estimé à 50 % du nombre de truites dévorées.

1 Étude des suites

a) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} T_{n+1} = 1{,}1T_n - 0{,}001T_n \times B_n \\ B_{n+1} = 0{,}95B_n + 0{,}0005T_n \times B_n \end{cases}$$

b) Quelle est la nature de la suite (T_n) lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ?
Quels sont son sens de variation et sa limite ?

c) Quelle est la nature de la suite (B_n) lorsqu'il n'y a pas de proies ?
Quels sont son sens de variation et sa limite ?

d) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} T_{n+1} - T_n = T_n(0{,}1 - 0{,}001B_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-0{,}05 + 0{,}0005T_n) \end{cases}$$

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?

Note
Durant la Première Guerre mondiale, la pêche en mer Adriatique a été restreinte. Le zoologiste italien Umberto D'Ancona remarqua grâce à des relevés statistiques que le pourcentage des poissons était plus élevé qu'avant la guerre. Il demanda à Vito Volterra de construire un modèle mathématique qui expliquerait ces observations.

2 Avec un tableur

En 2001, dans le secteur étudié, on comptait 210 truites et 50 brochets.

a) Créer à l'aide d'un tableur, en utilisant la fonction de recopie vers le bas, deux colonnes contenant respectivement le nombre de proies (truites) et le nombre de prédateurs (brochets) au cours des 200 années suivant 2001.

b) Pour avoir une idée de l'évolution de ces deux populations, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux truites d'une part et aux brochets d'autre part.
De quel type d'évolution s'agit-il ?
Pour s'en convaincre, représenter le nuage de points de coordonnées $(T_i ; B_i)$.

c) Interpréter concrètement cette évolution.

d) Faire varier les données initiales. L'évolution est-elle fortement influencée par celles-ci ?

e) Illustrer le résultat de la question 2 d).

6.1.4 activité 3

Problème 8 Propagation d'un virus : modèle SIR B2i

Objectif
Étudier un modèle simple de propagation d'un virus.

Pour étudier l'évolution d'une épidémie lors de la propagation d'un virus, on divise la population en trois compartiments :

- S : les individus sains qui ne sont pas infectés par la maladie ;
- I : les individus sains qui sont infectés par la maladie ;
- R : les individus guéris et désormais immunisés contre la maladie (*Recovered* en anglais).

On suppose ici que cette immunité est permanente.
On note S_n, I_n et R_n le nombre d'individus sains, infectés ou guéris respectivement au bout de n semaines (avec n nombre entier naturel).
On suppose que la population globale est constante au cours des semaines suivantes.
Ce schéma représente les flux d'individus entre les différents compartiments.

- **Contamination**

Lorsque la population est à grande densité, on est dans le cas d'une transmission densité dépendante, où la force d'infection λ est proportionnelle au nombre de malades I_n.
On suppose que le virus étudié a une force d'infection $\lambda = 0{,}000\,012\,I_n$.
Ainsi, entre les n-ième et $(n+1)$-ième semaines, $0{,}000\,012\,I_n\,S_n$ individus sains sont infectés.

- **Guérison**

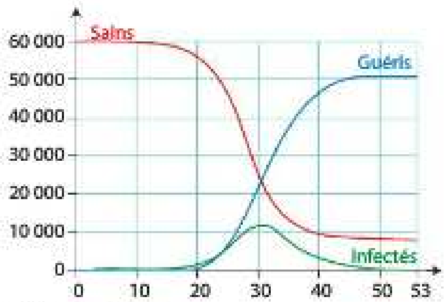
Pour le virus étudié, $k = 0{,}33$.
Ainsi, entre les n-ième et $(n+1)$-ième semaines, 33 % des I_n individus infectés sont guéris et immunisés.

On se propose d'étudier le comportement des suites (S_n), (I_n) et (R_n).

1 Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - 0{,}000\,012\,I_n\,S_n \\ I_{n+1} = I_n + 0{,}000\,012\,I_n\,S_n - 0{,}33\,I_n \\ R_{n+1} = R_n + 0{,}33\,I_n \end{cases}$$

2 Initialement la population comptait 60 000 individus sains et 5 individus infectés.
On simule la propagation de ce virus pendant une année. On a obtenu les courbes ci-contre.



a) Vérifier avec un tableur que l'on obtient bien ces courbes.
b) Interpréter concrètement l'allure de chaque courbe.
c) Combien d'individus ont été infectés finalement ?

3 **a)** Conjecturer une propriété remarquable des points d'inflexion des courbes « Sains » et « Guéris » ainsi que la propriété correspondante pour la courbe « Infectés ».
b) Tester si cette conjecture peut être émise pour différentes valeurs initiales.

6.1.5 activité 4

Problème 9 Propagation d'une rumeur

Objectif
Établir des relations de récurrence à partir de règles.

On s'intéresse à la propagation d'une rumeur dans une population divisée en trois groupes :
- Ignore : les individus ignorant la rumeur ;
- Répand : les individus connaissant la rumeur et qui la répandent ;
- Connait : les individus connaissant la rumeur mais qui ne la répandent plus.

On se propose de savoir si la rumeur atteindra toute la population, et, si ce n'est pas le cas, quelle proportion de la population ne la connaîtra pas.

On note I_n, R_n et C_n le nombre d'individus ignorant, répandant ou connaissant sans répandre la rumeur respectivement au bout de n semaines (avec n nombre entier naturel). On suppose que la population globale est constante.

1 Établir des formules de récurrence

a) Évolution de I_n

Règle 1 (rencontre Ignore-Répand)
Lorsqu'un individu ignorant la rumeur rencontre un individu la répandant, les deux la répandent la semaine suivante.

On admet qu'il y a $I_n \times R_n$ rencontres possibles de ce type la n-ième semaine et on estime que 0,01 % d'entre elles ont effectivement lieu chaque semaine.
En déduire que pour tout nombre entier naturel n, $I_{n+1} = I_n - 0{,}0001\, I_n\, R_n$.

b) Évolution de R_n

- Justifier, dans un premier temps, que la $(n+1)$-ième semaine, le groupe « Répand » gagne $0{,}0001\, I_n\, R_n$ individus.

Règle 2 (rencontre Connait-Répand)
Lorsqu'un individu connaissant la rumeur mais ne la répandant pas rencontre un individu la répandant, ce dernier ne la répand plus non plus la semaine suivante.

- Combien de telles rencontres sont possibles la n-ième semaine ?

On estime également que 0,01 % d'entre elles ont effectivement lieu chaque semaine.

Règle 3 (rencontre Répand-Répand)
Lorsque deux individus répandant la rumeur se rencontrent, les deux ne la répandent plus la semaine suivante.

- On suppose qu'il y a $0{,}5R_n(R_n - 1)$ rencontres de ce type la n-ième semaine et on estime que 0,01 % d'entre elles ont effectivement lieu chaque semaine.

En déduire finalement que pour tout nombre entier naturel n :

$$R_{n+1} = R_n + 0{,}0001\, I_n\, R_n - 0{,}0001\, R_n\, C_n - 0{,}000\,05\, R_n(R_n - 1)$$

c) Évolution de C_n

Justifier que pour tout nombre entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n + 0{,}0001\, R_n\, C_n + 0{,}000\,05\, R_n(R_n - 1)$$

2 Conjecturer avec un tableau

a) À l'aide d'un tableur, représenter graphiquement l'évolution des trois groupes avec les données initiales indiquées ci-contre.

b) Répondre au problème posé.

	A	B	C	D
1	Nombre de semaines	Ignore	Répand	Connaît
2	Données initiales	9999	1	0
3	1	9998,0001	1,9999	0

6.1.6 activité 5

Note

- Les individus sont stockés dans une matrice ligne P de taille N.
- NbRepand : nombre d'individus répandant la rumeur.
- NbConnait : nombre d'individus connaissant la rumeur sans la répandre.

3 Propagation aléatoire de la rumeur

Les règles précédentes sont conservées mais on va simuler la propagation de cette rumeur à l'aide d'un algorithme en supposant que les rencontres se font de manière aléatoire.

On note 0 les individus ignorant la rumeur, 1 ceux qui la connaissent et la répandent, 2 ceux qui la connaissent sans la répandre.

Initialement, personne ne connaîtra la rumeur sauf NbRepand individus.

L'algorithme incomplet suivant sous le langage Xcas permet de simuler une telle propagation durant NbSemaines.

```
Prog  Edit  Ajouter  1  nxt  OK (F9)  Save
Rumeur():={
local r,q,j,N,NbRepand,NbSemaines,k,m,NbConnait;
saisir("N=",N);
saisir("NbRepand=",NbRepand);
saisir("Nbsemaines=",NbSemaines);
ClrGraph;
NbConnait:=0;
pour j de 1 jusque N-NbRepand faire
P[j]:=0;
fpour;
pour q de N-NbRepand+1 jusque N faire
P[q]:=1;
fpour;
pour r de 1 jusque NbSemaines faire
k:=alea(N)+1;
m:=alea(N)+1;
si k != m alors
  si (P[k]==0 et P[m]==1) ou (P[k]==1 et P[m]==0) alors
    P[k]:=1;
    P[m]:=1;
    NbRepand:=NbRepand+1;
  sinon
    si (P[k]==1 et P[m]==2) ou (P[k]==2 et P[m]==1) alors
      P[k]:=...;
      P[m]:=...;
      NbRepand:=....................;
      NbConnait:=....................;
    sinon
      si (P[k]==1 et P[m]==1) alors
        P[k]:=...;
        P[m]:=...;
        NbRepand:=..................;
        NbConnait:=..................;
      fsi;
    fsi;
  fsi;
fsi;
affichage (point(r,NbRepand),bleu);
affichage (point(r,NbConnait),rouge);
fpour;
retourne (NbRepand,NbConnait);
};
```

Note

ClrGraph permet d'effacer l'ancienne fenêtre graphique.

Note

L'instruction « Si $k != m$ alors » permet de vérifier si les personnes choisies au hasard ne sont pas en fait la même personne.

a) La zone rouge consiste à construire la population initiale suivant les valeurs saisies par l'utilisateur. Vérifier que pour N = 13 et NbRepand = 3, on obtient la matrice ligne P = (0000000000111).

b) La zone bleue consiste à choisir deux places k et m aléatoirement entre 1 et N dans la matrice et de regarder les types d'individus correspondants.

En s'aidant des règles de propagation, compléter les pointillés.

c) Tester cet algorithme sur Xcas ou AlgoBox avec N= 100, NbRepand = 50 et NbSemaines = 1 000. Interpréter l'allure des nuages de points obtenus, puis répondre au problème posé.

Note

Si le graphique n'apparaît pas sous Xcas, faire Cfg, Montrer, DispG.

7 Coloration d'un graphe et nombre chromatique

7.1 activités

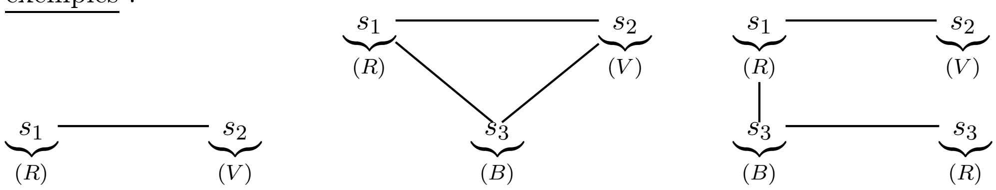
7.1.1 activité 1

7.2 à retenir

définition 11 : *(coloration d'un graphe)*

$\boxed{\text{colorer}}$ le graphe G c'est $\boxed{\text{affecter à chacun des sommets une et une seule couleur}}$
telle que, $\boxed{\text{quels que soient deux sommets adjacents, ces sommets n'ont pas la même couleur}}$

exemples :



7.3 exercices

8 devoir maison

8.1 corrigé devoir maison

Corrigé devoir maison

Exercice 1 : *(problème 3 page 300)*
Pour déterminer le plus sourt chemin de H à D on tulise l'algorithme de DijKstra

H	C	A	B	F	E	D	chaînes mini
H(0)							H(0)
×	HC(9)	HA(12)	HB(20)				HC(9)
×	×	×	HCB(17)		HCE(30)		HA(12)
×	×	×	×	HAF(25)			HCB(17)
×	×	×	×	HCBF(24)	HCBE(28)		HCBF(24)
×	×	×	×	×	HCBFE(29)	HCBFD(33)	HCBE(28)
×	×	×	×	×	×	HCBED(31)	HCBED(31)
×	×	×	×	×	×		

la chaîne la plus courte de H à D est donc $\boxed{HCBED}$ avec un poids de 31

Exercice 2 : *(problème 4 page 301)*

1. Avec un tableur

   (a) feuille de calcul

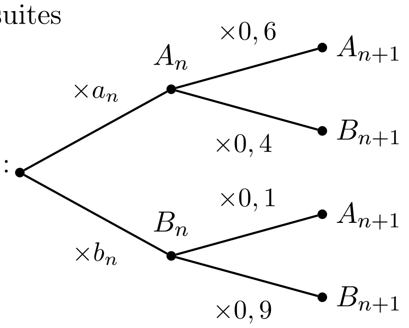
	A	B	C
1	Année	opérateur A	Opérateur B
2	2010	25	75
3	2011	22,5	77,5
4	2012	21,25	78,75
5	2013	20,625	79,375
6	2014	20,3125	79,6875
7	2015	20,15625	79,84375

   (b) formules : B3 = 0,6*B2+0,1*C2 et C3 =0,4*B2+0,9*C2

   (c) l'objectif n'est pas atteint car 79,84375 $<$ 80

2. Avec des suites

   (a) arbre :



   (b) on a $p(A_{n+1}) = p(A_n) \times 0,6 + p(B_n) \times 0,1$
   donc : $\boxed{a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1b_n}$

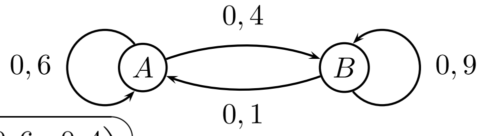
   (c) on a : $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$
   d'où : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,6a_n + 0,1 - 0,1a_n$
   soit : $\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1}$

   (d) $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,2 = 0,5a_n + 0,1 - 0,2 = 0,5a_n - 0,1 = 0,5(a_n - \dfrac{0,1}{0,5}) = 0,5(a_n - 0,2) = 0,5u_n$
   donc u est géométrique de premier terme $u_0 = a_0 - 0,2 = 0,25 - 0,2 = \boxed{u_0 = 0,05}$ et de raison $\boxed{q = 0,5}$

(e) on a donc : $u_n = 0,05 \times 0,5^n$ et $\boxed{a_n = 0,2 + 0,05 \times 0,5^n}$
$a_5 = 0,2 + 0,05 \times 0,5^5 = 20,15625$ donc $b_5 = 1 - a_5 = 79,84375 < 80$ et l'objectif n'est pas atteint

3. avec un graphe probabiliste

(a) graphe probabiliste



(b) $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}}$

(c) $\boxed{p_0 = (0,25 \quad 0,75)}$

(d) $p_5 = p_0 \times M^5 = (20,15625 \quad 79,84375)$
$79,84375 < 80$ et l'objectif n'est pas atteint

(e) pour déterminer l'état stable il suffit de trouver P tel que :
$P = P \times M$ et $x + y = 1 \iff \begin{cases} x = 0,6x + 0,1y \\ y = 0,4x + 0,9y \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,4x + 0,1y = 0 \\ -0,4x + 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,4x + 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$
ce qui équivaut aux système matriciel $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
que l'on résoud à la calculatrice en calculant $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$
on a donc : état stable $= P = (0,2 \quad 0,8)$
ce qui se traduit par le fait, qu'à long terme, la répartition dans les deux villes se rapproche de 20% en A et 80% en B
$\boxed{\text{l'objectif ne pourra donc jamais être atteint}}$

Exercice 33 page 315

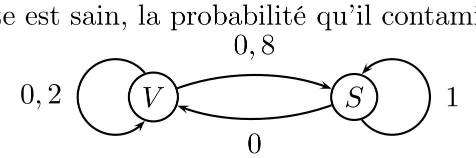
A. Pour déterminer le plus sourt chemin de H à G on utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H	chaînes mini
$\underbrace{A(0)}_{1}$								A(0)
×	$\underbrace{AB(2)}_{3}$	$\underbrace{AC(1)}_{2}$	$\underbrace{AD(4)}_{4}$					AC(1)
×	×	×	×	$\underbrace{ACE(6)}_{6}$				AB(2)
×	×	×	×	×	$\underbrace{ADF(5)}_{5}$			AD(4)
×	×	×	×	×	×	ADFG(9)	$\underbrace{ADFH(6)}_{6}$	ADF(5)
×	×	×	×	×	×	$\underbrace{ACEG(8)}_{7}$	×	ACE(6) ADFH(6)
×	×	×	×	×	×	ADFHG(10)	×	ACEG(8)
×	×	×	×	×	×	×	×	

la chaîne la plus courte de A à H est donc $\boxed{ACEG}$ avec un poids de 8

B.
1. graphe probabiliste

   si un site est sain, la probabilité qu'il contamine le suivant est nulle, d'où le 0



2. $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

3. (a) $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$

   donc $\begin{pmatrix} 0,2a_n + 0b_n & 0,8a_n + 1b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$

   donc $a_{n+1} = 0,2a_n$

   donc $a_n = a_1 \times 0,2^{n-1}$ avec $a_1 = 0,2$

   d'où : $a_n = 0,2^n$

   (b) $0 < 0,2 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$

   la probabilité que le site soit infecté tend vers 0 au fur et à mesure que l'on passe de site en site

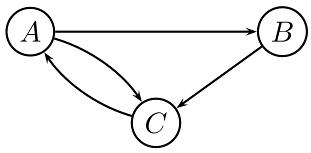
9 exercices bac blanc

exercice 17 : *(uniquement pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité Mathématiques)*

– Du "PageRank" d'une page web dépend la place qu'elle aura dans les résultats donnés par un moteur de recherche. On procède ainsi pour le calcul du PageRank noté c d'une page quelconque appelée C :
si k pages P1, P2, ..., Pk pointent vers la page C,
où $a_1, a_2, ...a_k$ sont les PageRanks respectifs des pages P1, P2, ... Pk précédentes,
n_1 est le nombre de liens qui sortent de la page P1, n_2 est le nombre de liens qui sortent de la page P2, ..., n_k est le nombre de liens qui sortent de la page Pk

le PageRank de la page C se calcule ainsi : $\boxed{c = 0,15 + 0,85 \times (\frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2} + ... + \frac{a_k}{n_k})}$

1. Dans cette partie, on considère que trois pages web A,B, et C parlent d'un même sujet, les liens entre les pages web sont donnés par le graphe suivant :



soient a le PageRank de la page A, b le PageRank de la page B et c le PageRank de la page C
la méthode de calcul du PageRank ci dessus conduit aux système de trois équations à trois inconnues a, b et c suivant : $(S) \begin{cases} a + 0b - 0,85c = 0,15 \\ -0,425a + b + 0c = 0,15 \\ -0,425a - 0,85b + c = 0,15 \end{cases}$

   (a) montrer que la méthode de calcul du PageRank appliquée à la page C conduit à l'équation $-0,425a - 0,85b + c = 0,15$

   (b) (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donner les matrices A et B

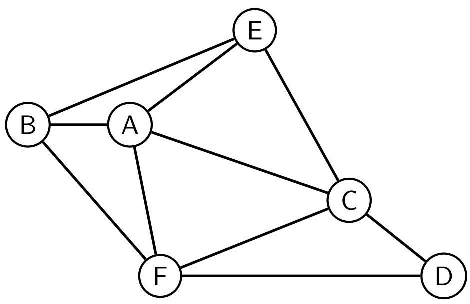
   (c) exprimer la matrice X en fonction des matrices A et B puis résoudre cette équation matricielle grâce à la calculatrice en indiquant sur la copie la démarche suivie et donner les valeurs de a, b et c trouvées

   (d) en déduire l'ordre d'apparition des pages dans le moteur de recherche *(du plus grand au plus petit PageRank)*

2. on considère dans cette partie le réseau de pages web schématisé par le graphe G ci dessous où les liens entre les pages sont possibles dans les deux sens

Soit M la matrice associée au graphe G (sommets dans l'ordre alphabétique)

On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 & 4 & 8 & 10 \\ 8 & 4 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 10 & 5 & 6 & 6 & 9 & 10 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 9 & 4 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 10 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$



   (a) Un internaute est actuellement sur la page E, combien de chemins de longueur trois peut-il suivre pour se retrouver sur la page C ? *(justifier)*

   (b) Le graphe G admet-il une chaîne eulérienne ? *(la réponse devra être justifiée)*. Si oui donner une telle chaîne

   (c) Le graphe G admet-il un cycle eulérien ? *(la réponse devra être justifiée)*. Si oui donner un tel cycle

corrigé exercice 17 :

1.

$$(S)\begin{cases} a+0b-0,85c=0,15\\ -0,425a+b+0c=0,15\\ -0,425a-0,85b+c=0,15 \end{cases}$$

(a) calcul du PageRank appliquée à la page C :

$c=0,15+0,85\times(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{1})$

$c=0,15+0,425a+0,85b$

$\boxed{-0,425a-0,85b+c=0,15}$

(b) $\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,85\\ -0,425 & 1 & 0\\ -0,425 & -0,85 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{B=\begin{pmatrix} 0,15\\ 0,15\\ 0,15 \end{pmatrix}}$

(c) $\boxed{X=A^{-1}B}$ et à la calculatrice on entre les matrices A et B et on demande la calcul de $A^{-1}B$

qui donne : $\boxed{X=\begin{pmatrix} \simeq 1,163\\ \simeq 0,644\\ \simeq 1,192 \end{pmatrix}}$

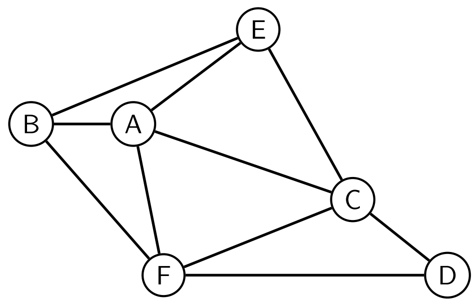
(d) ordre d'apparition des pages dans le moteur de recherche est $\boxed{\text{C puis A puis B}}$

car $1,192>1,163>0,644$

2. on considère dans cette partie le réseau de pages web schématisé par le graphe G ci dessous où les liens entre les pages sont possibles dans les deux sens

Soit M la matrice associée au graphe G (sommets dans l'ordre alphabétique)

On donne la matrice $M^3=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 & 4 & 8 & 10\\ 8 & 4 & 5 & 4 & 8 & 9\\ 10 & 5 & 6 & 6 & 9 & 10\\ 4 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6\\ 8 & 8 & \boxed{9} & 4 & 4 & 5\\ 10 & 9 & 10 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$



(a) Un internaute actuellement sur la page E, peut suivre 9 chemins de longueur trois pour se retrouver sur la page C car $\boxed{M^3_{53}=9}$

(b) Le graphe G $\boxed{\text{admet une chaîne eulérienne}}$ car il n'admet que $\boxed{\text{deux sommets de degrés impairs}}$ E et B de degrés trois

chaîne Eulérienne : $\boxed{\text{EBFDCFACEAB}}$

(c) Le graphe G $\boxed{\text{n'admet pas de cycle eulérien}}$ car $\boxed{\text{il n'a pas que des sommets de degrés pairs}}$ Si oui donner un tel cycle exercice 18 :

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010+n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010+n$,
- $P_n = (a_n \quad i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n,
$P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A État stable d'un graphe probabiliste

Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.
   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.
3. (a) Calculer la matrice P_1.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
   Interpréter le résultat.

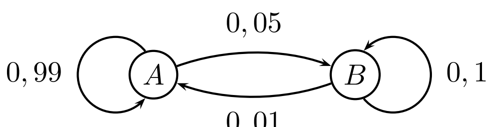
Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. (a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

corrigé exercice 18 :

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A État stable d'un graphe probabiliste



1.

2. Donner $\boxed{P_0 = (0,92\ 0,08)}$ On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.

3. (a) $P_1 = P_0 \times M = \boxed{(0,8748\ 0,1252)}$

   (b) répartition des clients de la banque en 2015
   $P_5 = p_0 \times M^5 = \boxed{(0,72\ 0,28)}$
   $\boxed{\text{72 \% de clients d'agence et 28\% internet}}$

4. pour déterminer l'état stable il suffit de trouver P tel que :
   $P = P \times M$ et $x+y=1 \iff \begin{cases} x = 0,95x + 0,01y \\ y = 0,05x + 0,99y \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,05x + 0,01y = 0 \\ 0,05x - 0,01y = 0 \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,05x + 0,01y = \\ x+y=1 \end{cases}$
   ce qui équivaut aux système matriciel $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,01 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   que l'on résoud à la calculatrice en calculant $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,166666... \\ 0,833333... \end{pmatrix}$
   on a donc : état stable $\boxed{P = (\simeq 0,17 \quad \simeq 0,83)}$
   à long terme, la répartition se rapproche de $\simeq 17\%$ en agence et 83% internet

Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. (a) $P_{n+1} = P_n \times M$
   donc $(a_{n+1}\ i_{n+1}) = (a_n\ i_n) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$
   donc $\boxed{a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01i_n}$ et $i_{n+1} = 0,05a_n + 0,99i_n$

   (b) de plus : $a_n + i_n = 1$ donc $i_n = 1 - a_n$
   donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01(1-a_n) = 0,94a_n + 0,01$
   soit $\boxed{a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01}$

2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.

   (a) $u_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{1}{6} = 0,94a_n + 0,01 - \dfrac{1}{6} = 0,94a_n + \dfrac{0,06-1}{6} = 0,94a_n + \dfrac{-0,94}{6} = 0,95(a_n - \dfrac{1}{6})$
   $u_{n+1} = 0,94u_n$
   donc u est géométrique de premier terme $u_0 = a_0 - 0,2 = 0,92 - \dfrac{1}{6} = \boxed{u_0 = \dfrac{4,52}{6} = \dfrac{452}{600} = \dfrac{113}{150}}$
   et de raison $\boxed{q = 0,94}$

   (b) donc $u_n = u_0 \times q^n$ soit $\boxed{u_n = \dfrac{113}{150} \times 0,94^n}$ en fonction de n.

   (c) on en déduit que pour tout entier naturel n, $a_n = u_n + \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6}}$

   (d) on en déduit que : $q = 0,94$ donc $0 < q < 1$
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6} = \dfrac{113}{150} \times 0 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$
   donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{6}}$ et le pourcentage de clients en agence $\boxed{\text{se rapproche de } \dfrac{1}{6} \simeq 17\%}$ à long terme